

PRZEPŁYW GAZU ROZRZEDZONEGO MIĘDZY RÓWNOLEGLYMI ŚCIANKAMI

MARIAN GRUDNICKI (WARSZAWA)

WYKAZ OZNACZEŃ

- f funkcja rozkładu molekuł,
 f^+, f^- funkcja rozkładu molekuł dla prędkości posiadających składową ξ_x odpowiednio dodatnią lub ujemną,
 $f_0 = n \frac{\pi^{3/2}}{(\pi Q)^3} \exp \left\{ -\frac{1}{Q^2} (\xi - v)^2 \right\}$, rozkład lokalnie maxwellowski,
 $f_{00} = n_0 \pi^{3/2} / (\pi Q_0)^3 \exp \{ -1/Q^2 \xi^2 \}$, rozkład absolutnie maxwellowski,
 φ funkcja zaburząca, rozkład absolutnie maxwellowski,
 $f = f_{00} (1 + \varphi)$,
 ξ prędkość molekularna,
 $c = \xi/Q_0$ prędkość molekularna bezwymiarowa,
 n gęstość liczbową molekuł,
 n_0 średnia gęstość liczbową molekuł,
 m masa molekularna,
 T temperatura gazu,
 ρ gęstość gazu,
 v prędkość średnia gazu,
 P_{ij} tensor naprężeń,
 q_i strumień ciepła,
 p ciśnienie,
 T_1, T_2 temperatura odpowiednio górnej i dolnej ścianki,
 $T_0 = 1/2 (T_1 + T_2)$ temperatura średnia,
 $Q = \sqrt{2kT/m}$,
 $Q_0 = \sqrt{2kT_0/m}$,
 $Q_- = \sqrt{2kT_1/m}$,
 $Q_+ = \sqrt{2kT_2/m}$,
 $u = v/\Omega_0$
 $v = n/n_0 - 1$,
 $\tau = T/T_0 - 1$,
 $w/2$ prędkość ścianki (w oznacza względną prędkość ścianki),
 $w_1 = w/\Omega_0$,

- d odległość między ściankami,
 $x_1 = x/d$ współrzędna prostopadła do ścianek,
 Kn liczba Knudsenowa,
 $\alpha = \frac{An_0 d}{\Omega_0}$,
 λ średnia droga swobodna,
 A stała równania BGK,
 k stała Boltzmannowa,
 $K(\xi_1, \xi)$ funkcja charakteryzująca własności ścianki i wyrażająca prawo oddziaływania molekuł ze ścianką.

I. WSTĘP

Zagadnienie przepływu gazu rozrzedzonego między równoległymi ściankami było niejednokrotnie rozważane w literaturze. Niezwykle prosty układ geometryczny pozwala uniknąć wielu trudności matematycznych, ponieważ zadanie jest jednowymiarowe. Jednakże ten układ geometryczny wprowadza także pewne osobliwości, na skutek czego niektóre metody, mające zastosowanie w innych zagadnieniach, są tutaj nieprzydatne.

Jak pokażemy niżej, w przepływie swobodnie molekularnym funkcja rozkładu cząstek jest na ogół nieciągła względem prędkości molekularnej, podczas gdy z rozważań jakościowych wynika, że dla dowolnej skończonej liczby Knudsenowa funkcja ta powinna być ciągła [1]. Fakt ten jest konsekwencją przyjętego układu geometrycznego i na ogół nie występuje w innych zagadnieniach [1]. Przejście od funkcji ciągłej do nieciągłej, gdy liczba Knudsenowa dąży do nieskończoności, daje podstawy do przypuszczenia, że funkcja rozkładu dla dużych liczb Knudsenowa szybko się zmienia na małych odległościach (w przestrzeni prędkości molekularnych), co bardzo utrudnia aproksymację.

Drugą ujemną cechą takiego układu geometrycznego jest niemożliwość stosowania tzw. iteracji Knudsenowej lub, co jest równoważne, rozwijania funkcji rozkładu w szereg względem potęg Kn/c_x (gdzie Kn jest liczbą Knudsenową, a c_x składową prędkości molekularnej, prostopadłą do ścianek). Rozwinięcie takie prowadzi do wystąpienia rozbieżnych całek przy wyznaczaniu wyższych przybliżeń niż pierwsze [1 i 15].

Prawie wszystkie prace dotyczące omawianego przepływu wykorzystują teorię liniową. Ponadto zakłada się stacjonarność oraz brak sił masowych.

Istnieją dwa zasadnicze kierunki badania problemu: jeden oparty na zlinearyzowanym równaniu Boltzmannowa [1, 6, 7, 8, 9, 10 i 13] oraz drugi oparty na zlinearyzowanych równaniach modelowych [1, 5, 14, 15, 20, 21, 22 i 26].

Dla rozwiązywania liniowego równania Boltzmannowa stosowano metody momentów [6, 7, 8 i 9] oraz metodę wariacyjną [13], przy czym rozważano molekuly maxwellowskie i molekuly, których modelem są sztywne kule.

Z równań modelowych stosowano przede wszystkim model BGK [1, 5, 14, 15 i 22] oraz sporadycznie model elipsoidalny [34]. Ze względu na dużo prostsze równania rozwinięto tu więcej metod rozwiązań: metodę momentów [1, 14 i 25], wariacyjną [18 i 19], «rozwiązań elementarnych» [5 i 22], iteracji równania całkowego [1 i 15], rozkładu na szeregi potęgowe względem potęg liczby Knudsena [1 i 15] oraz metodę dyskretnych współrzędnych [34].

Ponieważ równanie Boltzmann'a, zarówno w przypadku liniowym jak i ogólnym, jest równaniem różniczkowo-całkowym, przeto należy sformułować warunki początkowe i brzegowe. W przypadku zagadnień stacjonarnych wystarczą oczywiście tylko warunki brzegowe.

We wszystkich omawianych pracach przyjmowano warunki brzegowe Maxwella polegające na tym, że część molekuł odbitych od ścianki ma rozkład Maxwella z temperaturą ścianki (odbicie dyfuzyjne), a część odbija się w sposób zwierciadlany. Są to warunki mikroskopowe (na funkcję rozkładu). W związku z tym, że w rozkładzie Maxwella występują nieznane parametry, potrzebne są jeszcze dodatkowe warunki. Zazwyczaj nakłada się je na wielkości hydrodynamiczne (warunki makroskopowe). W omawianych pracach przyjmowano, że średnia prędkość gazu na ścianie w kierunku normalnym jest równa zero oraz że dana jest średnia gęstość liczbowa. Jeżeli zagadnienie opisane jest zlinearyzowanym równaniem BGK z warunkami dyfuzyjnymi, to można pokazać (np. metodą iteracji [15]), że istnieje jednoznaczne rozwiązanie.

Zagadnieniem istnienia i jednoznaczności rozwiązania liniowego równania Boltzmann'a w danym przypadku zajmował się GUIRAUD [2 i 33]. Przyjmując dyfuzyjne warunki brzegowe udowodnił on, że istnieje jednoznaczne rozwiązanie problemu. Jednakże dowód ten jest o wiele bardziej skomplikowany niż w przypadku równania BGK i nie będziemy go przytaczać.

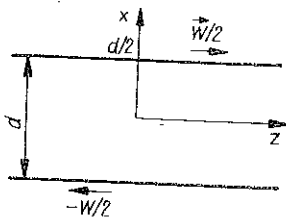
Przypadek nieliniowy i niestacjonarny jest dotychczas mało zbadany. Brak jest zarówno dowodów istnienia i jednoznaczności rozwiązania nieliniowego równania, jak też efektywnych przybliżonych metod rozwiązania. Stosowano tu jedynie metody momentowe [1 i 25] oraz metody numeryczne [1 i 3]. Przypadek niestacjonarny rozważany był tylko metodą Monte Carlo [4].

Poniżej zajmować się będziemy tylko przepływem stacjonarnym w ujęciu liniowym.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Przyjmujemy następujące założenia: 1) gaz rozrzedzony znajduje się między równoległymi nieskończonymi ściankami, 2) na gaz nie oddziałują zewnętrzne siły masowe, 3) liczba molekuł gazu przypadająca na jednostkę pola powierzchni ścianki jest stała, 4) ścianki są nieprzenikliwe, jednorodne i mają stałą temperaturę:

odpowiednio górną T_1 , a dolną T_2 , 5) obieramy układ współrzędnych (rys. 1) w taki sposób, aby ścianki poruszały się w przeciwnych kierunkach ze stałymi prędkościami: górną $w/2$, a dolną $-w/2$, 6) odległość między nimi wynosi d .



Rys. 1

Oś x jest skierowana prostopadle do ścianek, oś z równoległe do ich ruchu. Składowe prędkości molekularnej ξ w kierunkach osi y, x, z oznaczamy odpowiednio przez ξ_x, ξ_y, ξ_z . Równania płaszczyzn idealizujących ściankę górną i dolną są następujące: $x = d/2, x = -d/2$. Zakładamy również, że prawo odbicia molekuł od ścianki nie zależy od czasu.

Przy powyższych założeniach mamy do czynienia z zagadnieniem jednowymiarowym stacjonarnym.

Ogólnie przepływ opisany jest za pomocą funkcji $f = f(x, \xi)$ rozkładu prędkości cząsteczek, spełniającej równanie Boltzmann'a [1 i 5]:

$$(2.1) \quad \xi_x \frac{\partial f}{\partial x} = \int (f' f'_1 - f_1 f) g b db d\varepsilon d\xi_1$$

oraz warunki brzegowe

$$(2.2) \quad f^\pm \left(\mp \frac{d}{2}, \xi_x \geq 0, \xi_y, \xi_z \right) = \int_{\xi_x \leq 0} f^\mp \left(\mp \frac{d}{2}, \xi_1 \right) K(\xi_1, \xi) d\xi_1,$$

gdzie $f, f_1; f', f'_1$ oznaczają funkcje rozkładu molekuł o prędkościach $\xi, \xi_1; \xi', \xi'_1$ odpowiednio przed i po zderzeniu, $g = |\xi - \xi_1|$, b, ε parametry geometryczne zderzenia molekuł, $K(\xi_1, \xi)$ funkcję określającą własności ścianek i wyrażającą prawo oddziaływania molekuł ze ścianką oraz f^+, f^- funkcje rozkładu molekuł ze składową ξ_x prędkości molekularnej odpowiednio dodatnią i ujemną.

Ze względu na dużą złożoność prawej części równania (2.1) często zastępuje się je równaniem modelowym, w którym, mimo występowania o wiele silniejszych nieliniowości, struktura prawej strony jest dużo prostsza. Równanie modelowe BGK [1], opisujące nasze zagadnienie, ma postać

$$(2.3) \quad \xi_x \frac{\partial f}{\partial x} = An(f_0 - f),$$

gdzie n oznacza gęstość liczbową, f_0 funkcję lokalnie maxwellową oraz A stałą.

Warunki brzegowe dla równania modelowego są takie same jak dla równania Boltzmann'a, tzn. są określone wzorem (2.2).

Wielkości hydrodynamiczne wyrażają się za pomocą funkcji rozkładu następująco [1, str. 32]:

(2.4) gęstość

$$\rho = mn = m \int f d\xi,$$

(2.4) prędkość średnia

lc.d.l

$$v = \frac{1}{n} \int \xi f d\xi,$$

tensor naprężeń

$$P_{ij} = m \int C_i C_j f d\xi,$$

strumień ciepła

$$q_i = \frac{m}{2} \int C^2 C_i f d\xi,$$

ciśnienie

$$p = \frac{1}{3} (P_{11} + P_{22} + P_{33}),$$

temperatura

$$T = \frac{2}{3kn} \int \frac{mC^2}{2} f d\xi,$$

gdzie $C = \xi - v$, $C = |C|$, m oznacza masę molekularną, $n = \int f d\xi$ oznacza gęstość liczbową molekuł oraz k stałą Boltzmanną.

Założenie nieprzenikliwości ścianek oznacza, że składowa v_x prędkości średniej jest na ściankach równa zero, a więc zgodnie ze wzorami (2.4) można je przedstawić następująco:

$$(2.5) \quad \int_{\xi_x < 0} \xi_x f \left(\mp \frac{d}{2}, \xi \right) d\xi = \int_{\xi_x > 0} \xi_x f \left(\mp \frac{d}{2}, \xi \right) d\xi.$$

Średnia gęstość liczbowa molekuł

$$(2.6) \quad n_0 = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} n(x) dx.$$

Warunek (2.2) jest bardzo ogólny i w konkretnych zagadnieniach należy go dokładniej sprecyzować. Zwykle osiąga się to przez przyjęcie takiej postaci $K(\xi_1, \xi)$, aby otrzymać funkcję $f^\pm(\mp d/2, \xi_x, \xi_y, \xi_z)$, gdzie $\xi_x \neq 0$, zależną od pewnej ilości parametrów. Parametry te wyznacza się z tzw. warunków makroskopowych, tzn. nakładanych na wielkości hydrodynamiczne.

W omawianych pracach przyjmowane były warunki brzegowe Maxwella [1, str. 82]. W tym założeniu

$$(2.7) \quad K(\xi_1, \xi) = (1 - \alpha_r) \delta[\xi_1 - (\xi - 2(n\xi)n)] - \frac{\alpha_r}{\pi\Omega_\pm^4} \exp\left\{-\frac{1}{\Omega_\pm^2} \left(\xi \pm \frac{w}{2}\right)^2\right\} (\xi_1 n),$$

gdzie $w/2$ oznacza wektor prędkości górnej ścianki, δ deltę Diraca, n wektor normalny do ścianki, $\Omega_- = \sqrt{2kT_1/m}$ oraz $\Omega_+ = \sqrt{2kT_2/m}$.

Wstawiając (2.7) do (2.2) otrzymujemy

$$(2.8) \quad f^{\pm} \left(\mp \frac{d}{2}, \xi_x, \xi_y, \xi_z \right) = (1 - \alpha_r) f^{\mp} \left(\mp \frac{d}{2}, -\xi_x, \xi_y, \xi_z \right) + \\ + \alpha_r n^{\pm} \frac{\pi^{3/2}}{(\pi \Omega_{\pm})^3} \exp \left\{ -\frac{1}{\Omega_{\pm}^2} \left(\xi \pm \frac{w}{2} \right)^2 \right\}, \quad \xi_x \neq 0.$$

Jak widać część w liczbie α_r molekuł odbija się dyfuzyjnie, a pozostała część $(1 - \alpha_r)$ w sposób zwierciadlany. Symbol n^{\pm} oznacza parametry występujące w rozkładzie absolutnie maxwellońskim i odpowiadające podwojonej gęstości liczbowej molekuł odbitych odpowiednio od dolnej i górnej ścianki.

W dalszych rozważaniach niekiedy wygodniej będzie w równanie Boltzmanna wprowadzić zmienne bezwymiarowe.

Przyjmijmy

$$T_0 = \frac{1}{2} (T_1 + T_2);$$

niech d oznacza długość charakterystyczną, $\Omega_0 = \sqrt{2kT_0/m}$ charakterystyczną prędkość oraz n_0/Ω^3 charakterystyczną wartość funkcji rozkładu. Pozostałe wielkości charakterystyczne nie są wprowadzane w sposób wyraźny, ale możemy określić je tak, jak się to robi w ogólnej teorii [1, str. 88]. Całka

$$G = \frac{1}{n^2} \int |\xi - \xi_1| f f_1 d\xi d\xi_1$$

oznacza charakterystyczną prędkość względną, a R charakterystyczny wymiar zderzenia molekuł. Wielkości bezwymiarowe są następujące:

$$x^* = \frac{x}{d}, \quad \xi_i^* = \frac{\xi_i}{\Omega_0}, \quad f^* = f \frac{n_0}{\Omega_0^3}, \\ b^* = \frac{b}{R}, \quad g^* = \frac{g}{G}, \quad \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\pi}.$$

Wprowadźmy jeszcze dwie wielkości: średnią drogę swobodną

$$\lambda = \frac{\Omega_0}{\pi R^2 n_0 G}$$

oraz liczbę Knudsen

$$\text{Kn} = \frac{\Omega_0}{\pi R^2 n_0 G d} = \frac{\lambda}{d}.$$

W zmiennych bezwymiarowych równanie (2.1) można napisać w postaci

$$(2.9) \quad \xi_x^* \frac{\partial f^*}{\partial x^*} = \frac{1}{\text{Kn}} \int (f'^* f_1'^* - f_1^* f^*) g^* b^* db^* d\varepsilon^* d\xi_1^*,$$

a równanie (2.3) w postaci

$$(2.10) \quad \xi_x^* \frac{\partial f^*}{\partial x^*} = \alpha n^* (f_0^* - f^*),$$

gdzie

$$\alpha = \frac{An_0 d}{\Omega_0}, \quad n^* = \frac{n}{n_0}.$$

Jak widać liczba α jest odwrotnie proporcjonalna do liczby Knudsen.

3. PRZEPIŁYW SWOBODNIE MOLEKULARNY

Jeżeli liczba Knudsen dąży do nieskończoności, to można pominąć w równaniu Boltzmann wyraz opisujący zderzenia cząsteczek między sobą, tzn. można przyjąć, że prawa strona jest zerem. Równanie Boltzmann ma wówczas postać

$$(3.1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

czyli funkcja rozkładu jest stała w całym przepływie (nie zależy od współrzędnych przestrzennych). Korzystając z warunków (2.8) i równania (3.1) dostajemy wzór na f :

$$(3.2) \quad f^\pm(x, \xi, \xi_x \geq 0) = \frac{1 - \alpha_\tau}{2 - \alpha_\tau} \frac{\pi^{3/2} n^\mp}{(\pi \Omega_\mp)^3} \exp \left\{ -\frac{1}{\Omega_\mp^2} \left[\xi_x^2 + \xi_y^2 + \left(\xi_z \mp \frac{w}{2} \right)^2 \right] \right\} + \\ + \frac{1}{2 - \alpha_\tau} \frac{\pi^{3/2} n^\pm}{(\pi \Omega_\pm)^3} \exp \left\{ \xi_x^2 + \xi_y^2 + \left(\xi_z \pm \frac{w}{2} \right)^2 \right\}.$$

Równanie (2.5) daje w tym przypadku związek

$$(3.3) \quad n^- \Omega_- = n^+ \Omega_+.$$

Wstawiając (3.2) do (2.4) otrzymujemy [1]

$$(3.4) \quad n = \frac{1}{2} (n^+ + n^-), \\ v_z = \frac{w}{2} \frac{n^- - n^+}{n^- + n^+} = \frac{w}{2} \frac{\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}}, \quad v_x = v_y = 0, \\ T = \sqrt{T_1 T_2} + \frac{mw^2}{3k} \frac{\sqrt{T_1 T_2}}{(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2})^2}, \\ P_{xz} = -\frac{2\alpha_\tau}{2 - \alpha_\tau} \frac{mw}{4\sqrt{\pi}} n^+ \Omega_+, \quad P_{xy} = P_{yz} = P_{yy} = 0, \\ q_x = \frac{\alpha_\tau}{2 - \alpha_\tau} \frac{m}{2\sqrt{\pi}} [n^+ \Omega_+ (\Omega_+^2 - \Omega_-^2)] + \frac{\alpha_\tau}{2 - \alpha_\tau} \frac{mw^2}{4\sqrt{\pi}} n^+ \Omega_+ \frac{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1}}, \\ q_y = 0.$$

Ze wzorów (3.3) i (3.4) wynika, że $n^+ = 2n\Omega_- / (\Omega_- + \Omega_+)$ i wszystkie wyrażenia, gdzie występuje n^+ , możemy przedstawić za pomocą n lub n_0 , gdyż w przypadku swobodnie molekularnym $n_0 = n$.

Ze wzoru (3.2) wynika, że $\lim_{\xi_x \rightarrow 0^-} f = \lim_{\xi_x \rightarrow 0^+} f$ wtedy, gdy $\alpha_\tau = 0$ lub gdy $T_1 = T_2$ oraz $w = 0$, tzn. gdy molekuly odbijają się w sposób dyfuzyjny lub w przypadku stanu równowagi. Oznacza to, że na ogół funkcja rozkładu nie jest ciągła względem prędkości molekularnej.

Podobnie z (3.4)_{2,3} wnioskujemy, że temperatura i prędkość gazu przy ścianie są w ogólnym przypadku różne od prędkości temperatury ścianki oraz że żadna z wielkości hydrodynamicznych nie zależy od odległości między ściankami.

4. LINEARYZACJA RÓWNAŃ (2.1) i (2.3)

Ponieważ będziemy przyjmować, że funkcja rozkładu f ma postać

$$(4.1) \quad f = f_{00}(1 + \varphi),$$

gdzie f_{00} jest funkcją absolutnie maxwellowską:

$$f_{00} = n_0 \frac{\pi^{3/2}}{(\pi\Omega_0)^3} e^{-\frac{1}{\Omega_0^2} \xi^2},$$

a φ bezwymiarową funkcją zaburzającą.

Rozważmy najpierw równanie (2.1) [1 i 5]. Załóżmy, że φ jest małe w stosunku do jedności w sensie normy w przestrzeni Hilberta z następującym iloczynem skalarnym:

$$(4.2) \quad (F, G) = \int f_{00} FG d\xi.$$

Wówczas wstawiając (4.1) do równania (2.1) i uwzględniając, że funkcja f_{00} spełnia równanie Boltzmann'a oraz pomijając wyrazy, w których φ występuje w drugiej potęgce, otrzymamy [1 i 5]:

$$(4.3) \quad \xi_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \int (\varphi'_1 + \varphi' - \varphi_1 - \varphi) f_{00,1} g b db d\varepsilon d\xi_1.$$

Ponieważ n_0 i T_0 są odpowiednio gęstością liczbową i temperaturą odpowiadającą funkcji f_{00} , więc gęstość liczbową i temperaturę gazu można przedstawić następująco:

$$(4.4) \quad n = n_0(1 + \nu), \quad T = T_0(1 + \tau),$$

gdzie

$$(4.5) \quad \nu(x) = \frac{1}{n_0} \int f_{00} \varphi d\xi, \quad \tau(x) = \frac{2}{3kn_0 T_0} \int \frac{m\xi^2}{2} f_{00} \varphi d\xi - \nu(x).$$

Średnia prędkość w kierunku z wynosi

$$(4.6) \quad v_z = \frac{1}{n_0} \int f_{00} \xi_z \varphi d\xi.$$

Linearyzację równania (2.3) przeprowadzano w sposób następujący [1 i 14]: Zakładamy, że $|\varphi| \ll 1$. Wynika stąd (przy wykorzystaniu wzorów (4.5) i (4.6)), że $v(x)$, $\tau(x)$ oraz $u_z = v_z/\Omega_0$ są dużo mniejsze od jedności. (W pracy [5] przeprowadzono rozważania, które pokazują, że wielkości te muszą być dużo mniejsze od jedności także w przypadku, gdy φ jest małe w sensie normy w przestrzeni Hilberta, określonej wyżej).

Wygodniej jest tu przejść do zmiennych bezwymiarowych. Przyjmijmy oznaczenia

$$\xi^* = \xi = \frac{\xi}{\Omega_0}, \quad x^* = x_1 = \frac{x}{d}.$$

Jeżeli funkcję lokalnie maxwellowską f_0 rozłożymy w szereg względem potęg v , τ , u_z i wstawimy do równania (2.10), a następnie odrzucimy wszystkie wyrazy zawierające potęgę wyższą niż pierwsza lub iloczyn wielkości v , τ , u_z , φ , to otrzymamy

$$(4.7) \quad \frac{c_x}{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\varphi + v + 2c_z u_z + \left(c^2 - \frac{3}{2}\right) \tau.$$

Dla obu równań (4.3) i (4.7) przyjmijmy takie same warunki brzegowe, określone wzorem (2.8). Możemy przeprowadzić linearyzację warunków podobnie jak linearyzację równania (2.3). Otrzymamy wówczas w zmiennych bezwymiarowych wyrażenie

$$(4.8) \quad \varphi^\pm \left(\mp \frac{1}{2}, c_x \geq 0, c_y, c_z \right) = \alpha_\tau \left[v^\pm \mp w_1 c_z + \left(c^2 - \frac{3}{2}\right) \tau^\pm \right] + (1 - \alpha_\tau) \varphi^\mp \left(\mp \frac{1}{2}, -c_x, c_y, c_z \right),$$

gdzie analogicznie do wzorów (4.4)

$$n^\pm = n_0(1 + v^\pm), \quad T_2 = T_0(1 + \tau^+),$$

$$T_1 = T_0(1 + \tau^-), \quad w_1 = \frac{w}{\Omega_0}.$$

Uwagi krytyczne. Analizując powyższe postępowanie możemy zauważyć kilka faktów, które na ogół nie są w omawianych pracach podkreślane. Z matematycznego punktu widzenia linearyzacja równania Boltzmanna i równań modelowych różni się dość istotnie. W równaniu Boltzmanna pomijamy wyrazy zawierające w wyższych niż pierwsza potęgach funkcję zaburzającą φ . Ponieważ wyrazy takie występują jedynie po prawej stronie równania, więc są całkami z funkcją wagową e^{-c^2} . W związku z tym dla poprawności linearyzacji wystarczy, aby te całki były mniejsze od jedności, podczas gdy sama funkcja φ może przyjmować wartości dowolne. Takie same uwagi stosują się do warunków brzegowych, gdyż dla $x = \pm 1/2$ funkcja φ przechodzi w funkcję opisującą te warunki.

W równaniu BGK sytuacja jest odmienna, gdyż tutaj występuje linearyzacja funkcji wykładniczej, mnożonej przez funkcję wymierną. Taka linearyzacja nie może być poprawna w całym zakresie prędkości molekularnych. Rzeczywiście, rozłóżmy funkcję

$$(4.9) \quad f_0 = n_0(1 + v) \left[\frac{m}{2\pi k T_0(1 + \tau)} \right]^{3/2} \exp \left\{ \frac{m}{2k T_0(1 + \tau)} (\xi - v^2) \right\}$$

względem potęg v , τ , u_z :

$$(4.10) \quad f_0 = f_{00} \left[1 + v + 2u_z c_z + \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) \tau + (1 + c_z^2) u_z^2 + \dots \right]$$

i rozważmy np. wyrazy zawierające kolejne potęgi u_z , tzn. wyrazy $2u_z c_z$ i $(1 + c_z^2) u_z^2$. Iloraz $u_z(1 + c_z^2)/2u_z c_z$ dąży niejednostajnie względem c_z do zera, gdy $u_z \rightarrow 0$. Zatem dla dużych wartości c_z wyrazy, które pomijamy, mogą być większe od tych, które zostają.

Widzimy więc, że dla modelu BGK linearyzacja matematycznie nie będzie poprawna, nawet jeżeli założymy, że $|\varphi| \ll 1$.

Linearyzację taką można uzasadnić jedynie w ten sposób, że przy obliczaniu wielkości hydrodynamicznych rozpatruje się całki z funkcji φ mnożonej przez e^{-c^2} . Przy tak uśrednionych wielkościach wyrazy zawierające wyższe niż pierwsza potęgę v , τ , u_z można pominąć. Zauważmy jeszcze, że warunki (4.8) spełniają założenie $\|\varphi\| \ll 1$, jeżeli tylko v^\pm , w_1 , τ^\pm są dostatecznie małe względem jedności i $\|\cdot\|$ oznacza normę w przestrzeni Hilberta, wyznaczoną przez iloczyn skalarny, określony przez (4.2); jednakże nie spełniają one założenia $|\varphi| \ll 1$, które przyjmowaliśmy przy linearyzacji równania (2.3).

Widać stąd, że funkcja rozkładu obliczona ze zlinearyzowanego równania Boltzmana dobrze przybliża funkcję rozkładu, podczas gdy dla zlinearyzowanego równania BGK nie można tego matematycznie uzasadnić. Mimo to ze zlinearyzowanego równania BGK można otrzymać wielkości hydrodynamiczne poprawne na tyle, na ile poprawny jest sam model.

5. PRZEPLYW COUETTE'A I WYMIANA CIEPŁA

Liniiowe równanie, opisujące przepływ między równoległymi ściankami, można rozłożyć na dwa niezależne równania, opisujące dwa szczególne przypadki:

- a) temperatura gazu i gęstość liczbowa molekuł jest stała w całym przepływie (przepływ Couette'a);
- b) średnia prędkość gazu w kierunku osi z jest równa zeru (wymiana ciepła).

Pierwszy przypadek otrzymujemy, gdy założymy, że temperatura na ściankach jest jednakowa, a drugi, gdy przyjmiemy, że ścianki są nieruchome.

Funkcję φ , opisującą przepływ przy ogólnych warunkach brzegowych (tzn. gdy występuje ruch ścianek i różnica ich temperatury), otrzymujemy jako sumę funkcji opisujących dwa wyżej wspomniane, szczególne przypadki.

Przytoczmy krótko dowód podany w [5] dla równania (4.7).

Rozważmy przestrzeń Hilberta funkcji $Y(c_y, c_z)$ z iloczynem skalarnym

$$(5.1) \quad (F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_y^2 - c_z^2} F(c_y, c_z) G(c_y, c_z) dc_y, dc_z.$$

Zmienne x i c_x traktujemy jako parametry. Wektor $Y(x, \mathbf{c})$ w przestrzeni Hilberta H możemy rozłożyć na dwa wektory: równoległy do funkcji (wektora) $\Psi = c_z$ oraz prostopadły do Ψ . Otrzymamy wówczas

$$(5.2) \quad Y(x, \mathbf{c}) = c_z Y_1(x, c_x) + Y_2(x, \mathbf{c})$$

z warunkiem

$$(5.3) \quad (c_z, Y_2(x, \mathbf{c})) = 0.$$

Przyjmijmy w (5.2) $Y(x, \mathbf{c}) \equiv \varphi(x_1, \mathbf{c})$ i wstawmy do równania (4.7). Otrzymamy

$$(5.4) \quad \frac{c_x c_z}{\alpha} \frac{\partial \varphi_1(x_1, c_x)}{\partial x_1} + \frac{c_x}{\alpha} \frac{\partial \varphi_2(x_1, \mathbf{c})}{\partial x_1} = -c_z \varphi_1(x_1, c_x) - \varphi_2(x_1, \mathbf{c}) + \\ + \pi^{-3/2} \int e^{-c_1^2} c_{z1} \varphi_1(x_1, c_{x1}) dc_1 + \pi^{-3/2} \int e^{-c_1^2} \varphi_2(x_1, \mathbf{c}_1) dc_1 + \\ + 2\pi^{-3/2} c_z \int e^{-c_1^2} c_{z1}^2 \varphi_1(x_1, c_{x1}) dc_1 + 2\pi^{-3/2} c_z \int e^{-c_1^2} c_{z1} \varphi_2(x_1, \mathbf{c}_1) dc_1 + \\ + \frac{2}{3} \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) \pi^{-3/2} \int c_{z1} \left(c_1^2 - \frac{3}{2} \right) e^{-c_1^2} \varphi_1(x_1, c_{x1}) dc_1 + \\ + \frac{2}{3} \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) \pi^{-3/2} \int \left(c_1^2 - \frac{3}{2} \right) e^{-c_1^2} \varphi_2(x_1, \mathbf{c}_1) dc_1.$$

Rozkład na wektory równoległe i prostopadłe do Ψ w przestrzeni H wektora tożsamościowo równego zeru jest jednoznaczny i daje zerowe współczynniki rozkładu. Współczynnik przy c_z jest funkcją x_1 i c_x . Zatem z równości (5.4) przy wykorzystaniu (5.3) otrzymujemy

$$(5.5) \quad \frac{c_x}{\alpha} \frac{\partial \varphi_1(x_1, c_x)}{\partial x_1} = -\varphi_1(x_1, c_x) + \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_{x1}^2} \varphi_1(x_1, c_{x1}) dc_{x1}$$

oraz

$$(5.6) \quad \frac{c_x}{\alpha} \frac{\partial \varphi_2(x_1, \mathbf{c})}{\partial x_1} = -\varphi_2(x_1, \mathbf{c}) + \pi^{-3/2} \int e^{-c_1^2} \varphi_2(x_1, \mathbf{c}) dc_1 + \\ + \frac{2}{3} \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) \pi^{-3/2} \int \left(c_1^2 - \frac{3}{2} \right) e^{-c_1^2} \varphi_2(x_1, \mathbf{c}_1) dc_1$$

lub, co jest równoważne,

$$(5.7) \quad \frac{c_x}{\alpha} \frac{\partial \varphi_1(x_1, c_x)}{\partial x_1} = -\varphi_1(x_1, c_x) + 2u_z(x_1)$$

oraz

$$(5.8) \quad \frac{c_x}{\alpha} \frac{\partial \varphi_2(x_1, \mathbf{c})}{\partial x_1} = -\varphi_2(x_1, \mathbf{c}) + v(x_1) + \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) \tau(x_1).$$

Równanie (5.5) opisuje przepływ Couette'a, a równanie (5.6) wymianę ciepła.

6. METODA ITERACJI RÓWNIANIA CAŁKOWEGO

Przegląd metod stosowanych do rozwiązania zagadnienia zaczniemy od metody pozwalającej nie tylko w prosty sposób skonstruować rozwiązanie, lecz także uzasadniającej jego istnienie i jednoznaczność. Jest to metoda iteracji równania całkowego (metoda kolejnych przybliżeń). W omawianym zagadnieniu stosowana była jedynie dla modelu BGK, a ściślej mówiąc do równania (5.5) lub (5.7) [1, 15].

Przyjmujemy warunki brzegowe (4.8) z dodatkowymi założeniami $\alpha_\tau = 1$ (odbicie dyfuzyjne), $\tau^+ = \tau^- = \nu^+ = \nu^- = 0$, tzn. przyjmijmy

$$(6.1) \quad \varphi^\pm \left(\mp \frac{1}{2}, c_x \geq 0 \right) = \mp w_1,$$

Równanie (5.7) rozwiążemy formalnie jak równanie różniczkowe zwyczajne z warunkami (6.1) (przy założeniu, że u_z jest funkcją x) i otrzymujemy w ten sposób równanie całkowe

$$(6.2) \quad \varphi_1^\pm(x_1, c_x \leq 0) = \mp w_1 \exp \left\{ -\frac{\alpha}{c_x} \left(x_1 \pm \frac{1}{2} \right) \right\} + \\ + \frac{2\alpha}{c_x} \int_{\mp 1/2}^{x_1} u_z(s) \exp \left\{ -\frac{\alpha}{c_x} (x_1 - s) \right\} ds.$$

Stąd dostajemy równanie na u_z [15] (całkując względem c_x (6.2) pomnożone przez $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-c_x^2}$):

$$(6.3) \quad u_z(x_1) = \frac{w_1}{2} H_1(\alpha, x_1) + \int_0^{1/2} H_2(\alpha, x_1, s) u_z(s) ds,$$

gdzie

$$H_1(\alpha, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-c^2} \left\{ \exp \left[-\frac{\alpha}{c} \left(\frac{1}{2} - x \right) \right] - \exp \left[-\frac{\alpha}{c} \left(\frac{1}{2} + x \right) \right] \right\} dc,$$

$$H_2(\alpha, x, s) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-c^2}}{c} \left\{ \exp \left[-\frac{\alpha}{c} (x-s) \right] - \exp \left[-\frac{\alpha}{c} (x+s) \right] \right\} dc$$

i możemy napisać ogólny wzór iteracyjny:

$$(6.4) \quad u_z^{(r+1)}(x_1) = H_1(\alpha, x_1) + \int_0^{1/2} H_2(\alpha, x_1, s) u_z^{(r)}(s) ds.$$

Ciąg kolejnych przybliżeń zbudowanych według (6.4) jest zbieżny dla każdego α [15], co wystarcza, zgodnie z teorią równań całkowych, do stwierdzenia, że równanie (6.3) ma jednoznaczne rozwiązanie, a zatem problem (5.5), (6.1) także ma jednoznaczne rozwiązanie.

Zupełnie analogicznie można rozwiązać metodą iteracji równanie (5.6), przy tym, jeżeli chcemy wziąć jako warunki zlinearyzowane odbicie dyfuzyjne, to należy przyjąć

$$(6.5) \quad \varphi_{\pm}^{\pm} \left(\mp \frac{1}{2}, c_x \geq 0, c_y, c_z \right) = v^{\pm} + \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) \tau^{\pm}.$$

Jeżeli chcielibyśmy zastosować iterację do równania (5.5) bez przechodzenia do równania całkowego, przyjmując jako zerowe przybliżenie $\varphi_1^{(0)}$ wartości swobodnie molekularne (iteracja Knudsen), to otrzymamy w pierwszym przybliżeniu

$$\varphi_1^{\pm(1)} = w_1 \left[1 \pm \frac{\alpha}{c_x} \left(x_1 \pm \frac{1}{2} \right) \right].$$

W następnych przybliżeniach otrzymuje się już rozbieżne całki, w związku z czym metody tej nie można użyć w tym przypadku, chociaż może być stosowana w innych zagadnieniach [1].

7. METODA MOMENTÓW

Jedną z najwcześniej stosowanych i najbardziej uniwersalnych metod rozwiązywania równania Boltzmann (lub równań modelowych) jest metoda momentów [1]. Polega ona na zastąpieniu równania Boltzmann układem równań różniczkowych, w których występują tylko funkcje zależne od położenia i czasu.

Ogólną zasadę metody można przedstawić następująco: Przyjmujemy, że funkcja φ zależy od pewnej liczby funkcji położenia i czasu oraz że postać zależności od prędkości molekularnej jest znana. Pozwala to wykonać całkowanie obydwu stron równania Boltzmann (ewentualnie mnożonych przez znaną funkcję prędkości molekularnej) względem prędkości molekularnej i otrzymać w ten sposób potrzebne zależności (równania momentowe) dla wyznaczenia nieznanymi funkcji położenia i czasu, które występują w funkcji zaburzającej φ .

Najczęściej przyjmuje się, że funkcja φ jest wielomianem (lub nieskończonym szeregiem) względem prędkości molekularnej o współczynnikach zależnych od położenia. Inną postać przyjmowano tylko w pracy [25], jednakże wówczas komplikują się równania momentowe i tracimy zasadnicze uproszczenie, jakie wnosi ta metoda.

Moment rzędu N funkcji F w przestrzeni \mathcal{A} określamy w następujący sposób:

$$(7.1) \quad M_{i_1 \dots i_N}^{(N)} = \int_{\mathcal{A}} \prod_{k=1}^N c_{i_k} f_{00} F(x, c) dc,$$

gdzie i_k przyjmuje wartości x, y, z , a \mathcal{A} jest całą przestrzenią prędkości molekularnej, ewentualnie półprzestrzenią $c_x > 0$ lub $c_x < 0$. Jeżeli φ jest wielomianem (lub szeregiem) względem prędkości molekularnej, to współczynniki zależne od położenia wyrażają się stosunkowo prosto przez momenty funkcji φ , przy czym równania pozwalające znaleźć te zależności (równania momentowe) otrzymujemy ze zlinearyzowanego równania Boltzmann lub równania modelowego.

W ogólnym przypadku zlinearyzowane równanie Boltzmanna (równanie modelowe) jest równoważne nieskończonemu układowi równań momentowych, gdyż funkcja φ może być dokładnie przedstawiona za pomocą szeregu, a nie wielomianu względem prędkości molekularnej. Dlatego też wielomian może ją jedynie aproksymować.

W przepływie między równoległymi ściankami metoda momentów stosowana była zarówno dla zlinearyzowanego równania Boltzmanna (4.3) [7, 8, 9, 10, 12 i 25], jak też dla zlinearyzowanego równania BGK (4.7) [1, 14 i 16]. Różnice między pracami poszczególnych autorów polegają na wyborze różnych funkcji aproksymujących oraz sposobie obliczania momentów całki zderzeń. Rozważano momenty w całej przestrzeni prędkości [7, 8, 9 i 10] oraz w półprzestrzeniach $c_x > 0$, $c_x < 0$ [7, 8 i 9].

Główna trudność napisania w jawnej postaci równań momentowych, opierających się na zlinearyzowanym równaniu Boltzmanna, polega na obliczeniu momentów całki zderzeń (prawej strony równania (4.3)). Metody ich analitycznego wyznaczenia dla dowolnego modelu oddziaływań międzycząsteczkowych podane są w pracy [12]. Dla sztywnych kul prostszą procedurę pokazano w pracach [10 i 11]. Wyniki dotyczące sztywnych kul i molekuł Maxwella podają także w swoich pracach GROSS i ZIERING [7, 8 i 9]. Rezultaty wyliczeń w [10 i 7] nie są zgodne, przy czym autorzy [10] twierdzą, że w pracy [7] są błędy rachunkowe.

Dla równania (4.7) sytuacja jest o wiele prostsza, gdyż prawa strona ma mniej złożoną strukturę.

Dla przepływu Couette'a przyjmowano funkcje aproksymujące postaci

$$(7.2) \quad \begin{aligned} \varphi^\pm(x_1, \mathbf{c}) &= a_0^\pm(x_1) c_z \quad [1 \text{ i } 7], \\ \varphi^\pm(x_1, \mathbf{c}) &= a_0^\pm(x_1) c_z + a_1^\pm(x_1) c_z c_x \quad [8, 9, 10 \text{ i } 14]. \end{aligned}$$

Dla zagadnień wymiany ciepła przyjmowano aproksymację

$$(7.3) \quad \begin{aligned} \varphi^\pm(x_1, \mathbf{c}) &= a_0^\pm(x_1) + a_2^\pm(x_1) c^2 \quad [9]. \\ \varphi^\pm(x_1, \mathbf{c}) &= a_0^\pm(x_1) + a_1^\pm(x_1) c_x + a_2^\pm(x_1) c^2 + a_3^\pm(x_1) c_x c^2 \quad [8 \text{ i } 9]. \end{aligned}$$

Znaki \pm odpowiadają dodatniej i ujemnej składowej c_x prędkości molekularnej.

Warunki brzegowe określane były za pomocą wzoru (4.8) (przy czym dla przepływu Couette'a przyjmowano $\nu^\pm = \tau^\pm = 0$, a dla wymiany ciepła $w_1 = 0$). Dla przykładu podajemy rozwiązanie równania (4.3) w przypadku przepływu Couette'a z czysto dyfuzyjnym odbiciem na ścianie ($\alpha_r = 1$) i najprostszą aproksymacją [1]:

$$(7.4) \quad \varphi^\pm(x_1, \mathbf{c}) = a_0^\pm(x_1) c_z$$

oraz

$$(7.5) \quad \varphi^\pm \left(\mp \frac{1}{2}, c_x \geq 0 \right) = \mp c_z w_1.$$

Rozważmy momenty w całej przestrzeni, tzn. funkcji $\varphi(x, \xi)$:

$$(7.6) \quad M_{i_1 \dots i_N}^{(N)} = \int_{\mathcal{A}} f_{00} \xi_{i_1} \dots \xi_{i_N} \varphi d\xi$$

oraz liniowej całki zderzeń $J(x, \xi)$:

$$(7.7) \quad J_{i_1 \dots i_N}^{(N)} = \int_{\mathcal{A}} f_{00} \xi_{i_1} \dots \xi_{i_N} J d\xi.$$

We wzorach tych $J(x, \xi)$ oznacza prawą stronę równania (4.3), i_k mogą przyjmować wartości x, y, z oraz \mathcal{A} oznacza całą przestrzeń prędkości molekularnych.

Całkując równanie (4.3) pomnożone odpowiednio przez f_{00} , $f_{00} \xi_{i_k}$, $f_{00} \xi^2$ oraz wykorzystując własności całki zderzeń [1] otrzymujemy

$$v_x = \text{const} = 0, \quad P_{xx} = \text{const}, \quad P_{xy} = \text{const}, \quad P_{xz} = \text{const}, \quad q_x = \text{const}.$$

Podstawiając funkcję $\varphi^\pm(x_1, \mathbf{c})$, określoną wzorem (7.4), we wzory (2.4) otrzymujemy tożsamościowe spełnienie równań:

$$v_x = P_{xy} = q_x = 0, \quad P_{xx} = \text{const} = p_0$$

oraz warunek

$$(7.8) \quad \frac{1}{2} \frac{P_{xx}}{\sqrt{\pi}} (a_0^+ - a_0^-) = C_1 = P_{xz},$$

gdzie C_1 oznacza stałą oraz $p_0 = kT_0 n_0$ ciśnienie.

Widzimy, że do określenia współczynników $a_0^+(x_1)$ i $a_0^-(x_1)$ potrzebne jest jeszcze jedno równanie momentów. Może to być dowolne równanie nie spełnione tożsamościowo przez funkcję (7.4). Stosunkowo proste równanie spełniające ten warunek otrzymamy np. mnożąc (4.3) przez $f_{00} \xi_x \xi_z$ i całkując względem ξ . W tym przypadku moment całki zderzeń nie wyznacza się tak łatwo jak poprzednio, gdyż nie mamy już do czynienia z niezmiennikami zderzeń, jednakże dla maxwellowskich molekuł daje się obliczyć [1]. Otrzymujemy

$$(7.9) \quad m \frac{d}{dx} \int f_{00} \xi_x^2 \xi_z \varphi d\xi = -\frac{p_0}{\mu} P_{xz},$$

gdzie μ jest współczynnikiem lepkości; stąd

$$\int f_{00} \xi_x^2 \xi_z \varphi d\xi = -\frac{p_0}{\mu} P_{xz} x + C_2$$

lub

$$(7.10) \quad \frac{n_0 \Omega_0^3}{8} [a_0^+(x) + a_0^-(x)] = -\frac{p_0 d C_1}{\mu m} x + C_2.$$

Wprowadzając oznaczenie $\alpha_1 = p_0 d / \Omega_0 \mu$ i korzystając z warunków brzegowych $a_0^\pm(\mp 1/2) = \mp w_1$ dla wyznaczenia stałych C_1 i C_2 , otrzymujemy (w zmiennych bezwymiarowych)

$$(7.11) \quad \varphi^\pm(x_1, \mathbf{c}) = c_z w_1 \frac{2\alpha_1 x_1 \mp \sqrt{\pi}}{\alpha_1 + \sqrt{\pi}}.$$

Zauważmy jeszcze [1], że dla modelu BGK $\mu = kT_0/A$, a ponieważ $p_0 = n_0 kT_0$, więc $\alpha_1 = An_0 d/\Omega_0 = \alpha$, tzn. α_1 w liniowym równaniu Boltzmana jest tą wielkością, która odpowiada α w zlinearyzowanym równaniu BGK.

Rozkładając funkcję φ na szereg względem potęg prędkości molekularnej i stosując metodę momentów [6 i 30], znaleziono ogólną postać rozwiązania zagadnienia opisywanego zlinearyzowanym równaniem Boltzmana zarówno dla przepływu Couette'a jak i dla wymiany ciepła. W obu przypadkach współczynniki przy potęgach prędkości ξ są sumą wyrazu liniowego oraz nieskończonej ilości wyrazów wykładniczych względem x .

Podobną postać rozwiązania otrzymano [14] dla zlinearyzowanego równania BGK (5.5) opisującego przepływ Couette'a. W tym przypadku zależność od prędkości molekularnej jest jednak prostsza, gdyż φ jest szeregiem potęgowym względem składowej prędkości c_x mnożonym przez c_z :

$$(7.12) \quad \varphi^\pm = c_z \sum_{i=0}^{\infty} B_i^\pm(x) c_x^i,$$

gdzie

$$B_i^\pm(x) = E_i^\pm + D_i^\pm x + \sum_R A_i^{(k)\pm} e^{p_k x},$$

a $E_i^\pm, D_i^\pm, A_i^{(k)\pm}, p_k$ są to wielkości stałe.

W cytowanych poprzednio pracach [8, 9 i 10] rozwiązanie dla aproksymacji w postaci skończonych wielomianów (7.2) i (7.4) także ma taką postać; np. w przepływie Couette'a

$$\varphi^\pm = (A_1^\pm c_z + A_2^\pm c_x c_z) + A_3^\pm c_z x + (A_4^\pm c_z + A_5^\pm c_x c_z) e^{\beta x} + (A_6^\pm c_z + A_7^\pm c_x c_z) e^{-\beta x}$$

dla sztywnych kul [9] i molekuł maxwellowskich [8];

$$\varphi^\pm = (A_1^\pm c_z + A_2^\pm c_x c_z) + A_3^\pm c_z x + (A_4^\pm c_z + A_5^\pm c_x c_z) e^{-\beta x}$$

dla sztywnych kul [10].

Podobnie dla zagadnienia wymiany ciepła

$$\begin{aligned} \varphi^\pm = & (A_1^\pm + A_2^\pm c_x + A_3^\pm c^2 + A_4^\pm c^2 c_x) + (B_1^\pm + B_2^\pm c^2) x + \\ & + (C_1^\pm + C_2^\pm c_x + C_3^\pm c^2 + C_4^\pm c^2 c_x) e^{-\beta_1 x} + (D_1^\pm + D_2^\pm c_x + D_3^\pm c^2 + D_4^\pm c^2 c_x) e^{\beta_1 x} + \\ & + (E_1^\pm + E_2^\pm c_x + E_3^\pm c^2 + E_4^\pm c^2 c_x) e^{-\beta_2 x} + (F_1^\pm + F_2^\pm c_x + F_3^\pm c^2 + F_4^\pm c^2 c_x) e^{\beta_2 x} \end{aligned}$$

dla sztywnych kul [7] i molekuł Maxwella [8].

W rozwiązaniach tych $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, \beta_i$ są stałymi zależnymi jedynie od średniej drogi swobodnej i prawa oddziaływań międzycząsteczkowych. W poszczególnych pracach wielkości tych nie wylicza się na poziomie funkcji rozkładu, a dopiero gdy występują w jakichś wielkościach hydrodynamicznych. Do ich wyznaczenia trzeba wyliczyć numerycznie momenty całki zderzeń oraz wykorzystać warunki brzegowe. Niektóre wyniki numeryczne przytaczamy na wykresach w dalszej części pracy.

8. METODA WARIACYJNA

W przypadku gdy nie zależy nam na wyznaczeniu samej funkcji rozkładu, a tylko na znalezieniu pewnych wielkości hydrodynamicznych, ciekawe rezultaty może dać metoda wariacyjna. Zasada stosowania jej i pewne przykłady opisane są w [5]. W zagadnieniu przepływu gazu między równoległymi ściankami, opisywanego liniowym równaniem Boltzmanna, stosował ją LOYALKA [13]; dla przepływu opisywanego liniowym równaniem BGK CERCIGNANI i PAGANI [5, 18 i 19].

Zasada wariacyjna opiera się na fakcie [5], że funkcjonał określony w przestrzeni Hilberta

$$(8.1) \quad J(\tilde{h}) = (\tilde{h}, L\tilde{h}) - 2(S, \tilde{h})$$

przyjmuje wartość stacjonarną dla $\tilde{h} = h$, gdzie h spełnia równanie

$$(8.2) \quad Lh = S,$$

L jest samosprężonym operatorem w przestrzeni Hilberta z iloczynem skalarnym (f, g) .

Przy zastosowaniu tej metody w przepływie między ściankami równoległymi postępowanie jest następujące:

Zapisujemy poszukiwaną wartość hydrodynamiczną za pomocą funkcji rozkładu. Zlinearyzowane równanie Boltzmanna lub zlinearyzowane równanie modelowe sprowadzamy do postaci całkowitej tak, aby otrzymać równanie z samosprężonym operatorem liniowym w pewnej przestrzeni Hilberta. Iloczyn skalarny w tej przestrzeni określamy w taki sposób, aby poszukiwana wielkość hydrodynamiczna wyrażała się przez stacjonarną wartość funkcjonału $J(\tilde{h})$ i znane funkcje. $[J(\tilde{h})$ określamy tak samo, jak we wzorze (8.1)]. Przyjmując następnie postać funkcji próbnej \tilde{h} , zależnej od pewnej ilości stałych, znajdujemy w formie bezpośredniej wzór na funkcjonał $J(\tilde{h})$ i obliczamy jego wartość stacjonarną. Stałe występujące w funkcji próbnej wyznaczamy z warunku stacjonarności funkcjonału.

Wartość tej metody w poważnym stopniu ograniczona jest tym, że nie ma określonego sposobu znajdowania pewnych wyrażeń, w związku z czym dla każdego nowego problemu trzeba je odgadywać. Analizując zastosowanie metody wariacyjnej w naszym zagadnieniu stwierdzamy, że o ile dla zlinearyzowanego równania BGK odpowiedni operator samosprężony i iloczyn skalarny dają się dobrać dość łatwo, to dobór taki dla zlinearyzowanego równania Boltzmanna jest znacznie trudniejszy.

W cytowanych pracach [5, 13, 18 i 19] obliczano naprężenia styczne P_{xz} i strumień ciepła q_x , a przy dobieraniu odpowiedniego iloczynu skalarnego i operatora liniowego wykorzystano fakt, że w stacjonarnym przepływie wielkości P_{xz} i q_x są stałe.

Dla przykładu przytoczymy zastosowanie tej metody dla wyznaczenia naprężenia P_{xz} przy wykorzystaniu równania (5.5) z warunkami dyfuzyjnymi (6.1). Równanie (6.3) przepiszmy w nieco innej postaci

$$(8.3) \quad u_z(x_1) = \frac{w_1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ T_0 \left[\alpha \left(\frac{1}{2} - x_1 \right) \right] - T_0 \left[\alpha \left(\frac{1}{2} + x_1 \right) \right] \right\} - \\ - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-1/2}^{1/2} T_{-1} [\alpha |x_1 - s|] u_z(s) ds,$$

gdzie funkcje Abramowitza

$$(8.4) \quad T_n(x) = \int_0^{\infty} u^n e^{-u^2 - x/u} du.$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia $\zeta = x_1/\alpha$, $s_1 = s/\alpha$, to równanie (8.3) możemy napisać w postaci

$$(8.5) \quad Lu_z \equiv u_z - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} T_{-1} (|\zeta - s_1|) u_z(s_1) ds_1 = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[T_0 \left(\frac{\alpha}{2} - \zeta \right) - T_0 \left(\frac{\alpha}{2} + \zeta \right) \right],$$

gdzie L jest operatorem występującym w równaniu (8.2).

Rozważmy iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta, zdefiniowany jest następująco:

$$(8.6) \quad (F, G) = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} F(x) G(x) dx.$$

Widać, że L jest samosprężony względem tego iloczynu i można do równania (8.5) zastosować zasadę wariacyjną.

Funkcjonał

$$(8.7) \quad J(\tilde{u}_z) = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \tilde{u}_z^2(x) dx - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} T_{-1} (|x-s|) \tilde{u}_z(s) \tilde{u}_z(x) ds dx - \\ - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left[T_0 \left(\frac{\alpha}{2} - x \right) - T_0 \left(\frac{\alpha}{2} + x \right) \right] \tilde{u}_z(x) dx$$

przyjmuje dla $\tilde{u}_z = u_z$ spełniającego równanie (8.5) wartość stacjonarną J_0 . Jeżeli wypiszemy wzór na P_{xz} , to otrzymamy

$$(8.8) \quad P_{xz} = \frac{n_0 m \Omega_0^3}{\pi^{3/2}} \int c_x c_z^2 \varphi_1 e^{-c^2} dc.$$

Podstawiając φ_1 dane wzorem (6.2) i wykorzystując stałość P_{xz} w całym przepływie, otrzymujemy

$$(8.9) \quad \frac{P_{xz}}{P_{xz0}} = \frac{1}{2} + T_1(\alpha) + \frac{1}{2} \sqrt{\pi} J_0(\tilde{u}_z),$$

gdzie $P_{xz0} = -w_1 n_0 m/2 \sqrt{\pi}$ jest wartością naprężenia P_{xz} w przepływie swobodnie molekularnym. We wspomnianych wyżej pracach [5, 18 i 19] przyjmowano jako funkcje próbne wyrażenia

$$\tilde{u}_z = ax, \quad \tilde{u}_z = ax + bx^2,$$

gdzie a i b są dowolnymi stałymi. Wstawiając te funkcje do (8.7) otrzymamy $J(\tilde{u}_z)$ jako prostą funkcję a i b (np. dla $u_z = ax$ funkcję kwadratową względem a), dla której znalezienie wartości stacjonarnej jest zagadnieniem elementarnym.

9. METODA ROZWIĄZAŃ ELEMENTARNYCH

Ciekawą metodę rozwiązania równania (5.5) podał CERCIGNANI [20, 5, 21 i 22]. Dokładny jej opis wraz ze wszystkimi twierdzeniami zamieszczony jest w [5 i 22]. Metoda polega na znalezieniu zupełnego układu funkcji, będących rozwiązaniami o zmiennych rozdzielonych rozpatrywanego równania, a następnie znalezieniu współczynników superpozycji, pozwalającej otrzymać rozwiązanie spełniające dane warunki brzegowe.

Rozwiązaniami o zmiennych rozdzielonych równania (5.5) są funkcje postaci $e^{-x_1/u} g_u(c_x)$, gdzie u jest parametrem oraz

$$(9.1) \quad g_u(c_x) = \frac{u}{u - c_x} + p(u) \delta(u - c_x),$$

$$p(u) = \sqrt{\pi} \left(e^{-u^2} - 2u \int_0^u e^{t^2} dt \right).$$

Ogólne rozwiązanie równania (5.5) istnieje i jest określone wzorem

$$(9.2) \quad \varphi_1(x_1, c_x) = A_0 + A_1(x_1 - c_x) + \int_{-\infty}^{\infty} A(u) e^{-x_1/u} g_u(c_x) du,$$

gdzie A_0 i A_1 są stałymi. Całkę występującą po prawej stronie wzoru (9.2) należy rozumieć w sensie wartości głównej Cauchy'ego. Współczynniki A_0 , A_1 i $A(u)$ wyznaczone są jednoznacznie [5] przez warunki brzegowe.

Zastosowanie tej metody do zagadnienia Couette'a, tzn. do rozwiązania równania (5.5) przy warunkach (6.1), prowadzi do równania całkowego Fredholma, określającego współczynniki $A(u)$. Równanie to można rozwiązywać za pomocą zbieżnych szeregów [21].

Zarówno przy tej metodzie jak i w większości innych, dotyczących rozwiązywania zlinearyzowanego równania BGK, przyjmowano jako warunki brzegowe odbicie dyfuzyjne. W pracy [27] pokazano, że jeżeli dane są rozwiązania przy takich warunkach, to można podać analityczne wyrażenia na rozwiązania z warunkami częściowo dyfuzyjnymi i częściowo zwierciadlanymi. Oznacza to, że założenie całkowicie dyfuzyjnego odbicia od ścianki nie wprowadza istotnych ograniczeń (jeżeli pozostajemy przy warunkach Maxwella).

10. PORÓWNANIE WYNIKÓW

Przytoczony w poprzednich punktach przegląd metod stosowanych do rozwiązania zagadnienia zakończymy krótkim porównaniem wyników, otrzymanych w poszczególnych pracach. Dość obszerny przegląd, zwłaszcza dotyczący metod momentowych, przytoczony jest w pracy [26] a także w [15 i 1]. W pracach tych podane są także porównawcze wykresy i tablice. Niektóre z nich zamieszczamy poniżej.

Przy rozważaniu rozwiązań zagadnienia można porównywać zarówno samą funkcję rozkładu, jak też wielkości hydrodynamiczne, takie jak prędkość średnia na ścianie, profil prędkości w przepływie, naprężenia styczne, strumień ciepła itd.

10.1. Funkcja rozkładu

We wszystkich pracach przeprowadzano linearyzację wokół funkcji absolutnie maxwellowskiej f_{00} , tzn. przyjmowano następującą funkcję rozkładu:

$$f = f_{00} (1 + \varphi).$$

Za pomocą metody momentów znaleziono ogólną postać funkcji φ zarówno dla przepływu Couette'a jak i dla wymiany ciepła. Funkcja ta, przy ustalonej liczbie Knudsen, jest sumą zawierającą składnik zależny tylko od prędkości molekularnej, składnik liniowy względem zmiennej x i składniki, w których występuje iloczyn funkcji zależnej od prędkości molekularnej przez funkcję wykładniczą względem x , tzn.

$$(10.1) \quad \varphi^{\pm}(x_1, c_x \geq 0, c_y, c_z) = A_1^{\pm}(c) + A_2^{\pm}(c)x_1 + \sum_{n=3}^{\infty} A_n^{\pm}(c) e^{\alpha_n^{\pm} x_1},$$

gdzie α_n^{\pm} są stałymi, odwrotnie proporcjonalnymi do średniej drogi swobodnej. W dokładnym rozwiązaniu [6, 14 i 30] suma rozciąga się od $n=3$ do nieskończoności. W rozwiązaniach stosowanych do obliczeń przyjmuje się sumy skończone. W metodach momentowych wynik taki otrzymano zarówno dla zlinearyzowanego równania Boltzmanna [6 i 30], jak i dla liniowego modelu BGK [14].

Przy rozwiązywaniu zlinearyzowanego równania BGK metodą iteracji równania całkowego [15] (dla przepływu Couette'a) otrzymano:

w zerowym przybliżeniu (tzn. podstawiając $u_z=0$ swobodnie-molekularne)

$$(10.2) \quad \varphi^{\pm}(x_1, c_x \geq 0, c_y, c_z) = \mp w_1 c_z \exp \left[-\frac{\alpha}{c_x} \left(x_1 \pm \frac{1}{2} \right) \right],$$

w następnym

$$(10.3) \quad \varphi^{\pm}(x_1, c_x \geq 0, c_y, c_z) = \mp w_1 c_z \left\{ \exp \left[-\frac{\alpha}{c_x} \left(x_1 \pm \frac{1}{2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{c_x} \int_{\mp 1/2}^{x_1} \left[T_0 \left(\alpha \left(\frac{1}{2} - s \right) \right) - T_0 \left(\alpha \left(\frac{1}{2} + s \right) \right) \right] \exp \left[-\frac{\alpha}{c_x} (x_1 - s) \right] ds \right\},$$

a dla małych α aproksymując funkcje Abramowitza [15] $T_0(x) = \int_0^\infty e^{-u^2 - \frac{x}{u}} du$

$$(10.4) \quad \varphi^\pm(x_1, c_x \geq 0, c_y, c_z) = \mp w_1, c_z e^{-\frac{\alpha}{c_x}(x \pm \frac{1}{2})} + B(\alpha) \left[\left(x_1 - \frac{c_x}{\alpha} \right) - \left(\mp \frac{1}{2} - \frac{c_x}{\alpha} \right) e^{-\frac{\alpha}{c_x}(x_1 \pm \frac{1}{2})} \right],$$

gdzie $B = -1,1284\alpha \ln \alpha - 0,1948\alpha - 0,6366\alpha^2 \ln \alpha$.

Metodą rozwiązań elementarnych, dla zlinearyzowanego równania BGK [dokładniej, dla równania (5.5) przy warunkach (6.1)] otrzymano [5 i 21] następującą postać funkcji φ :

$$(10.5) \quad \varphi = c_x \left\{ A_1(c_x - x_1) + \int_{-\infty}^\infty \frac{uA(u)}{u - c_x} \exp \left[\left(-\frac{1}{2|u|} - \frac{x_1}{u} \right) \alpha \right] du + \right. \\ \left. + e^{c_x^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{ue^{-u^2}}{u - c_x} du A(c_x) \exp \left[\left(-\frac{x_1}{c_x} - \frac{1}{2|c_x|} \right) \alpha \right] \right\},$$

przy czym w wyrażeniu stojącym po prawej stronie wzoru należy wziąć główną wartość całki w sensie Cauchy'ego. $A(x)$ jest funkcją spełniającą pewne równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju.

W tym przypadku widać, że gdy $\alpha \rightarrow \infty$, co odpowiada liczbie Knudsena równej zeru, otrzymuje się liniową zależność od x . Dla metod momentowych fakt ten nie jest taki oczywisty, gdy rozpatrujemy wyższe aproksymacje.

Widzimy, że postacie funkcji φ dla poszczególnych metod są na ogół różne (wyłączając metody momentowe) i nie bardzo można je porównywać. Jediną wspólną cechą wszystkich rozwiązań jest istnienie składnika zależnego liniowo od x . Pozostałe wyrazy dają rozwiązanie w warstwie przyściennej (w odległości od brzegu rzędu średniej drogi swobodnej). Należy zauważyć jeszcze, że rozwiązanie (10.3), w odróżnieniu od (10.1) i (10.5), nie zawiera składnika liniowego względem x i pojawia się on dopiero przy aproksymacji funkcji Abramowitza T_0 dla małych α .

10.2. Wielkości hydrodynamiczne

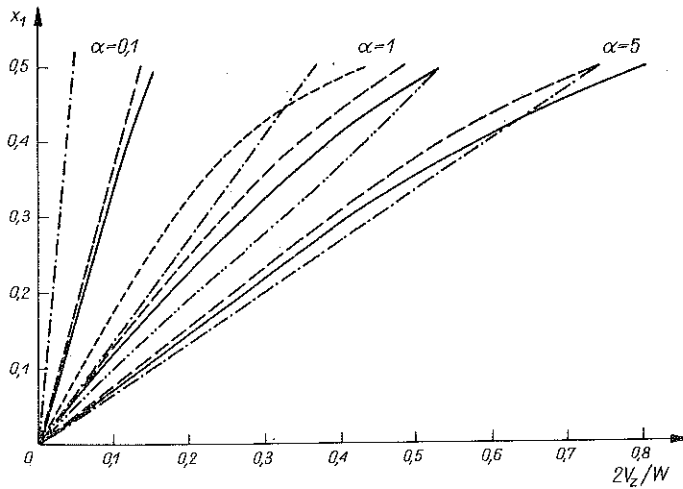
Dla porównania wyników otrzymanych różnymi metodami, dotyczących wielkości hydrodynamicznych, wygodnie jest posłużyć się obliczeniami numerycznymi, dla których można oszacować błąd. W taki sposób rozważano wyniki rozwiązań momentowych w [26]. Dla dużych liczb Knudsena otrzymano [26] numeryczne wyniki (z błędem nie przekraczającym 0,2%), wykorzystując równanie całkowe (6.3). Rozwiązanie to możemy traktować jako rozwiązanie dokładne dla małych α ($\alpha \ll 1$).

Dla małych liczb Knudsena (dużych α) jako rozwiązanie ścisłe można przyjąć rozwiązanie, w którym jedna ze ścianek odsunięta jest do nieskończoności, lub uważać, że nie wpływa ona na przepływ w pobliżu drugiej. Takie zagadnienie (przepływ Kramera) ma dokładne rozwiązanie [5] (dla modelu BGK). Wyniki poszczególnych metod możemy zatem porównywać z dokładnym rozwiązaniem.

Prędkość średnia. Porównując prędkości średnie, otrzymane różnymi metodami [26], dochodzimy do wniosku, że metody momentowe nie dają dokładnej

zależności analitycznej prędkości od położenia i liczby Knudsena, ponieważ błąd rośnie wraz ze wzrostem Kn (gdy maleje α). Związane jest to z tym, że przy aproksymacji $\varphi = a_0^\pm(x_1) c_z + a_1^\pm(x_1) c_z c_x$ otrzymuje się wymierną zależność od α , współczynnika przy zmiennej x , podczas gdy już w zerowym przybliżeniu iteracji równania całkowego zależność prędkości średniej od α ma postać $\alpha \ln \alpha$.

Dla zilustrowania powyższego, podamy wykres prędkości średniej w zależności od położenia [1 i 9].



Rys. 2

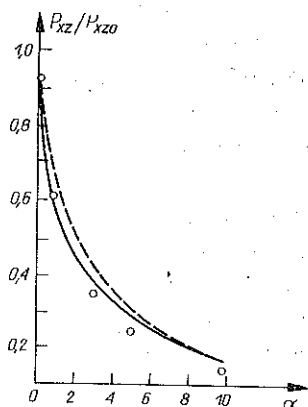
— dokładne rozwiązanie [15], — metoda momentów dla aproksymacji $\varphi = a_0^\pm(x_1) w_1 c_z$ [1] model BGK, — metoda momentów [32] model BGK, - - - - - zerowe przybliżenie w iteracji równania całkowego [15, 5] model BGK, — metoda momentów dla aproksymacji $\varphi = a_0^\pm(x_1) w_1 c_z + a_1^\pm(x_1) w_1 c_x c_z$ [9] sztywne kule

Naprężenia. Naprężenie styczne P_{xz} dla rozpatrywanego zagadnienia (przepływ Couette'a) jest wielkością niezależną od x i zmienia się jedynie ze zmianą liczby Knudsena. Różnice wyników otrzymywanych za pomocą poszczególnych metod są tu stosunkowo niewielkie. Wyniki te przytaczamy na wykresie.

Wyniki ostatnich trzech autorów różnią się bardzo mało i na wykresie różnicy tej nie można zauważyć. W związku z tym podamy je jeszcze w tablicy 1.

Tablica 1

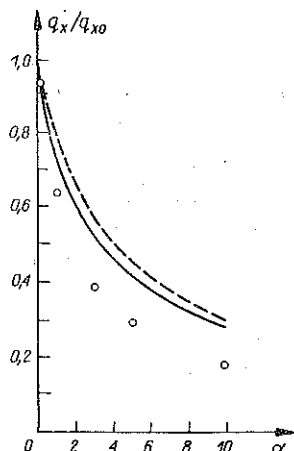
α	P_{xz}/P_{xz0}			
	Willis	Cercignani	Loyalka	
			molek. Max.	sztywne kule
0,1	0,9258	0,9258	0,9258	0,9223
1,0	0,6008	0,6008	0,6008	0,6104
3,0	0,3539	0,3537	0,3537	0,3558
5,0	0,2526	0,2524	0,2524	0,2543
10,0	0,1474	0,1474	0,1474	0,1481



Rys. 3

— metoda momentów (ZIERING [8])
molekuły Maxwella, — — — metoda mo-
mentów (WANG CHANG [6]) molekuły
Maxwella,

{ metoda iteracji równania całkowego
(WILLIS [15]), model BGK,
metoda wariacyjna (CERCIGNANI [5]),
model BGK,
metoda wariacyjna (LOYALKA [13]), mo-
lekuły Maxwella i sztywne kule



Rys. 4

— metoda momentów (Ziering [8])
molekuły Maxwella, — — — metoda mo-
mentów (WANG CHANG [31]) molekuła
Maxwella,

{ metoda wariacyjna (CERCIGNANI, BASSA-
NINI [19]), model BGK,
metoda wariacyjna (LOYALKA [13]),
molekuły Maxwella,
metoda wariacyjna (LOYALKA [13]),
sztywne kule,

q_{x0} — wartość strumienia ciepła w prze-
pływie swobodnie molekularnym

Przy metodach momentowych błąd rośnie wraz ze zmniejszaniem się (poczynając od $\alpha=2$), jednakże nie przekracza 2%.

Strumień ciepła. Obliczanie strumienia ciepła przeprowadzono w pracach [7, 8, 13, 19 i 31]. Wielkość ta jest niezależna od x , a jej zależność od liczby Knudsenowej podajemy na wykresie.

11. WNIOSKI

Metody momentowe, dla których funkcje ϕ przyjmuje się w postaci wielomianu od prędkości molekularnej, dają na ogół zgodne wyniki. Wyjątek stanowi aproksymacja Leesa, który przyjmuje, że funkcja rozkładu w pewnych obszarach (konkretnie w półprzestrzeniach $c_x > 0$ i $c_x < 0$) ma postać funkcji lokalnie maxwellowskiej. Błąd dochodzi tu do 25% [15]. Metody te zwłaszcza dla małych liczb Knudsenowej dają również dość dobrą zgodność z wynikami innych metod. Jednakże nie pozwalają one bezpośrednio oszacować błędów i dlatego wymagają zawsze sprawdzenia za pomocą innych metod lub porównywania wyników z wynikami otrzymanymi w sposób numeryczny metodami pozwalającymi określić błąd.

W metodach iteracyjnych zbyt mało uwagi poświęca się wyjaśnieniu możliwości stosowania pewnych operacji matematycznych, np. w równaniu (6.3) występuje funkcja Abramowitza $T_{-1}(x)$, która jest formalnie zdefiniowana przez rozbieżne całki. Co prawda funkcja ta występuje pod znakiem całki i jeżeli zastosujemy ogólny wzór na różniczkowanie (całkowanie) funkcji Abramowitza, to otrzymamy funkcję $T_0(x)$, która już jest zdefiniowana za pomocą zbieżnych całek. Ten fakt nie jest jednak nigdzie wyjaśniony.

Przepływ między ściankami równoległymi służył wielu autorom do sprawdzenia nowych metod rozwiązywania równania Boltzmanna czy równań modelowych. Żadna metoda nie daje jednak pełnego rozwiązania problemu. Znalaziono ogólną postać rozwiązania, jednak nie można podać analitycznych wzorów na wszystkie występujące tam funkcje i w konkretnych zagadnieniach brzegowych trzeba ograniczać się do rozwiązań przybliżonych.

Zagadnienie przepływu między równoległymi ściankami nie jest tylko zagadnieniem samym w sobie, chociaż można uważać je za bardzo wyidealizowany model niektórych spotykanych w przyrodzie ruchów gazów. Przede wszystkim służy jednak do ilustrowania różnych metod rozwiązywania równania Boltzmanna i równań modelowych oraz możliwości stosowania ich w zagadnieniach bardziej złożonych. Dlatego też dopóki nie będziemy znali pełnego analitycznego rozwiązania, nie można uważać, że jest ono rozwiązane. Przybliżone numeryczne rozwiązania nie pozwalają bowiem wyjaśnić wszystkich osobliwości, jakie mogą tu występować i nie dają wskazówek jak można rozwiązywać problemy bardziej złożone np. niestacjonarne.

Autor pragnie podziękować Panu Prof. dr W. FISZDONOWI oraz Panu dr J. LUBOŃSKIEMU za wnikliwe rozpatrzenie tej pracy i cenne uwagi.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. H. КОГАН, *Динамика разреженного газа*, Наука, Москва 1967.
2. J. P. GUIRAUD, *Sur le problème de Couette et l'équation de Boltzmann*, Journal Mécanique, 7, 2, 171-203, 1968.
3. YOSHIZAWA YOSCHIMASA, *A Monte Carlo calculation of unsteady rarefied gas flow between parallel plates*, Rarefied Gas Dynamics, 1, 177-180, 1969, New York-London.
4. KOURA-KAT-SUHISA, KONDO JIRO, *Solutions of unsteady nonlinear molecular problems by the Monte Carlo method*, Rarefied Gas Dynamics, New York-London, 1, 181-184, 1969.
5. C. CERCIGNANI, *Mathematical methods in kinetic theory*, MacMillan, London 1969.
6. C. S. WANG CHANG, G. E. UHLENBECK, *Couette flow between parallel plates*, University of Michigan Engineering Research Institute Project, Report 1999-I-T, 1954.
7. E. P. GROSS, S. ZIERING, *Heat flow between parallel plates*, Phys. of Fluids, 2, 6, 701-712, 1959.
8. S. ZIERING, *Shear and heat flow for Maxwellian molecules*, Phys. of Fluids, 3, 4, 503-509, 1960.
9. E. P. GROSS, S. ZIERING, *Kinetic theory of linear shear flow*, Phys. of Fluids, 1, 3, 215-224, 1958.
10. М. Н. ИВЧЕНКО, Ю. И. ЯЛАМОВ, *Кинематическая теория течения газа находящегося над твердой стенкой в поле градиента скорости*, Изв. АН СССР, Механика Жидкости и Газа, 6, 139-143, 1968.

11. Б. В. Дерягин, И. Н. Ивченко, Ю. И. Яламов, *О построении решений кинетического уравнения Бойдмана в слое Кнудсена*, Изв. АН СССР, Механика жидкости и Газа, 4, 167-172, 1968.
12. C. S. WANG CHANG, G. E. UHLENBECK, *Transport phenomena in very dilute gases*, VMH-3-F University of Michigan, 1949.
13. S. K. LOYALKA, *Linearized Couette flow and heat transfer between two parallel plates*, Rarefied Gas Dynamics, 1, 195-203, 1969.
14. E. P. GROSS, E. A. JACKSON, S. ZIERING, *Boundary value problems in elastic theory of gases*, Annals of Physics, 1, 2, 141-167, 1957.
15. D. R. WILLIS, *Theoretical solutions to some nearly free molekular problems*, Rarefied Gas Dynamics, 246-257, London-Oxford-New York-Paris 1960.
16. P. L. BHATNAGAR, *Heat transfer in plane Couette flow of a rarefied gas using Bhatnagar-Gross-Krook model*, Phys. of Fluids, 12, 4, 938-940, 1969.
17. Е. М. Шахов, *О приближенных кинетических уравнениях в теории разреженных газов*, Изв. АН СССР, Механика жидкости и Газа, 1, 156-161, 1968.
18. C. CERCIGNANI, C. D. PAGANI, *Variational approach to boundary-value problems in kinetic theory*, Physics of Fluids, 9, 6, 1167-1173, 1966.
19. P. BASSANINI, C. CERCIGNANI, C. D. PAGANI, *Comparison of kinetic theory analyses of linearized heat transfer between parallel plates*, Internat. Heat. and Mass. Transfer, 10, 4, 447-460, 1967.
20. C. CERCIGNANI, *The Kramers problem for a not completely diffusing wall*, J. Math. Anal. Appl., 10, 3, 568-586, 1965.
21. C. CERCIGNANI, *Plane Couette flow according to the method of elementar solutions*, J. Math. Anal. Appl., 11, 1-3, 93-101, 1965.
22. C. CERCIGNANI, *Elementary solutions of the linearized gas dynamics Boltzmann equation and their application to the slip-flow problem*, Annals Physics, 20, 219-233, 1962.
23. A. LEONARD, T. W. MULLIKIN, *An application of singular integral equation theory to a linearized problem in Couette flow*, Annals Physics, 30, 235-248, 1964.
24. P. WELANDER, *On the temperature jump in a rarefied gas*, Arkiv för Fysik, 7, 6, 507-553, 1953.
25. L. LEES, GALCIT Hypersonics R. M., 5J, 1959.
26. D. R. WILLIS, *Comparison of kinetic theory analyses of linearized Couette flow*, Phys. of Fluids, 5, 2, 127-135, 1962.
27. C. CERCIGNANI, C. D. PAGANI, *Rarefied flows in presence of fractionally accomodating walls*, Rarefied Gas Dynamics, 1, 269-279, New York-London 1969.
28. D. R. WILLIS, *Heat transfer in a rarefied gas between parallel plates at large temperature ratios*, Rarefied Gas Dynamics, 1, 209-225, New York-London 1963.
29. C. LIU, L. LEES, *Kinetic theory description of plane compressible Couette flow*, Rarefied Gas Dynamics, 391-428, New York-London 1961.
30. H. M. MOTT-SMITH, *A new approach in the kinetic theory of gases*, Massachusetts Institute of Technology Lincoln Laboratory, Group Report V-2, 1954.
31. C. S. WANG CHANG, G. E. UHLENBECK, *Heat transfer between parallel plates*, University of Michigan Project, Report M999, 1953.
32. S. F. SHEN, *A general transfer-equation approach for the transition regime of rarefied-gas flows and some of its applications*, Rarefied Gas Dynamics, 2, 112-131, New York-London 1963.
33. J. P. GUIRAUD, *Sur le problème de Couette linearisé en théorie cinétique des gaz*, G.R. Acad. Sci., 260, 23, 6030-6032, 1965.
34. A. B. HUANG, D. P. GIDDENS, *Some analytical solutions of the linearized Boltzmann equation for ellipsoidal model*, Phys. of Fluids, 14, 2, 294-297, 1971.

Резюме

ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

В работе дан обзор методов решения задачи о течении разреженного газа между бесконечными параллельными стенками. Рассмотрен линейный стационарный случай. Задача описана линеаризованным уравнением Больцманна и линеаризованной моделью ВГК с крайними условиями типа Максвелла. В ходе линеаризации уравнений особое внимание обращено на математическое обоснование производимых упрощений. Показано, что линеаризация уравнения ВГК является математически необоснованной. Отдельно рассматривались случаи, когда температуры стенок одинаковы (течение Куэтта), и когда стенки неподвижны (теплообмен), что связано с линейностью уравнений.

Кроме общего описания, для всех рассматриваемых методов даны в качестве иллюстраций простые примеры применений к данной задаче. В заключение дается сравнение результатов, полученных различными авторами, причем отмечается тот факт, что ни один из рассмотренных методов не дает полного аналитического решения задачи.

SUMMARY

RAREFIED GAS FLOW BETWEEN PARALLEL WALLS

The paper presents a review of methods applied to solving the problems of rarefied gas flows between infinite parallel walls. The linear and stationary case is considered. The problem is described by means of the linearized Boltzmann equations and the linearized BGK model with Maxwell boundary conditions. In the procedure of the linearization, particular attention is paid to mathematical correctness of the method; it is demonstrated that the linearization of the BGK equation is mathematically incorrect. Owing to the linearity of equations, the case in which the walls are kept at the same temperature (Couette flow) and the case when the walls are immobile (heat exchange) are considered separately. All the methods described are illustrated by simple examples. Finally, results obtained by individual authors are compared and it is shown that none of the methods leads to a complete analytic solution of the problem.

UNIWERSYTET WARSZAWSKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 listopada 1972 r.