

## OBLICZANIE POZAKRYTYCZNYCH UGIĘĆ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH PŁYT KOŁOWYCH

ZENON W A S Z C Z Y S Z Y N (KRAKÓW)

### 1. UWAGI WSTĘPNE, ZAŁOŻENIA I OZNACZENIA

Analiza pozakrytycznego odkształcania się konstrukcji wymaga uwzględnienia nieliniowości geometrycznych (tzn. pominięcia zasady zeszywnienia), a w przypadku użycia materiałów o własnościach sprężysto-plastycznych — również nieliniowości fizykalnych. Łączne ujęcie tych dwóch typów nieliniowości znacznie komplikuje matematyczny opis zjawiska, co znajduje swoje odbicie w stosunkowo małej liczbie prac poświęconych tym zagadnieniom [10].

W przypadku płyt kołowych, poddanych działaniu równomiernie rozłożonego ciśnienia radialnego, trudności matematyczne można częściowo obejść przez ograniczenie rozważań do modelu idealnie sztywno-plastycznego materiału. Takie podejście zastosował A. N. SHERBOURNE [9] w odniesieniu do płyt pełnościennych, a J. R. LEPIK [5] do płyt sandwichowych. Rozważania prowadzone w tych pracach wymagały założenia rozkładu pola prędkości przemieszczeń bądź profili naprężeń, co wpływa na postać rozwiązań. Taka analiza potwierdziła efekt tworzenia się warstwy brzegowej, znanej z obliczania płyt sprężystych (por. [2]). Nie można było jednak wyznaczyć strefy naprężeń rozciągających w obszarze środkowym, występującym w płytach sprężystych przy odpowiednio dużych ugięciach. Naprężenia te można wyznaczyć dopiero po uwzględnieniu sprężystej części odkształceń [4].

W pracy tej podamy metodę obliczania pozakrytycznych ugięć płyt kołowych przy założeniach ogólniejszych, niż były stosowane w dotychczasowych opracowaniach. Zajmiemy się mianowicie płytą wykonaną z materiału wstępnie izotropowego, sprężysto-plastycznego o liniowym kinematyczno-izotropowym wzmocnieniu. Do obliczeń użyjemy równań wyprowadzonych w pracy [10] dla obliczania dużych ugięć powłok obrotowo-symetrycznych, ograniczając rozważania do idealnej płyty sandwichowej (w szczególności odnosi się do niej hipoteza Kirchhoffa odcinka normalnego) o stałej grubości. Na płytę działa jedynie ciśnienie radialne równomiernie wzdłuż konturu zewnętrznego.

Do rozwiązania problemu początkowo-brzegowego, opisanego podstawowym układem równań, użyjemy zmodyfikowanego algorytmu z pracy [11]. Został on tam opracowany dla metody półdwrotnej bezpośredniego całkowania, stosowanej z powodzeniem do wielu zagadnień mechaniki konstrukcji (przegląd odpowiednich prac można znaleźć w [10]).

W pracy wykorzystamy ułatwienia wynikające z przyjęcia przekroju sandwiczowego; w porównaniu z pracą [11] podamy bardziej precyzyjne ujęcie lokalnych odciążeń a w «Dodatku» szczegółowe omówienie problemów obliczeniowych, związanych z odwracaniem związków fizycznych. Dalsze usprawnienie polega na obniżeniu rzędu dwupunktowego zagadnienia brzegowego, możliwe w rozpatrywanym przypadku pozakrytycznych ugięć.

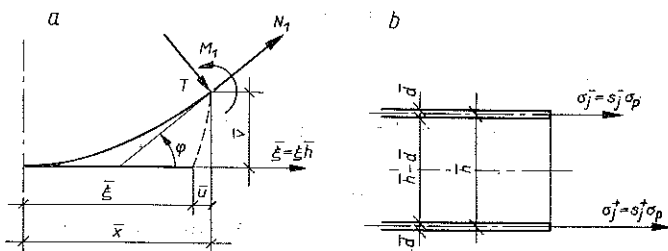
Będziemy posługiwali się określeniem procesu aktywnego lub biernego w ustalonym punkcie płyty (jeśli powstają w tym punkcie przyrosty odkształceń plastycznych, to ma miejsce proces aktywny) w odróżnieniu od obciążenia i odciążenia, które to terminy będziemy łączyli ze zmianą parametru obciążenia zewnętrznego płyty.

Wszystkie równania napiszemy od razu w postaci bezwymiarowej. Indeksy  $j=1, 2$  użyjemy odpowiednio dla oznaczenia kierunków: promieniowego i obwodowego; powtarzający się wskaźnik będzie oznaczał sumowanie. Poniżej zestawiono główne oznaczenia zastosowane w pracy

- $a_j$  współrzędne środka krzywej granicznej  $F$  warunku plastyczności,
- $A$  współczynnik liniowego wzmocnienia izotropowego,
- $c$  współczynnik liniowego wzmocnienia kinematycznego,
- $\bar{d}$  grubość warstwy w przekroju sandwiczowym,
- $E_{jk}$  macierz sztywności w związkach fizycznych,
- $\varepsilon_p, \sigma_p$  odkształcenie i naprężenie na granicy plastyczności,
- $e_j = \varepsilon_j / \varepsilon_p, s_j = \sigma_j / \sigma_p$  względne odkształcenia i bezwymiarowe naprężenia wzdłuż kierunków głównych,
- $\bar{\varepsilon}_p$  parametr Odqvista,
- $\vartheta_j, k_j$  uogólnione odkształcenia powierzchni środkowej,
- $\varphi$  kąt nachylenia normalnej po odkształceniu płyty,
- $\bar{h}$  grubość płyty,
- $p = P / \sigma_p$  intensywność obciążenia zewnętrznego
- $n_j = N_j / 2d\sigma_p, m_j =$   
 $= M_j / d\bar{h}\sigma_p, t = T / 2d\sigma_p$  — odpowiednio siły podłużne, momenty zginające i siła poprzeczna,
- $\nu$  współczynnik Poissona,
- $s_j^0 = s_j - a_j$  względne naprężenia,
- $\bar{s}_j^0$  część dewiatorowa względnych naprężeń,
- $s_i$  intensywność naprężeń
- $\tau$  parametr umownego czasu teorii plastyczności,
- $\tau_*, s_j^*, e_j^*, a_j^*, \bar{\varepsilon}_p^*$  bezwymiarowe wielkości zachowywane dla poprzedniego czasu  $\tau_* = \tau_{n-1}$ ,
- $u = \bar{u} / \bar{h}, v = \bar{v} / \bar{h}$  bezwymiarowe składowe wektora przemieszczenia powierzchni środkowej,
- $\xi = \bar{\xi} / \bar{h}, x = \bar{x} / \bar{h}$  promień koła równoleżnikowego przed i po odkształceniu płyty,
- $\{X\}, \{Y\}$  wektory wierszowe swobodnych wartości początkowych warunków brzegowych,
- $(\cdot)' = \partial / \partial \xi$  pochodne geometryczne,
- $(\cdot) = \partial / \partial \tau$  pochodne względem czasu.

## 2. PODSTAWOWE RÓWNANIA

Posłużymy się równaniami, które zostały wyprowadzone dla powłok obrotowo-symetrycznych we wcześniejszych pracach [10 i 11]. Równania te dostosujemy jedynie do rozważanego problemu stanu pozakrytycznego płyty kołowej.



Rys. 1

Jako zmienną niezależną przyjmijmy współrzędną materialną  $\xi$ , odmierzaną od środka płyty (rys. 1a). Hipotezę odcinka normalnego rozciągniemy na cały przekrój płyty, dzięki czemu odkształcenia w warstwach nośnych

$$(2.1) \quad e_j^\pm = \vartheta_j \pm \frac{1}{2} k_j, \quad j=1, 2$$

można wyrazić przez uogólnione odkształcenia powierzchni środkowej:

$$(2.2) \quad \vartheta_1 = \frac{1}{\varepsilon_p} (l' - 1) = \frac{1}{\varepsilon_p} \left( \frac{1+u'}{\cos \varphi} - 1 \right), \quad k_1 = \frac{1}{\varepsilon_p} \varphi',$$

$$\vartheta_2 = \frac{1}{\varepsilon_p} \frac{u}{\xi}, \quad k_2 = \frac{1}{\varepsilon_p} \frac{\sin \varphi}{\xi}.$$

Równania równowagi napiszemy dla nieobciążonej powierzchni środkowej:

$$(2.3) \quad (n_1 x)' = n_2 l' \sin \varphi - (tx)',$$

$$(m_1 x)' = (m_2 \cos \varphi + 2tx)l', \quad t = n_1 \operatorname{tg} \varphi,$$

gdzie, zgodnie z (2.2)<sub>1</sub>, użyto wielkości  $l' = 1 + \varepsilon_p \vartheta_1$ .

Uogólnione siły wewnętrzne wyrazimy przez naprężenia w dolnej i górnej półce (rys. 1b):

$$(2.4) \quad n_j = \frac{1}{2} (s_j^+ + s_j^-), \quad m_j = \frac{1}{2} (s_j^+ - s_j^-).$$

Związki fizyczne teorii płynięcia plastycznego napiszemy w postaci przyrostowej [10]:

$$(2.5) \quad ds_j = E_{jk} de_k, \quad j, k=1, 2,$$

gdzie elementy macierzy  $E_{jk}$  zależą od typu procesu:

a) proces aktywny,  $ds_i \geq 0$

$$(2.6) \quad E_{11} = \frac{1}{M} (\bar{s}_2^{\circ 2} + B), \quad E_{12} = E_{21} = \frac{1}{M} (-\bar{s}_1^{\circ} \bar{s}_2^{\circ} + \nu B), \quad E_{22} = \frac{1}{M} (\bar{s}_1^{\circ 2} + B),$$

$$M = \bar{s}_1^{\circ 2} + 2\nu \bar{s}_2^{\circ} \bar{s}_2^{\circ} + \bar{s}_2^{\circ 2} + (1 - \nu^2) B, \quad B = \frac{2}{3} \left( c + \frac{2}{3} A \right) f^2;$$

b) proces bierny,  $ds_i < 0$

$$(2.6') \quad E_{11} = E_{22} = \frac{1}{1 - \nu^2}, \quad E_{12} = E_{21} = \frac{\nu}{1 - \nu^2}.$$

We wzorach dla procesu aktywnego (2.6) podano wartość współczynnika  $B$  dla przypadku liniowego wzmocnienia, gdy chwilowy ruch środka powierzchni plastyczności (krzywej granicznej  $F$ ) jest opisany prawem Zieglera:

$$(2.7) \quad da_j = c (de_1^p + de_2^p + de_j^p),$$

a krzywa graniczna może rozszerzać się:

$$(2.8) \quad s_i^2 \equiv \bar{s}_1^{\circ 2} - \bar{s}_1^{\circ} \bar{s}_2^{\circ} + \bar{s}_2^{\circ 2} = f^2, \quad f = 1 + A \bar{e}_p.$$

Tak więc wzory (2.6) opisują liniowe kinematyczno-izotropowe wzmocnienie, gdzie  $c$  jest współczynnikiem kinematycznego, a  $A$  współczynnikiem izotropowego wzmocnienia. Wzmocnienie izotropowe zależy od parametru Odqvista  $\bar{e}_p$ :

$$(2.9) \quad \bar{e}_p = \int_{e_j} d\bar{e}_p, \quad d\bar{e}_p = \frac{2}{\sqrt{3}} [(de_1^p)^2 + de_1^p de_2^p + (de_2^p)^2]^{1/2}$$

$$de_j^p = de_j - ds_j + \nu (ds_1 + ds_2 - ds_j).$$

Podobnie jak w [11], ze względu na proponowaną metodę rozwiązywania, podstawowy układ równań jest wygodnie napisać w postaci quasi-liniowej:

$$(2.10) \quad u' = l' \cos \varphi - 1, \quad v' = l' \sin \varphi, \quad \varphi' = \varepsilon_p k_1,$$

$$n_1' = (n_2 - n_1) \frac{l'}{x} \cos \varphi - n_1 \varphi' \operatorname{tg} \varphi,$$

$$m_1' = (m_2 - m_1) \frac{l'}{x} \cos \varphi + 2n_1 l' \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\dot{n}_j = \frac{1}{2} (\dot{s}_j^+ + \dot{s}_j^-), \quad \dot{m}_j = \frac{1}{2} (\dot{s}_j^+ - \dot{s}_j^-),$$

$$s_j^{\pm} = E_{jk} \dot{e}_k^{\pm}, \quad \dot{e}_j^{\pm} = \dot{s}_j \pm \frac{1}{2} \dot{k}_j,$$

gdzie

$$(2.11) \quad l' = 1 + \varepsilon_p \vartheta_1, \quad x = u + \zeta,$$

a  $\vartheta_2$  i  $k_2$  są określone wzorami (2.2)<sub>2</sub>. Zmiennymi niezależnymi w podanym układzie równań będą współrzędne typu Lagrange'a: geometryczna  $\zeta$  i czasowa  $\tau$ .

## 3. ROZWIĄZYWANIE PODSTAWOWEGO UKŁADU RÓWNAŃ

Obok geometrycznej zmiennej niezależnej  $\xi$  przyjęto drugą zmienną  $\tau$ , którą będziemy nazywali umownym czasem teorii plastyczności. Jako taką zmienną przyjmujemy dowolny, monotoniczny rosnący parametr występujący w równaniach (2.10). Jako  $\tau$  możemy przyjmować zarówno wielkości statyczne (np. siły wewnętrzne w środku płyty), jak też kinematyczne (np. wybrane uogólnione odkształcenie w ustalonym punkcie płyty).

Podstawowy układ równań (2.10) jest silnie nieliniowy i rozwiązać go można numerycznie metodą półodwrotną, stosowaną w poprzednich pracach [10 i 11]. Metoda ta wykorzystuje rozprężenie układu (2.10) względem pochodnych geometrycznych i czasowych. Można mianowicie rozwiązywać zadanie brzegowe, opisane pierwszymi pięcioma równaniami (2.10), dla ustalonych wartości  $\tau = \tau_n$ , przy czym wielkości występujące po prawej stronie tych równań obliczymy z pozostałych równań (2.10). Pochodne czasowe zastępujemy różnicami wstecz, licząc je na podstawie wartości zachowywanych w pamięci maszyny dla  $\tau_* = \tau_{n-1}$ . Taki tok postępowania wymaga znajomości stanu początkowego, tj. wpisania do pamięci odpowiednich wartości, które są rozwiązaniem zadania brzegowego dla  $\tau = \tau_0$ .

Zadanie brzegowe będziemy rozwiązywali metodą półodwrotną, zamieniając je na zadanie z warunkami początkowymi. Spełnimy wszystkie warunki brzegowe na jednym brzegu, od którego rozpoczynamy całkowanie, dobierając iteracyjnie swobodne warunki początkowe tak, aby były spełnione wszystkie warunki brzegowe w punkcie końcowym całkowania.

Jeśli wielkości występujące w pierwszych pięciu równaniach (2.10) napiszemy w postaci wektora

$$(3.1) \quad \{y\} = \{u, v, \varphi, n_1, m_1\},$$

to będziemy rozwiązywali następujące zadanie początkowe:

$$(3.2) \quad \{y\}' = \{f\}, \quad \{y\}_0 = \{0, 0, 0, n_1, m_1\}_0,$$

gdzie  $\{f\}$  jest prawą stroną odpowiednich równań (2.10), a  $\{y\}_0$  wektorem wartości początkowych.

Rozwiązywane zadanie będzie dwupunktowe typu 3+2 (niesymetria wynika ze scałkowania odpowiedniego równania na  $t'$ , przy czym wzór (2.3)<sub>3</sub>,  $t = n_1 \operatorname{tg} \varphi$ , odnosi się do przypadku niepodparcia środka płyty). W punkcie początkowym  $\xi_0$  spełniono warunki brzegowe  $u_0 = v_0 = \varphi_0 = 0$ , a wartości  $n_{10}$  i  $m_{10}$  należy tak dobrać, aby spełnić warunki brzegowe w punkcie  $\xi_L$ :

a) swobodne podparcie

$$(3.3) \quad \{Y\} = \{n_1 / \cos \varphi_L = -p, m_1 = 0\}_L;$$

b) utwierdzenie

$$(3.3') \quad \{Y\} = \{\varphi = 0, n_1 = -p\}_L.$$

Dobór swobodnych wartości początkowych jest równoważny rozwiązaniu równania

$$(3.4) \quad \{X\} [Nc] = \{Y\}, \quad \text{gdzie} \quad \{X\} = \{n_1, m_1\}_0,$$

które, wobec nieznaney macierzy  $Ne$  (macierz ta ma w (3.4) przedstawiać procedurę numerycznego całkowania) można rozwiązać iteracyjnie, korzystając z algorytmu opracowanego w [10].

W naszym przypadku można rozwiązywanie problemu jeszcze dalej uprościć przez sprowadzenie zadania brzegowego do typu 1+1. Można mianowicie jeden z elementów wektora  $\{X\}$  przyjąć jako umowny czas i zmieniać tylko wartość drugiego. Spełniać będziemy tylko jeden warunek dla  $\xi_L$ : odpowiednio  $m_{1L}=0$  lub  $\varphi_L=0$ , a wartość siły  $p=-n_{1L}/\cos \varphi_L$  będziemy nanosili na odpowiednich wykresach. Taka parametryzacja znacznie upraszcza zadanie, gdyż w sposób istotny obniża czas obliczeń na komputerze.

Posługiwanie się przyrostowymi związkami teorii płynięcia plastycznego oraz uwzględnienie historii procesu wymaga posługiwania się pamięcią maszyny. Jeśli bieżący czas oznaczymy przez  $\tau=\tau_n$ , to w pamięci maszyny dla  $\tau_{n-1}=\tau_*$  będziemy zapamiętywali po siedem wartości dla każdej z wartw:  $s_j^*$ ,  $e_j^*$ ,  $a_j^*$ ,  $\bar{e}_p^*$ , gdzie  $j=1, 2$ . W ten sposób dla przyrostu umownego czasu

$$(3.5) \quad \Delta\tau = \tau_n - \tau_{n-1} = \tau_n - \tau_*$$

będziemy mogli obliczyć przyrosty potrzebnych wielkości:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \Delta s_j &= s_j(\tau_n) - s_j(\tau_*) = s_j - s_j^*, & \Delta e_j &= e_j - e_j^*, \\ \Delta a_j &= a_j - a_j^*, & \Delta \bar{e}_p &= \bar{e}_p - \bar{e}_p^*, & \Delta s_j &= s_j - s_j^* \text{ itd.} \end{aligned}$$

W (3.6) i w dalszym ciągu wszystkie wielkości odnoszące się do poprzedniego czasu  $\tau_* = \tau_{n-1}$  będą oznaczone gwiazdką, a bez tego indeksu dla czasu bieżącego  $\tau = \tau_n$ .

Równanie (3.2) będziemy całkowali numerycznie, przy czym dzięki wzorom (3.6) można łatwo przechodzić od wielkości skończonych do przyrostów i odwrotnie. Jeśli w wyniku rozwiązania znajdujemy się w punkcie  $\xi_i$ , to znając składowe wektora  $\{y\}_i$  nie potrafimy jeszcze obliczyć jego pochodnej  $\{y\}'_i$ , gdyż w wektorze prawych stron  $\{f\}$  znajdują się wielkości  $\vartheta_1, k_1, n_2, m_2$ . Obliczymy je ze związków przyrostowych, przy czym będzie zachodziła konieczność odwracania związków fizycznych. Jeśli mianowicie znamy  $\vartheta_2 = u/\xi$ ,  $k_2 = \sin \varphi/\xi$ ,  $n_1, m_1$ , to można policzyć ich przyrosty według (3.6), a następnie przyrosty naprężeń i odkształceń w oddzielnych warstwach

$$(3.7) \quad \Delta e_2^\pm = \Delta \vartheta_2 \pm \frac{1}{2} \Delta k_2, \quad \Delta s_1^\pm = \Delta n_1 \pm \Delta m_1.$$

Teraz można skorzystać z algorytmu podanego w «Dodatku» i kolejno obliczyć  $\Delta e_1^+$  i  $\Delta e_1^-$ , a następnie  $\Delta s_2^+$  i  $\Delta s_2^-$ . Korzystając z pamięci maszyny obliczamy

$$(3.8) \quad e_1^r = e_{1*}^r + \Delta e_1^r, \quad s_2^r = s_{2*}^r + \Delta s_2^r, \quad r = \pm,$$

a następnie ze wzorów (2.1) i (2.4) obliczamy potrzebne wartości  $\vartheta_1, k_1, n_2, m_2$ .

Jeśli po dojściu do  $\xi_L$  jest spełniony warunek brzegowy  $m_{1L}=0$  (lub  $\varphi_L=0$ ) to powtarzamy obliczenia drukując potrzebne wyniki i poprawiając pamięć. Pamięć

poprawiamy przez dodanie przyrostów, które odpowiadają czasowi  $\tau_n$ . Jak podaliśmy w «Dodatku» wartości  $a_j^*$  i  $\bar{e}_p^*$  poprawiamy dla  $\Delta s_i > 0$ , gdzie

$$(3.9) \quad \Delta s_i = s_i - f_*, \quad s_i = (s_1^{\circ 2} - s_1^{\circ} s_2^{\circ} + s_2^{\circ 2})^{1/2}.$$

Jeśli w rozpatrywanej warstwie zachodzi proces bierny, tzn.  $\Delta s_i < 0$ , to wartości  $a_j^*$  i  $\bar{e}_p^*$  pozostają bez zmiany.

Przy przechodzeniu od czasu  $\tau_n$  do nowego  $\tau_{n+1} = \tau_n + \Delta\tau$  pierwsze przybliżenie swobodnej wartości początkowej może być obliczone według wzoru ekstrapolacyjnego

$$(3.10) \quad ({}_0)X_{n+1} = 3(X_n - X_{n-1}) + X_{n-2}.$$

Obliczona wartość  $({}_0)X_{n+1}$  jest następnie poprawiana iteracyjnie, np. przy użyciu metody siecznych, aż do spełnienia warunku brzegowego z żądaną dokładnością.

#### 4. POZAKRYTYCZNE UGIĘCIA PŁYTY SWOBODNIE OPARTEJ

W celu weryfikacji proponowanej metody wykonano obliczenia numeryczne płyty swobodnie podpartej. Przyjęto, że materiał płyty jest ściśliwy, sprężysto-plastyczny o liniowym wzmocnieniu kinematycznym. Do obliczeń przyjęto następujące dane:

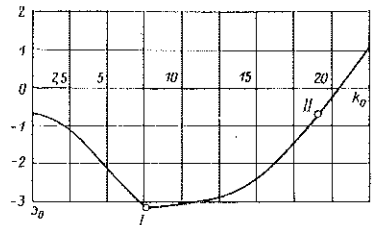
$$\varepsilon_p = 0,001, \quad \nu = 0,3, \quad A = 0, \quad c = 0,006667.$$

Bezwymiarowy promień nieodkształconej płyty wynosi  $\xi_L = 15$ , co oznacza, że jest on 15-krotnie większy od stałej grubości  $\bar{h}$ .

Obliczenia wykonano na EMC „Odra 1013”, stosując metodę Rungego-Kutty do numerycznego całkowania układu równań (2.10). Całkowanie rozpoczynano od środka płyty, tj. od  $\xi_0 = 0$ . Krok całkowania zagęszczono w okolicy punktów  $\xi_0$  i  $\xi_L$ ; przy  $\Delta\xi = 1$  przyjęto:  $4 \times \Delta\xi/4$ ,  $2 \times \Delta\xi/2$ ,  $10 \times \Delta\xi$ ,  $4 \times \Delta\xi/2$ . Aby uniknąć osobliwości w punkcie  $\xi_0$  przy liczeniu pochodnych  $n_1$  i  $m_1$  przyjęto w pierwszym kroku wzorów Rungego-Kutty  $k_1 n_1 = k_1$ ,  $m_1 = 0$ . Jako umowny czas i swobodną wartość początkową przyjęto uogólnione odkształcenia w środku płyty:  $\tau = k_0 = k_{10} = k_{20}$ ,  $X = \vartheta_0 = \vartheta_{10} = \vartheta_{20}$ .

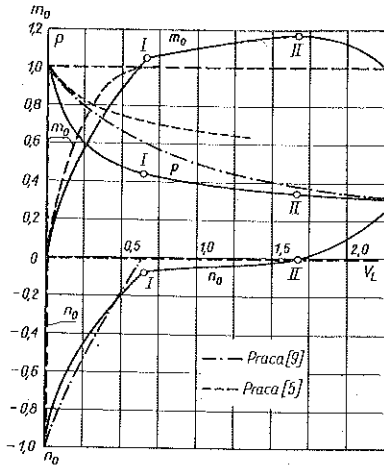
Początkowy czas  $k_0 = 0$  przyjęto dla obciążenia  $p = 1$ , gdy płyta ulega wyboczeniu. Obliczenia doprowadzono do  $\tau_N = 23.50$  (powstaje wtedy ugięcie środka płyty  $v_L = 2,340$ ), ponieważ proces iteracyjnego spełniania warunków brzegowych przestał być zbieżny. Mogło to powstać w wyniku zbyt dużego kroku całkowania, który jednak nie mógł być zmieniony w czasie obliczeń ze względu na ciągłe odwoływanie się do odpowiednich wartości zachowywanych w pamięci komputera.

Na rys. 2 pokazano zależność pomiędzy  $k_0$  i  $\vartheta_0$ , wyznaczoną numerycznie jako rozwiązanie równania (3.4) dla problemu brzegowego typu 1+1. Na krzywej



Rys. 2

$\vartheta_0$  ( $k_0$ ) zaznaczono dwa charakterystyczne punkty. Punkt I odpowiada początkowi wtórnego uplastycznienia (powstania procesów czynnych) w warstwie dolnej w środku płyty (po wyboczeniu rozwijały się w niej procesy bierny, tzn. była ona lokalnie odciążana). Punkt II jest związany z rozpoczęciem procesów biernych w górnej warstwie, które rozwijają się (przy odpowiednio dużych ugięciach) od środka płyty ku jej podparciu.



Rys. 3

Najbardziej interesująca zależność ugięcia od obciążenia została pokazana na rys. 3. Dla porównania na tym samym rysunku pokazano zależność  $p$  ( $v_L$ ), uzyskane w pracach [9] dla płyty pełnościennej i w [5] dla płyty sandwichowej, przy założeniu idealnie sztywno-plastycznego materiału. Podobnie jak w cytowanych pracach uzyskana przez nas zależność  $p$  ( $v_L$ ) wskazuje na niestateczność procesu obciążania (dokładniej należałoby mówić o odciążaniu płyty przy wzroście jej ugięć), przy czym wartości ugięć obliczone w [5] są dla tych samych obciążeń kilkakrotnie większe, niż obliczone przez nas na podstawie założenia, że materiał jest sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem.

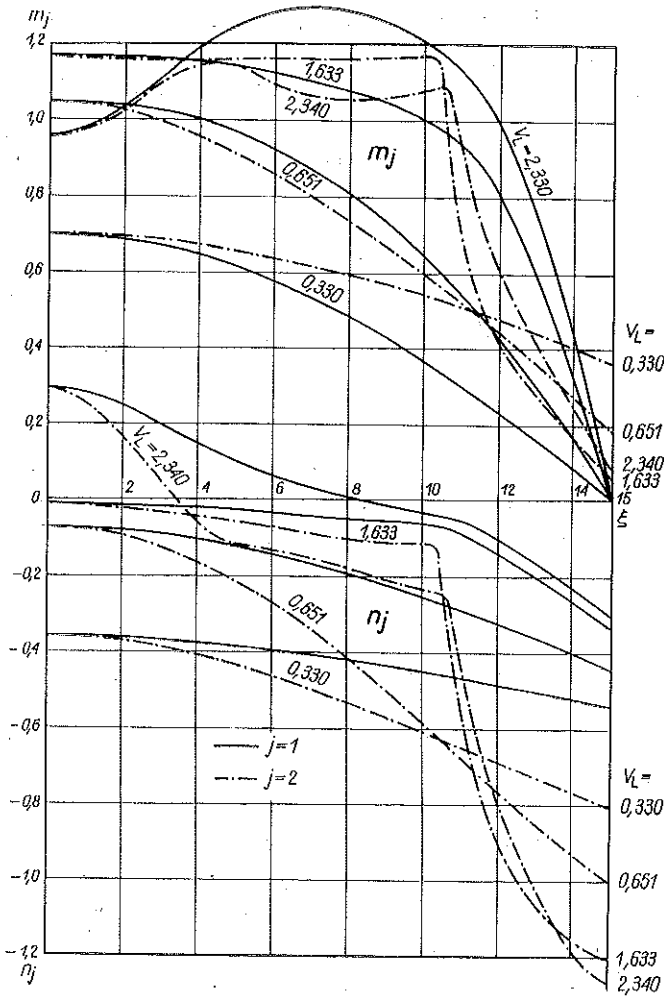
Na tym samym rys. 3 pokazano zależność pomiędzy momentem zginającym  $m_0$  i siłą osiową  $n_0$  w środku płyty, a maksymalnym ugięciem  $v_L$ . Załamania wykresów występują we wspomnianych punktach I i II. Ponadto w punkcie II pojawiają się siły rozciągające, które przy wzroście ugięć (dla  $v_L > 1,64$ ) rozszerzają się na coraz większy obszar wokół środka płyty.

To zjawisko jest bardziej widoczne na rys. 4, gdzie pokazano rozkład uogólnionych sił wewnętrznych  $n_j$  i  $m_j$  wzdłuż promienia płyty dla wybranych wartości ugięć  $v_L$  (podano wartości  $v_L$  odpowiadające punktom I i II lub ustalonym wartościom umownego czasu  $\tau = k_0$ ). Obok tworzenia się obszaru rozciągających sił osiowych stwierdzono również powstawanie strefy brzegowej ze znacznymi wartościami sił obwodowych  $n_2$  i momentów zginających  $m_2$ .

Tworzenie się warstwy brzegowej oraz powstawanie sił rozciągających jest znane z analizy płyt sprężystych [2]. W przypadku modelu idealnie sztywno-plastycznego można również wyznaczyć warstwę brzegową [9], nie można jednak obliczyć naprężeń rozciągających w środku płyty. Wymaga to uwzględnienia sprężystej części odkształceń [4], jak też rozpatrzenia procesów biernych w płycie.

Wpływ przyjętego modelu materiału na rozkład sił jest istotny zwłaszcza w płycie sandwichowej. Jest to widoczne na rys. 3, gdzie wartości siły podłużnej  $n_0$  i momentu zginającego  $m_0$  w środku płyty, obliczone w [5] na podstawie założenia modelu idealnie sztywno-plastycznego, różnią się znacznie od wyników uzyskanych w obecnej pracy dla płyty sprężysto-plastycznej. Różnice te występują zwłaszcza dla małych ugięć. Ciekawa jest również dość dobra zgodność wyników z rezultatami obliczeń wykonanych w [9] dla pełnościennej płyty sztywno-plastycznej.





Rys. 4

### 5. UWAGI KOŃCOWE

Głównym celem pracy było dalsze ulepszenie metody półodwrotnej, która w ostatnich latach została z powodzeniem wykorzystana do obliczania małych [6] i dużych ugięć powłok sprężysto-plastycznych [1, 11].

Podany przykład miał na celu głównie weryfikację proponowanego algorytmu. Obliczenia były prowadzone dla płyty wykonanej z materiału sprężysto-plastycznego, co pozwoliło na wykrycie efektów znanych z płyt sprężystych: W szczególności stwierdzono, że występują duże obszary procesów biernych i wtórnych, związane ze znaczną redystrybucją sił wewnętrznych w płycie.

Analiza taka była ułatwiona dzięki użyciu przyrostowych równań teorii płynięcia plastycznego, które obok fizycznej poprawności okazują się wygodniejsze w obliczeniach niż równania fizyczne teorii odkształceniowej [12].

Stwierdzona niestabilność metody przy dużych ugięciach (w przykładzie numerycznym były to ugięcia rzędu dwóch grubości powłoki) mogła być związana zarówno z ustalonymi na początku obliczeń krokami całkowania, jak też z efektami brzegowymi.

W tym ostatnim przypadku dobre wyniki może dać połączenie metody bezpośredniego całkowania z podziałem konstrukcji na segmenty [3].

W pracy rozważano tylko symetryczne ugięcia płyt kołowych, co pozwoliło sprowadzić problem do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. W tym przypadku metoda bezpośredniego numerycznego całkowania jest efektywniejsza od powszechnie stosowanych metod elementów lub różnic skończonych [7, 8], gdyż pozwala na numeryczną analizę złożonych zadań nieliniowych nawet na małych komputerach.

Problem ulegnie dużej komplikacji, jeśli występują niesymetryczne formy równowagi (może to mieć miejsce np. w płytach pierścieniowych nawet przy symetrycznym obciążeniu brzegu). Tutaj proponowana metoda może być mało przydatna i zadania będzie można rozwiązywać na podstawie metody elementów skończonych.

#### DODATEK

Przy numerycznym całkowaniu podstawowego układu równań dużych ugięć sprężysto-plastycznych płyt zachodzi konieczność odwracania związków fizycznych. Znamy mianowicie w każdej warstwie  $\Delta e_2$  i  $\Delta s_1$ , a chcemy obliczyć  $\Delta e_1$  i  $\Delta s_2$ . Podamy teraz odpowiedni algorytm obliczeń, który został sprawdzony w numerycznym przykładzie w p. 3.

Najpierw liczymy  $\Delta s_2$  i  $\Delta e_1$  jak dla procesu biernego, posługując się wzorami (2.6):

$$(D.1) \quad \Delta s_2^{et} = \nu \Delta s_1 + \Delta e_2, \quad \Delta e_1^{et} = (1 - \nu^2) \Delta s_1 - \Delta e_2,$$

i sprawdzamy znak przyrostu intensywności

$$(D.2) \quad \Delta s_i^{et} = s_i^{et} - f_*,$$

gdzie

$$(D.3) \quad \begin{aligned} s_i^{et} &= (s_1^{\circ 2} - s_1^{\circ} s_{2et}^{\circ} + s_{2et}^{\circ 2})^{1/2}, & f_* &= 1 + A \bar{e}_p^*, \\ s_1^{\circ} &= s_1^* + \Delta s_1 - a_1^*, & s_{2et}^{\circ} &= s_2^* + \Delta s_2^{et} a_2^*. \end{aligned}$$

Jeśli  $\Delta s_i^{et} < 0$ , to mamy do czynienia z procesem biernym i do dalszych obliczeń, obok znanych  $\Delta e_1$  i  $\Delta s_2$ , przyjmujemy:

$$(D.4) \quad \Delta s_2 = \Delta s_2^{et}, \quad \Delta e_1 = \Delta e_1^{et}, \quad \Delta a_j = \Delta \bar{e}_p = 0, \quad j = 1, 2.$$

Jeśli  $\Delta s_i^{et} \geq 0$ , to wystąpi proces aktywny. W tym przypadku liczymy  $\Delta s_2$  i  $\Delta e_1$  według danych zawartych w pamięci maszyny. Po obliczeniu  $E_{11}^*$ ,  $E_{12}^*$ ,  $E_{22}^*$  z (2.5) wynika

$$(D.5) \quad \Delta e_1^{pt} = \frac{1}{E_{11}^*} (\Delta s_1 - E_{12}^* \Delta e_2), \quad \Delta s_2^{pt} = E_{12}^* \Delta e_1^{pt} + E_{22}^* \Delta e_2.$$

Teraz sprawdzamy znak przyrostu intensywności naprężeń

$$(D.6) \quad \Delta s_i^{pl} = s_i^{pl} - f_*$$

gdzie obok nowych oznaczeń

$$(D.7) \quad s_i^{pl} = (s_i^{\circ 2} - s_1^{\circ} s_{2pl}^{\circ} + s_{2pl}^{\circ 2})^{1/2}, \quad s_{2pl}^{\circ} = s_2^* + \Delta s_2^{pl} - a_2^*$$

użyto  $s_1^{\circ}$  i  $f_*$  jak w (D.3). W zależności od znaku  $\Delta s_i^{pl}$  należy rozpatrzyć dwa przypadki.

1. Jeśli  $\Delta s_i^{pl} \geq 0$ , to wystąpi proces aktywny i przyrosty potrzebne do dalszych obliczeń wynoszą:

$$(D.8) \quad \Delta s_2 = \Delta s_2^{pl}, \quad \Delta e_1 = \Delta e_1^{pl}, \quad \Delta a_j = c (\Delta e_1^{pl} + \Delta e_2^{pl} + \Delta e_j^{pl}),$$

$$\Delta \bar{e}_p = \frac{2}{\sqrt{3}} [(\Delta e_1^{pl})^2 + \Delta e_1^{pl} \Delta e_2^{pl} + (\Delta e_2^{pl})^2]^{1/2},$$

gdzie przyrosty odkształceń plastycznych oblicza się według (2.9)<sub>3</sub>:

$$(D.9) \quad \Delta e_j^{pl} = \Delta e_j - \Delta s_j + \nu (\Delta s_1 + \Delta s_2 - \Delta s_j), \quad j = 1, 2.$$

2. Jeśli  $\Delta s_i^{pl} < 0$ , to dla przyjętego przyrostu umownego czasu wystąpi tylko częściowo proces aktywny (rys. 5). Z takim przypadkiem spotykamy się przy przechodzeniu przez krzywą graniczną. Liczone przyrosty rozdzielamy w sposób przybliżony na część sprężystą i plastyczną. Część przyrostów odpowiadająca procesowi biernemu obliczamy tak, aby osiągnąć krzywą  $F_*$ :

$$(D.10) \quad \Delta s'_j = s_{j\kappa}^{\circ} - s_j^* + a_j^*, \quad \Delta e'_j = \Delta s'_j - \nu (\Delta s'_1 + \Delta s'_2 - \Delta s'_j),$$

gdzie

$$(D.11) \quad s_{1\kappa}^{\circ} = \kappa s_1^{\circ}, \quad s_{2\kappa}^{\circ} = \kappa s_{2el}^{\circ}, \quad \kappa = \frac{f_*}{s_1^{el}}$$

W (D.11) posłużono się wielkościami obliczanymi według (D.3). Teraz można obliczyć część przyrostów odpowiadającą procesowi aktywnemu:

$$(D.12) \quad \Delta s_1'' = \Delta s_1 - \Delta s_1', \quad \Delta e_1'' = \Delta e_2 - \Delta e_2',$$

a po obliczeniu  $E_{11}^{\kappa}, E_{12}^{\kappa}, E_{22}^{\kappa}$  dla  $s_{j\kappa}^{\circ}$ , brakujące przyrosty  $\Delta e_1''$  i  $\Delta s_2''$  wyznaczmy podobnie jak w (D.5):

$$(D.13) \quad \Delta e_1'' = \frac{1}{E_{11}^{\kappa}} (\Delta s_1'' - E_{12}^{\kappa} \Delta e_2''), \quad \Delta s_2'' = E_{12}^{\kappa} \Delta e_1'' + E_{22}^{\kappa} \Delta e_2''.$$

Łączne, poszukiwane przyrosty wynoszą

$$(D.14) \quad \Delta s_2 = \Delta s_2' + \Delta s_2'', \quad \Delta e_1 = \Delta e_1' + \Delta e_2'';$$

przyrosty  $\Delta a_j$  i  $\Delta \bar{e}_p$  liczymy według (D.8), tylko pozostawiając  $\Delta e_j''$ ;  $\Delta s_j''$  zamiast  $\Delta e_j$  i  $\Delta s_j$  po prawej stronie (D.9).

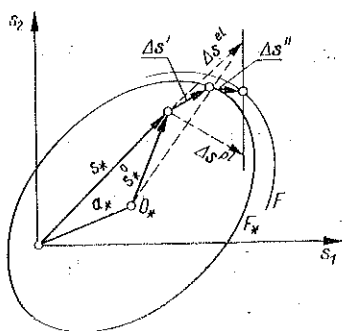
Przechodzenie od umownego czasu  $\tau_n$  do nowego  $\tau_{n+1} = \tau_n + \Delta_n \tau$  wymaga porównania wartości zawartych w pamięci maszyny dla  $\tau_* = \tau_{n-1}$ . Jeśli przyjmiemy oznaczenie

$$(D.15) \quad +\tau_* = \tau_* + \Delta\tau = \tau_{n-1} + \Delta_{n-1} \tau = \tau_n,$$

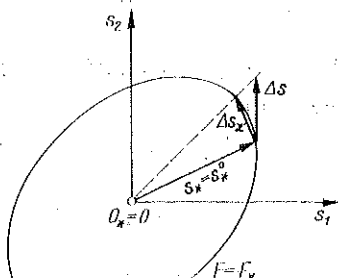
to możemy napisać

$$(D.16) \quad \begin{aligned} +s_j^* &= s_j^* + \Delta s_j^{k'}, & +e_j^* &= e_j^* + \Delta e_j, \\ +a_j^* &= a_j^* + \Delta a_j^*, & +\bar{e}_p^* &= \bar{e}_p^* + \Delta \bar{e}_p. \end{aligned}$$

We wzorach (D.16) przyrosty  $\Delta e_j$ ,  $\Delta a_j$  i  $\Delta \bar{e}_p$  należy przyjąć według (D.4), (D.8) lub (D.14).



Rys. 5



Rys. 6

Wartość  $s_j^*$  poprawiamy tak, aby była zawsze spełniona równość  $+s_i = +f_*$ . Ze względu na przybliżone obliczenia (dla procesu aktywnego liczymy skończone przyrosty dla  $\tau_n$  na podstawie  $E_{jk}^*$  według danych dla  $\tau_* = \tau_{n-1}$ ) możemy po obliczeniu  $\Delta s_2$  według (D.8) lub (D.14) wyjść poza nową krzywą graniczną  $F = +F_*$ ; wyraźniej to widać na rys. 6 sporządzonym dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego. Z tego względu po obliczeniu  $\Delta a_j$  i  $\Delta \bar{e}_p$  obliczamy

$$(D.17) \quad \Delta s_j^{k'} = s_{jk}^{\circ} - (s_j^* - a_j^* - \Delta a_j),$$

gdzie

$$(D.18) \quad \begin{aligned} s_{jk}^{\circ} &= \kappa' s_j^{\circ}, & s_j^{\circ} &= \Delta s_j + (s_j^* - a_j^* - \Delta a_j), \\ \kappa' &= \frac{f}{s_i^{\circ}}, & f &= 1 + A(\bar{e}_p^* + \Delta \bar{e}_p), & s_i^{\circ} &= (s_1^{\circ 2} + s_1^{\circ} s_2^{\circ} + s_1^{\circ 2})^{1/2}. \end{aligned}$$

W przypadku  $\Delta s_i^{cl} < 0$  przyjmujemy  $\Delta s_j^{k'} = \Delta s_j$ , a więc do poprawienia pamięci wykorzystujemy wszystkie wzory z (D.4).

Obliczenia zostały wykonane w Ośrodku ETO Politechniki Krakowskiej. Autor pragnie podziękować p. drowi J. Wilkowi za wykonanie programu w kodzie wewnętrznym maszyny EMC Odra 1013.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. C. GERDEEN, F. A. SIMENON, D. I. HUNTER, *Large deflection analysis of elastic-plastic shells using numerical integration*, AIAA Journal, 9, 8, 1012 - 1018, 1971.
2. K. O. FRIEDRICH, J. J. STOKER, *Buckling of the circular plate beyond the critical thrust*, J. Appl. Mech., 9, 1, 7 - 14, 1942.
3. A. KALNINS, J. F. LESTINGI, *On nonlinear analysis of shells of revolution*, J. Appl. Mech., 34, 1, 59 - 64, 1967.
4. J. R. LEPIK, *O równowadze giętkich płyt z przedziałem upręgi*, 21, 6, 833 - 842, 1957.

5. J. R. LEPIK, *K osiessymetrycznemu izgibu kruglych żestko-plasticzeskich plastin*, Inż. Żurnal-Mech. Tw. Tiała, 4, 104 – 110, 1966.
6. P. V. MARCAL, C. E. TURNER, *Numerical analysis of the elastic-plastic behaviour of axisymmetrically loaded shells of revolution*, J. Mech. Engng. Sci., 5, 3, 232 – 237, 1963.
7. P. V. MARCAL, *Large deflection analysis of elastic-plastic plates and shells*, Proc. First Intern. Conf. on Pressure Vessel Technology, P.I, Design and Analysis, ASME, 75 – 87, 1969.
8. E. P. POPOV, S. YAGHMAI, *Linear and nonlinear static analysis of axisymmetric loaded thin shells of revolution*, Proc. First Intern. Conf. on Pressure Vessels Technology, P. I, Design and Analysis, ASME, 234 – 237, 1969.
9. A. N. SHERBOURNE, *Collapse of a rigid-plastic circular plate in uniform compression*, J. Mech. Engng Sci., 2, 2, 133 – 142, 1961.
10. Z. WASZCZYŻYŃ, *Obliczanie skończonych ugięć sprężysto-plastycznych płyt i powłok obrotowo-symetrycznych*, Zeszyty Naukowe Polit. Krak., 3, 1970.
11. Z. WASZCZYŻYŃ, *Calculation of sandwich shells of revolution at large elastic-plastic deflections*, Arch. Mech. Stos., 24, 3, 483 – 498, 1972.
12. Z. WASZCZYŻYŃ, *Poslekriticzeskoje rawnowiesije krugowej idealizowanej plastinki za priedelom uprugosti*, Inż. Żurnal-Mech. Tw. Tiała [w druku].

## Резюме

## РАСЧЕТ ЗАКРИТИЧЕСКИХ ПРОГИБОВ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК

Основная система уравнений, описывающих конечные прогибы упруго-пластических оболочек, была приспособлена в предыдущих работах автора [10 и 11] для описания закритического состояния круглой пластинки, подверженной действию радиального давления, распределенного равномерно по внешнему контуру пластины. Задача была сформулирована как начально-краевая задача для несопряженной системы дифференциальных уравнений. В данной статье рассмотрены пластины типа «сэндвич» из упруго-пластического материала со сложным линейным кинематически-изотропным упрочнением, описываемого определяющими уравнениями теории пластического течения (2.5).

Для интегрирования основной системы уравнений (2.10) использован полуобратный метод, предложенный в работе [11]. В статье обсуждены подробности алгоритма для вычислительной машины. Особое внимание обращено на учет пассивных процессов (локальных разрывов) в пластине.

Для проверки предлагаемого алгоритма вычислены прогибы свободно опертой пластины. Замечено возникновение краевого слоя с большими значениями тангенциальных напряжений и образование области растягивающих напряжений в центре пластины, аналогично явлению наблюдаемому в упругих пластинах. Результаты сравниваются с данными работ [5 и 9], вычисленными для идеальной жестко-пластической модели материала.

В приложении приведен алгоритм обращения определяющих уравнений и другие подробности численного счета.

## SUMMARY

## EVALUATION OF POST-CRITICAL DEFLECTIONS OF ELASTIC-PLASTIC CIRCULAR PLATES

The fundamental set of equations of large deflections of elastic-plastic shells presented in earlier papers by the author [10, 11] is adapted for the evaluation of post-critical states of circular plates under radial pressure uniformly distributed along the contour. The problem is formulated

as an initial and boundary value problem, described by an uncoupled system of differential equations. Considered are sandwich plates made of elastic-plastic material with a combined, kinematic-isotropic hardening rule given by the constitutive equations of the plastic flow theory (2.5).

The fundamental set of Eqs. (2.10) is solved by means of the semi-inverse method proposed in [11]. In the present paper the detailed algorithm intended for a computer is discussed, particular attention being paid to passive processes (local unloading) occurring in the plate. The algorithm is verified on the example of a simply supported plate. It is found that, similarly to the case of elastic plates, a boundary layer is formed exhibiting large values of circumferential stresses, while around the center of the plate a region of tensile stresses appears. The results are compared with those obtained in [5, 9] for a perfectly rigid-plastic material.

The method of inversion of physical relations and certain numerical data are presented in the Appendix.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 16 października 1972 r.*