

WSPÓLDZIAŁANIE ZGINANIA I ŚCINANIA W NOŚNOŚCI GRANICZNEJ POWŁOK WALCOWYCH (*)

H. M. HAYDL i A. N. SHERBOURNE (WATERLOO, ONTARIO, CANADA)

STRESZCZENIE

W notce tej podano rozwiązanie ściśle dolnej granicy nośności granicznej dla cylindrycznych powłok wspornikowych poddanych ciśnieniu zewnętrznemu. Uwzględniono wpływ ścinania poprzecznego na uplastycznienie powłok. Wyniki dla ciśnień niszczących, pól naprężeń i prędkości otrzymano dla warunku plastyczności Hubera-Misesa.

1. WSTĘP

SAWCZUK i DUSZEK [1] oraz OSCHATZ [2] wykazali, że w nośności granicznej płyt wpływ ścinania poprzecznego na uplastycznienie płyt może w znacznym stopniu zredukować obciążenia niszczące. Wpływ ścinania poprzecznego na zniszczenie cienkich powłok walcowych był badany przez HAYDLA i SHERBOURNE'A [3]. Autorzy pracy [3] otrzymali rozwiązanie numeryczne dla dolnej oceny i doszli do wniosku, że zmniejszenie obciążeń niszczących było tego samego rzędu jak dla płyt kołowych [2]. Ścisłe rozwiązanie numeryczne dla nośności granicznej powłok walcowych, poddanych ciśnieniu z uwzględnieniem ścinania poprzecznego, otrzymali HAYDL i SHERBOURNE [4]. Analiza przeprowadzona w pracy [4] oparta była na aproksymacji IWANOWA powierzchni płynięcia ILIUSZINA.

W niniejszej pracy będziemy badać zniszczenie walcowych powłok wspornikowych, poddanych działaniu ciśnienia zewnętrznego. W szczególności pokażemy, że linearyzacja powierzchni płynięcia Iwanowa prowadzi do prostego, ścisłego rozwiązania dla oceny dolnej. Ponadto wykażemy, że rozwiązanie to zgadza się zupełnie dobrze z bardziej dokładnym rozwiązaniem numerycznym, otrzymanym dla tego samego problemu przez HAYDLA i SHERBOURNE'A.

Główne założenia będące podstawą naszej analizy są następujące. Materiał powłoki jest sztywno-plastyczny i spełnia warunek plastyczności Hubera-Misesa. Wszędzie stosują się zwykle założenia i twierdzenia teorii nośności granicznej dla małych ugięć. W rozważaniach naszych będziemy badać tylko problem symetryczny.

(*) Z języka angielskiego przetłumaczył J. BEIDA.

2. ZWIĄZKI PODSTAWOWE

Rozważamy powłokę walcową, której kształt pokazany jest na rys. 1. Obciążeniem zewnętrznym jest równomiernie rozłożone ciśnienie zewnętrzne p .

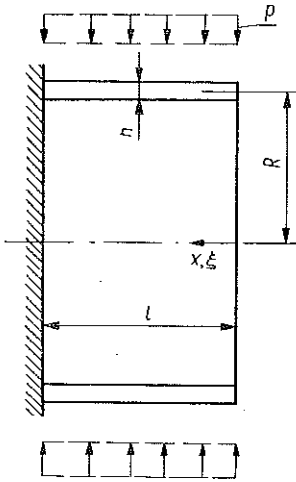
Równania równowagi dla elementu powłoki są szczegółowo opracowane w [8]. Dla rozważanego problemu mają one następującą postać:

$$(2.1) \quad \frac{dQ_x}{dx} + \frac{1}{R} N_\theta + p = 0$$

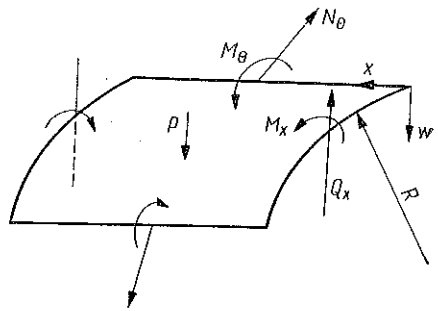
oraz

$$(2.2) \quad \frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0;$$

symbole Q , M , N oznaczają tu siły uogólnione, a x , θ są kierunkami osi współrzędnych. Dodatnie kierunki sił wypadkowych są pokazane na rys. 2.



Rys. 1. Wielkości geometryczne



Rys. 2. Dodatnie wypadkowe naprężeń

Związki między odkształceniami i przemieszczeniami dla małych ugięć przyjmują następującą postać:

$$(2.3) \quad \varepsilon_x = \frac{du}{dx}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{w}{R}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{dw}{dx} - \beta, \quad k_x = \frac{d\beta}{dx}, \quad k_\theta = 0.$$

W równaniach (2.3) przyjęto założenie, że pole przemieszczenia jest liniowe wzdłuż grubości powłoki. Symbole u i w oznaczają osiowe i poprzeczne przemieszczenie punktów, leżących na powierzchni odniesienia powłoki, β obrót przekroju poprzecznego powłoki od normalnej do powierzchni odniesienia. Założono również, że odkształcenia postaciowe ε_{xz} są stałe wzdłuż grubości powłoki.

HAYDL i SHERBOURNE [10] wykazali, że powierzchnia płynięcia IWANOWA [5] jest jednoznacznie określona, gdy uwzględnione jest ścinanie poprzeczne. Powierzchnia ta ma postać

$$(2.4) \quad P_a^2 + P_t^2 + \frac{1}{2} P_m^2 + \left[\frac{1}{4} P_m^4 + P_{tm}^2 \right]^{1/2} = 1,$$

gdzie P są kwadratowymi wyrazami Iliuszina. Łatwo sprawdzić, że (2.4) dla problemu rozważanego w niniejszej pracy sprowadza się do równania

$$(2.5) \quad \frac{N_\theta^2}{N_0^2} + \frac{3}{4} \frac{M_x^2}{M_0^2} + 3 \frac{Q_x^2}{N_0^2} = 1.$$

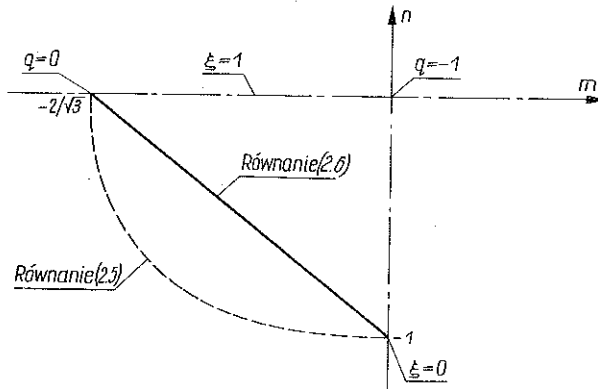
W naszej analizie będziemy korzystać z następującego równania przybliżonej powierzchni płynięcia:

$$(2.6) \quad \frac{N_\theta}{N_0} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{M_x}{M_0} + 3 \frac{Q_x}{N_0} = -1$$

lub

$$f(N_\theta, M_x, Q_x) = \text{const},$$

która jest linearyzacją (2.5). Powierzchnie płynięcia (2.5) i (2.6) są pokazane schematycznie na rys. 3. Zgodnie z twierdzeniami nośności granicznej przyjęcie powierzchni płynięcia (2.6) da dolną ocenę dokładniejszego rozwiązania opierającego się na powierzchni płynięcia (2.5).



Rys. 3. Powierzchnia płynięcia

Warunki brzegowe przyjęto w następującej postaci:

$$(2.7) \quad \text{dla } x=0: \quad Q_x=0, \quad M_x=0, \quad w=w_0$$

oraz

$$(2.8) \quad \text{dla } x=1: \quad N_\theta=0, \quad u=0, \quad w=0.$$

Teoria potencjału plastycznego [11] dostarcza dodatkowych związków między uogólnionymi naprężeniami i przemieszczeniami (prędkościami). Związki te są następujące:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \gamma \frac{\partial f}{\partial N_x}, & \varepsilon_\theta &= \gamma \frac{\partial f}{\partial N_\theta}, & \varepsilon_{xz} &= \gamma \frac{\partial f}{\partial Q_x}, \\ k_x &= \gamma \frac{\partial f}{\partial M_x}, & k_\theta &= \gamma \frac{\partial f}{\partial M_\theta}, \end{aligned}$$

gdzie γ jest nieujemnym parametrem płynięcia.

Zauważmy, że w (2.9) nie będziemy rozróżniać przemieszczeń od prędkości (lub prędkości odkształcenia). Ich zamiana jest dopuszczalna w problemie geometrycznym liniowym i nie wpływa na nasze rezultaty.

Z kolei możemy przystąpić do rozwiązania rozważanego problemu, gdyż wyspecyfikowane zostały wszystkie niezbędne zależności: a) równania równowagi, b) związki kinematyczne, c) powierzchnia płynięcia i stowarzyszone prawo płynięcia oraz d) warunki brzegowe. Rozwiązanie kompletne polega zatem na wyznaczeniu: a) ciśnienia niszczącego, b) pola naprężeń przy zniszczeniu i c) pola przemieszczeń.

Zauważmy, że pola naprężenia i prędkości są nie sprzężone i problem staje się statycznie wyznaczalny.

3. ROZWIĄZANIE

Wprowadźmy następujące wielkości bezwymiarowe:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} m &= \frac{M_x}{M_0}, & n &= \frac{N_\theta}{N_0}, & M_0 &= \frac{1}{4} \sigma_0 h^2, \\ N_0 &= \sigma_0 h, & c^2 &= \frac{(l/R)^2}{h/R}, & P &= \frac{pR}{N_0}, \\ q &= \frac{\sqrt{3} Q_x}{N_0}, & \xi &= \frac{x}{l}, & \tilde{w} &= \frac{w}{R}, & \tilde{u} &= \frac{u}{l}, & \tilde{\beta} &= \beta. \end{aligned}$$

Korzystając z powyższych oznaczeń z równań (2.1), (2.2) i (2.6) otrzymujemy

$$(3.2) \quad m'' + K_1 m' + K_2 m = K_3,$$

gdzie «prim» oznacza różniczkowanie względem nowej zmiennej ξ oraz

$$K_1 = -\sqrt{3} (l/R), \quad K_2 = -2\sqrt{3} c^2, \quad K_3 = 4c^2 (1-P).$$

Równanie (3.2) ma rozwiązanie elementarne

$$(3.3) \quad m = A e^{\lambda_1 \xi} + B e^{\lambda_2 \xi} + \frac{K_3}{K_2},$$

gdzie

$$(3.4) \quad \lambda_{1,2} = -\frac{K_1}{2} \pm \left(\frac{K_1^2}{4} - K_2 \right)^{1/2}.$$

Stałe całkowania A i B są określone z (2.2) i warunków brzegowych (2.7)₁ i (2.7)₂. Stałe A i B mają postać

$$(3.5) \quad A = \frac{K_3}{K_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad B = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} A.$$

Ścinanie poprzeczne otrzymane z (2.2) i (3.3)–(3.5) wynosi

$$(3.6) \quad q = \frac{\sqrt{3}}{4c^2} \frac{l}{R} (\lambda_1 A e^{\lambda_1 \xi} + \lambda_2 B e^{\lambda_2 \xi}),$$

a uogólnione obwodowe naprężenie membranowe n obliczone z (2.6) przyjmuje postać

$$(3.7) \quad n = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(A e^{\lambda_1 \xi} + B e^{\lambda_2 \xi} + \frac{K_3}{K_2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{4c^2} \frac{l}{R} (\lambda_1 A e^{\lambda_1 \xi} + \lambda_2 B e^{\lambda_2 \xi}).$$

Obciążenie niszczące może być teraz określone z warunku brzegowego (2.8)₁. Po niektórych przekształceniach dostajemy

$$(3.8) \quad P = 1 - \frac{K_3}{4c^2},$$

gdzie

$$K_3 = \left[-0,866 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} J_1 - J_2 + \frac{1}{K_2} \right) - \lambda_2 H (J_1 - J_2) \right]^{-1},$$

$$H = \frac{0,433}{c^2} \frac{l}{R},$$

$$J_1 = \frac{e^{\lambda_1}}{K_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad J_2 = \frac{e^{\lambda_2}}{K_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Przystąpmy teraz do wyznaczenia pola przemieszczenia odpowiadającego obciążeniu niszczącemu P . Można łatwo wykazać, że układ równań (2.3), (2.6), (2.9) i (3.1) prowadzi do równania

$$(3.9) \quad \tilde{w}'' + K_1 \tilde{w}' + K_2 \tilde{w} = 0.$$

Ogólne rozwiązanie równania (3.9) ma postać

$$(3.10) \quad \tilde{w} = D e^{\lambda_1 \xi} + E e^{\lambda_2 \xi},$$

gdzie D i E są stałymi całkowania.

Wykorzystując warunki brzegowe (2.7)₃ i (2.8)₃ otrzymamy następujące funkcje:

$$(3.11) \quad \tilde{w} = \frac{\tilde{w}_0}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}} (e^{\lambda_2} e^{\lambda_1 \xi} - e^{\lambda_1} e^{\lambda_2 \xi}).$$

Podobnie można wykazać, że obrót $\tilde{\beta}$ normalnej do powierzchni odniesienia powłoki wynika z powyższych równań i wynosi

$$(3.12) \quad \tilde{\beta} = \frac{R}{l} \tilde{w}' - \sqrt{3} \tilde{w}.$$

Przemieszczenie osiowe \tilde{u} otrzymujemy z równania

$$(3.13) \quad \tilde{u}' = 0,$$

które wraz z warunkiem brzegowym (2.8)₂ prowadzi do spodziewanego rezultatu

$$(3.14) \quad \tilde{u} = 0.$$

4. PRZYPADEK SZCZEGÓLNY

W tym rozdziale zbadamy przypadek szczególny, gdy w powierzchni płynięcia nie jest uwzględniane ścinanie poprzeczne, tzn. gdy wpływ ścinania poprzecznego na uplastycznienie powłoki jest pominięty. Powierzchnia płynięcia (2.6) w postaci bezwymiarowej jest zatem opisana równaniem

$$(4.1) \quad n + \frac{\sqrt{3}}{2} m = -1.$$

Postępując jak w punkcie poprzednim otrzymujemy

$$(4.2) \quad m'' - |K_2| m = K_3.$$

Ponieważ $l/R=0$, przeto z (3.4) wynika, że

$$\lambda_{3,4} = \pm (|K_2|)^{1/2}$$

i pełne rozwiązanie równania (4.2) przy warunkach brzegowych (2.7)₁ i (2.7)₂ ma postać

$$(4.3) \quad m = \frac{2}{\sqrt{3}} (1-P) (\cos h 1,86c\xi - 1).$$

Z (4.1) wyznaczmy n :

$$(4.4) \quad n = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} m,$$

a z (2.2) otrzymujemy

$$(4.5) \quad q = Hm'.$$

Obciążenie niszczące P dostajemy z (4.4) i warunku brzegowego (2.8)₁

$$(4.6) \quad P = \frac{\cos h 1,86c}{\cos h 1,86c - 1}.$$

Pole prędkości określa równanie

$$(4.7) \quad \tilde{w}'' - |K_2| \tilde{w} = 0.$$

Rozwiązanie równania (4.7) przy warunkach brzegowych (2.7)₃ i (2.8)₃ przyjmuje postać

$$(4.8) \quad \tilde{w} = \tilde{w}_0 \left(\operatorname{ch} 1,86c\xi - \frac{\operatorname{ch} 1,86c}{\operatorname{sh} 1,86c} \operatorname{sh} 1,86c\xi \right).$$

Z (2.3) otrzymujemy znowu przemieszczenie osiowe

$$(4.9) \quad \tilde{u}=0,$$

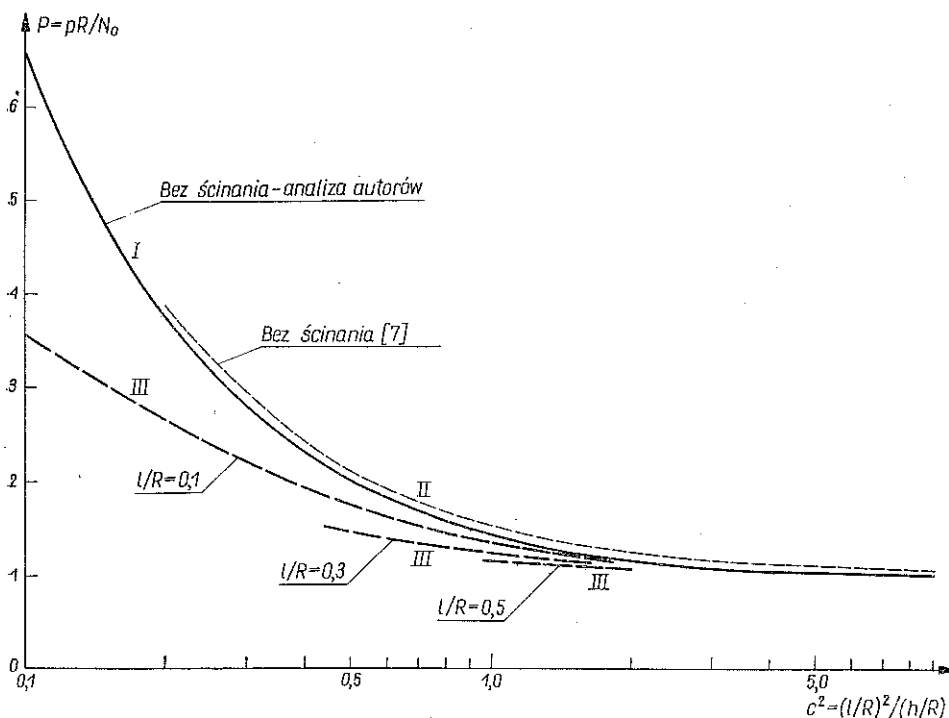
a ponieważ założyliśmy $\varepsilon_{xz}=0$, mamy więc

$$(4.10) \quad \tilde{\beta} = \frac{R}{l} \tilde{w}',$$

tzn. kierunki normalne do powierzchni powłoki są zachowane.

5. WYNIKI I Dyskusja

Na rys. 4 pokazaliśmy niektóre wyniki otrzymane w naszej analizie. Krzywa I przedstawia obciążenie niszczące P jako funkcję parametru powłoki c^2 dla przypadku szczególnego (4.6), w którym pominięto wpływ ścinania na płynięcie plastyczne.



Rys. 4. Obciążenie niszczące P jako funkcja parametru powłoki c^2

Dla porównania wykreśliśmy krzywą II przedstawiającą wyniki otrzymane przy przyjęciu ściślej powierzchni Iwanowa (2.5). Wyniki te zostały zaczerpnięte z [7]. Krzywe III pokazują wpływ ścinania poprzecznego na płynięcie plastyczne dla kilku stosunków l/R . Zauważmy, że gdy w rozważaniach uwzględnimy ścinanie poprzeczne, to musimy wyspecyfikować obydwa parametry powłoki l/R i h/R . W rozwiązaniu i równaniach wyjściowych założono, że wyrazy rzędu h/R są pomi-

jalne w porównaniu z 1. Dlatego dla grubych powłok nie jest rzeczą jasną, czy całe zmniejszenie obciążenia niszczącego pochodzi wyłącznie od ścinania. Może się zdarzyć, że za zmniejszenie obciążenia niszczącego odpowiadać będzie przyjęcie równań dla «cienkich» powłok. Dlatego też krzywe III zostały wykreślone tylko do wartości $h/R \approx 5$; zakładamy przy tym, że wyniki przedstawione na rys. 4 dla grubych powłok są zbyt niedokładne, aby mogły być wykorzystane przez konstruktorów.

W [7] wykazano, że wyniki krzywej II leżą w granicach 4,5% po stronie bezpiecznej w stosunku do wyników ścisłych otrzymanych dla powierzchni Iliuszina [6]. Wydaje się rzeczą rozsądną wyciągnięcie wniosku, że nasza analiza daje oszacowanie dla obciążenia niszczącego, które powinno mieścić się w granicach 10% po stronie bezpiecznej w stosunku do rozwiązania ścisłego opierającego się na powierzchni płynięcia Iliuszina.

Na podstawie wyników niniejszej pracy można stwierdzić, że dla niektórych kształtów powłoki obciążenie niszczące będzie w znacznym stopniu zmniejszone, jeśli uwzględni się poprzeczne odkształcenia postaciowe. Dlatego też, gdy przy projektowaniu lub analizie powłok walcowych wykorzystuje się wyniki nośności granicznej, wpływ ścinania poprzecznego powinien być wzięty pod uwagę.

Ogłaszając tę pracę autorzy pragną zaznaczyć, że została ona wykonana na Wydziale Inżynierii Lądowej Uniwersytetu Waterloo na zlecenie National Research Council of Canada, Grant A-1582, i stanowi część ogólniejszych badań dotyczących wpływu ścinania na zniszczenie powłok.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. SAWCZUK and M. DUSZEK, *A note on the interaction of shear and bending in plastic plates*, Arch. Mech. Stos., 15, 3, 1963.
2. A. OSCHATZ, *Bestimmung der Traglast von Kreis- und Kreisringplatten mit Berücksichtigung der Querkraftschubspannungen*, ZAMM, 48, Heft 5, 1968.
3. H. M. HAYDL and A. N. SHERBOURNE, *Rigid-plastic collapse of compression-bent shallow shells*, Int. J. Mech. Sci., submitted.
4. H. M. HAYDL and A. N. SHERBOURNE, *Effect of transverse shear on limit load of cylindrical shells*, Nucl. Eng. Des. (to be published).
5. G. V. IVANOV, *Inzh. Zhurnal Mekh. Tverdogo Tela*, 74, 6, 1967.
6. A. A. ILIUSHIN, *Plasticity*, GTTI, 1948.
7. H. M. HAYDL and A. N. SHERBOURNE, *Rigid-plastic collapse of cylindrical shells*, ASME, J. Eng. Ind. (to be published).
8. S. TIMOSHENKO and S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill Co., N.Y. 1959.
9. P. M. OGIBALOV, *Dynamics and strength of shells*, NASA TT F-284 Izdatelstvo Moskovskogo Univ., 1963.
10. H. M. HAYDL and A. N. SHERBOURNE, *Yield surface for thin shells accounting for transverse shear*, submitted for publication.
11. A. SAWCZUK and T. JAEGER, *Grenztragfähigkeits Theorie von Platten*, Springer-Verlag, 1963.

Резюме

ЗАМЕТКА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ИЗГИБА - СДВИГА В НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В этой заметке дано точное решение нижней оценки несущей способности для нагруженных давлением цилиндрических консольных оболочек. Учитывается влияние сдвига на упрочнение оболочек. Результаты для давления разрушения, полей напряжений и скорости получены для условия пластичности Губера-Мизеса.

SUMMARY

A NOTE ON BENDING-SHEAR INTERACTION IN THE LIMIT ANALYSIS OF
CYLINDRICAL SHELLS

In this note a closed form lower bound limit analysis solution is given for pressurized cylindrical cantilever shells. The influence of the transverse shear on the plastification of the shells is accounted for. Results for collapse pressures, stress fields and velocity fields are given for the Huber-Mises yield condition.

DEPARTMENT OF CIVIL ENGINEERING
UNIVERSITY OF WATERLOO,
WATERLOO, ONTARIO, CANADA

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 września 1972 r.
