

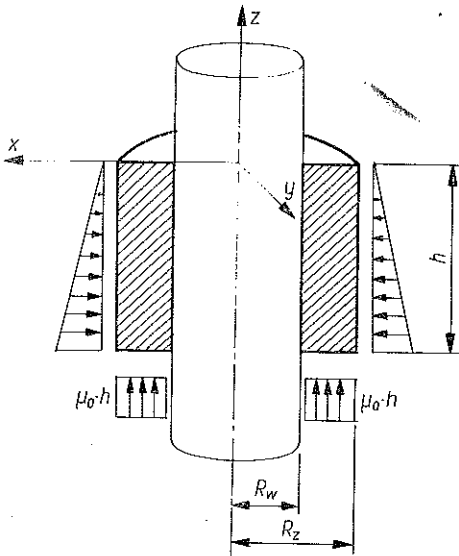
STANY GRANICZNE SKRĘCANYCH ELEMENTÓW Z LINIOWO ZMIENNYM CIŚNIENIEM BOCZNYM

WIKTOR G A M B I N (WARSZAWA)

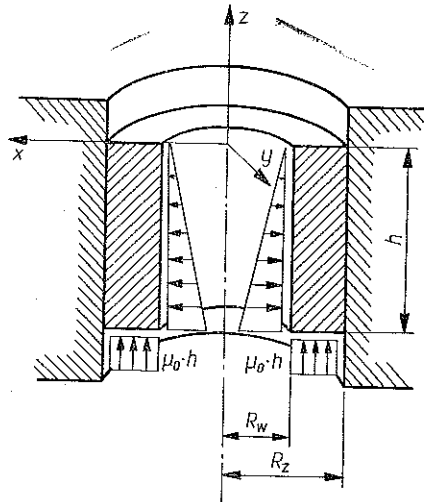
1. WPROWADZENIE

W pracach [2 i 3] podano pewną klasę rozwiązań dla przepływów materiału sztywno-idealnie plastycznego. Obecnie zilustrujemy ją przykładami konkretnych problemów brzegowych.

Na rys. 1 pokazano tuleję o grubości $d = R_z - R_w$, osadzoną na sztywnym, idealnie szorstkim trzpieniu, z ciśnieniem bocznym zmieniającym się liniowo od zera do



Rys. 1



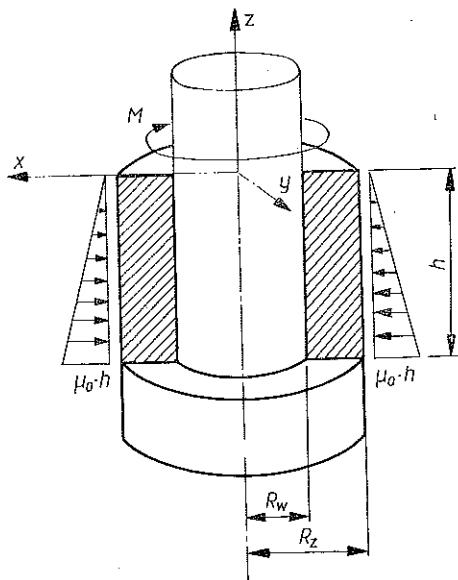
Rys. 2

wartości $\mu_0 h$, gdzie h jest wysokością tulei. Rysunek 2 przedstawia tę samą tuleję i tak samo obciążoną, tylko osadzoną wewnątrz sztywnej, idealnie szorstkiej rury. Wypór tulei spowodowany różnicą ciśnień na jej górnej i dolnej podstawie przenoszony jest przez element sztywny: trzpień lub rurę.

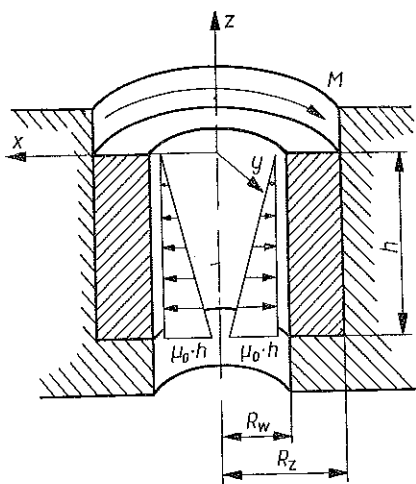
Jeżeli przez k oznaczymy wytrzymałość na ściskanie materiału, z którego wykonana jest tuleja, to gradient ciśnienia μ_0 , przy którym ulega ona zerwaniu, wyznaczyć można ze wzoru

$$(1.1) \quad \mu_0 = \frac{2kR_w}{R_z^2 - R_w^2}$$

Rozważmy następnie tuleję osadzoną w sposób pokazany na rys. 3 i 4. Zakładamy, że działa na nią liniowo zmienne ciśnienie boczne, którego gradient opisany jest wzorem (1.1). Ponieważ brak jest wyporu tulei, gdyż przylega ona szczelnie



Rys. 3



Rys. 4

do idealnie szorstkiej podstawy, przeto nie ulega ona zniszczeniu pod wpływem przyłożonego ciśnienia. Przyłożymy zatem dodatkowo do swobodnego denka tulei moment skręcający M .

Interesować nas będzie wartość momentu, przy której tuleja ulegnie zniszczeniu.

Rozwiążemy zadanie o nośności granicznej tulei w ramach modelu materiału sztywno-idealnie plastycznego z warunkiem plastyczności Hubera. Rozważania przeprowadzimy w układzie współrzędnych kartezjańskich x, y, z , w którym oś z pokrywa się z osią tulei, a na płaszczyźnie $z=0$ panuje ciśnienie $\sigma \equiv 0$. Ponieważ kierunki działania momentu M i naprężenia σ będą dalej miały istotne znaczenie, przeto kierunki pokazane na (rys. 3 i 4) przyjmujemy za ujemne.

Zakładamy, że w chwili osiągnięcia nośności granicznej panuje w tulei następujący stan naprężenia:

$$(1.2) \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma = \mu_0, z, \quad \tau_{xy} = 0,$$

gdzie $\mu_0 = \text{const}$ określone jest wzorem (1.1). Przy tych założeniach powinny być spełnione następujące równania:

quasi-statyczne równania ruchu

$$(1.3) \quad \tau_{xz, z} = 0, \quad \tau_{yz, z} = 0, \quad \tau_{xz, x} + \tau_{yz, y} = -\mu_0 = \text{const};$$

warunek plastyczności

$$(1.4) \quad \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2;$$

prawo plastycznego płynięcia

$$(1.5) \quad V_{x,x}=0, \quad V_{y,y}=0, \quad V_{z,z}=0, \quad V_{x,y}+V_{y,x}=0, \quad \frac{\tau_{xz}}{V_{x,z}+V_{z,x}} = \frac{\tau_{yz}}{V_{y,z}+V_{z,y}}.$$

Warunek nieściśliwości $V_{i,i}=0$ spełniony jest tożsamościowo.

Z równań (1.2)–(1.3)₂ wynika, że w strefie plastycznej tulei istnieje rodzina powierzchni cylindrycznych, których ślady na przekroju poprzecznym tulei pojawiają się jako trajektorie naprężeń stycznych.

Oznaczmy przez $\theta(x, y)$ kąt nachylenia stycznej do trajektorii naprężeń stycznych do osi x . Wówczas możemy napisać:

$$(1.6) \quad \tau_{xz} = k \cos \theta, \quad \tau_{yz} = k \sin \theta.$$

Warunek plastyczności (1.4) będzie wtedy spełniony tożsamościowo, a równanie (1.3)₃ przyjmie postać

$$(1.7) \quad \theta_{,x} \sin \theta - \theta_{,y} \cos \theta = \frac{\mu_0}{k} = \text{const.}$$

Niech $\{\alpha, \beta\}$ będzie ortogonalną siatką w płaszczyźnie x, y , dla której α -linie są trajektoriami naprężeń stycznych. Jej β -linie nazywać będziemy liniami poślizgu. Siatkę tę można opisać za pomocą funkcji

$$(1.8) \quad x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta).$$

Oznaczamy przez h_α, h_β parametry Lamégo tej siatki, przez ds_α i ds_β różniczkowe przyrosty długości α -linii i β -linii oraz przez $\kappa^{(\alpha)}$ i $\kappa^{(\beta)}$ krzywizny tych linii. Otrzymamy wówczas znane związki (por. np. [1], str. 152):

$$(1.9) \quad \kappa^{(\alpha)} = \frac{d\theta}{ds_\alpha} = \frac{\theta_{,x}}{h_\alpha} = \theta_{,x} \cos \theta + \theta_{,y} \sin \theta, \quad \kappa^{(\beta)} = \frac{d\theta}{ds_\beta} = \frac{\theta_{,y}}{h_\beta} = -\theta_{,x} \sin \theta + \theta_{,y} \cos \theta.$$

Widzimy więc, że równanie plastycznej równowagi (1.3)₃ można przedstawić w następującej równoważnej postaci:

$$(1.10) \quad \kappa^{(\beta)} = -\frac{\mu_0}{k} = \text{const.}$$

Wniosek. Linie poślizgu są okręgami o stałym promieniu

$$(1.11) \quad R_0 = \frac{k}{|\mu_0|}.$$

Dla $\mu_0=0$ otrzymujemy rodzinę linii prostych, co odpowiada zwykłemu skręcaniu.

Rozważmy teraz przypadek, w którym tuleja osadzona jest na trzpieniu. Warunki brzegowe dla naprężeń na zewnętrznym brzegu przekroju poprzecznego tulei będą miały postać

$$(1.12) \quad \tau_{xz} \cos \vartheta + \tau_{yz} \sin \vartheta = 0,$$

gdzie ϑ jest kątem nachylenia normalnej do brzegu do osi x . Równanie (1.12) jest spełnione, gdy $\vartheta \equiv \theta$ lub $\vartheta \equiv -\theta$. Oznacza to, że brzeg zewnętrzny jest trajektorią naprężeń stycznych lub obwiednią takich trajektorii. Podobnie okazuje się, że brzeg

wewnętrzny z uwagi na idealnie szorstki kontakt pomiędzy tuleją a trzpieniem jest linią poślizgu lub obwiednią takich linii.

W przypadku, gdy tuleja osadzona jest wewnątrz rury, brzeg wewnętrzny jest trajektorią naprężeń stycznych lub obwiednią takich trajektorii, brzeg zewnętrzny jest linią poślizgu lub obwiednią takich linii.

Tak więc problem znalezienia naprężeń w obu przypadkach sprowadzony został do zbudowania siatki ortogonalnej specjalnego typu: składa się ona z rodziny okręgów (linii poślizgu) i ortogonalnych do nich trajektorii naprężeń stycznych, przy czym brzegi wewnętrzny i zewnętrzny tej siatki stanowią jej linie nie należące do tej samej rodziny lub obwiednie takich linii.

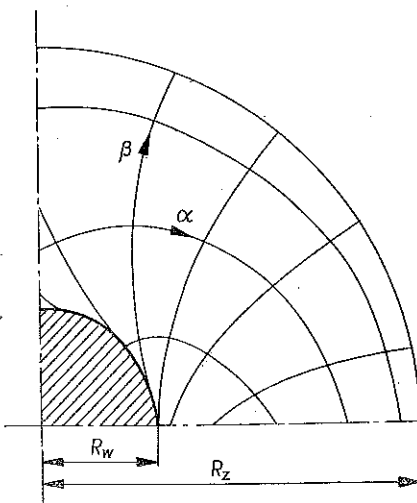
Opierając się na powyższych wnioskach zbudujemy w p. 2 siatki linii poślizgu i trajektorii naprężeń stycznych, a w p. 3 znajdziemy graniczny moment skręcający dla obu przypadków zamocowania tulei. W p. 4 opiszemy kinematykę początkowego płynięcia tulei. Pewne uogólnienia podanych rozwiązań przedstawimy w p. 5. Dodatek zawiera metodę budowania płaskich siatek ortogonalnych z rodziną okręgów o stałym promieniu i opis siatek wykorzystanych w pracy.

2. SIATKI LINII POŚLIZGU I TRAJEKTORII NAPRĘŻEŃ STYCZNYCH

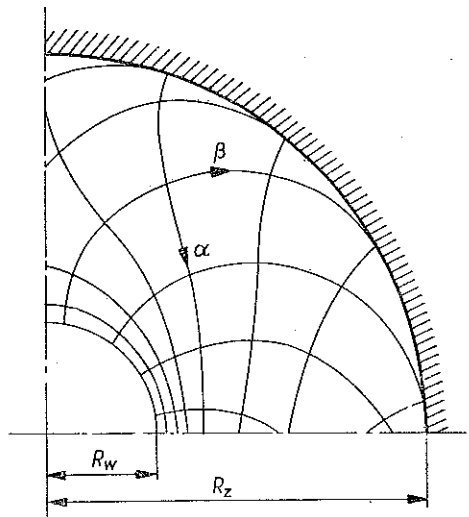
Korzystając z wyników podanych na końcu pracy w Dodatku dla tulei osadzonej na trzpieniu zgodnie z p. 1 przyjmujemy rodzinę trajektorii naprężeń stycznych, opisaną wzorami (rys. 5):

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x\{\alpha, [\beta]\} &= R \cos \bar{\alpha} - R_0 \sin \{\bar{\alpha} - \bar{\varphi}(\bar{\alpha}, [\bar{\beta}])\}, \\ y\{\alpha, [\beta]\} &= R \sin \bar{\alpha} + R_0 \cos \{\bar{\alpha} - \bar{\varphi}(\bar{\alpha}, [\bar{\beta}])\}, \end{aligned}$$

gdzie kąt $\bar{\varphi}(\bar{\alpha}, [\bar{\beta}])$ określony jest wzorem (A.14) oraz $\alpha \equiv \bar{\alpha}R$, $\beta \equiv \bar{\beta}R$. Wówczas α jest parametrem bieżącym ustalonej trajektorii, a β jest parametrem numerującym linie tej rodziny.



Rys. 5



Rys. 6

Zakładamy, że zewnętrzny kontur przekroju poprzecznego tulei jest linią asymptotyczną trajektorii naprężeń stycznych. Wówczas przy założeniu (1.1) kontur wewnętrzny będzie obwiednią β -okręgów. Aby to pokazać, oznaczmy przez R promień linii środków β -okręgów. Na mocy wzoru (A.15) mamy

$$(2.2) \quad R = \sqrt{R_z^2 + R_0^2}.$$

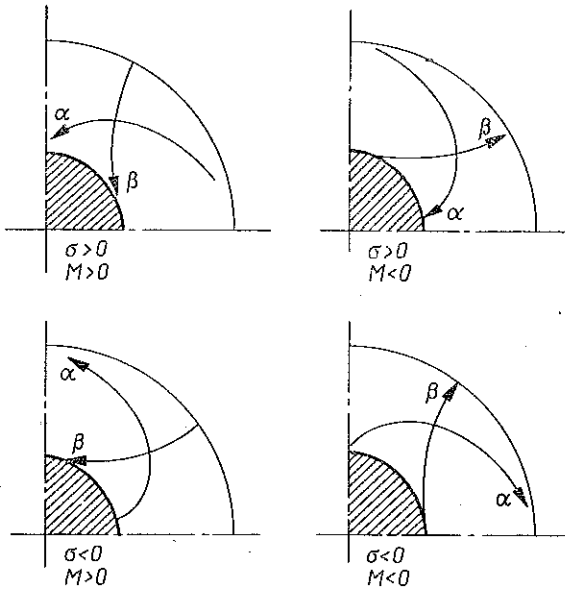
Z drugiej strony ze względu na (1.1) i (1.11) zachodzi związek

$$(2.3) \quad 2R_0 R_w = R_z^2 - R_w^2.$$

Rugując R_z^2 z (2.2) i (2.3) otrzymujemy promień wewnętrznej obwiedni β -okręgów:

$$(2.4) \quad R - R_0 = R_w,$$

co należało wykazać. Oznacza to, że z chwilą osiągnięcia nośności granicznej cała tuleja ulega uplastycznieniu.



Rys. 7

Dla tulei wewnątrz rury siatkę linii poślizgu i trajektorii naprężeń stycznych opisują wzory (rys. 6)

$$(2.5) \quad \begin{aligned} x\{\alpha, [\beta]\} &= R \cos \bar{\alpha} - R_0 \sin \{\bar{\alpha} - \bar{\varphi}(\bar{\alpha}, [\bar{\beta}])\}, \\ y\{\alpha, [\beta]\} &= R \sin \bar{\alpha} + R_0 \cos \{\bar{\alpha} - \bar{\varphi}(\bar{\alpha}, [\bar{\beta}])\}, \end{aligned}$$

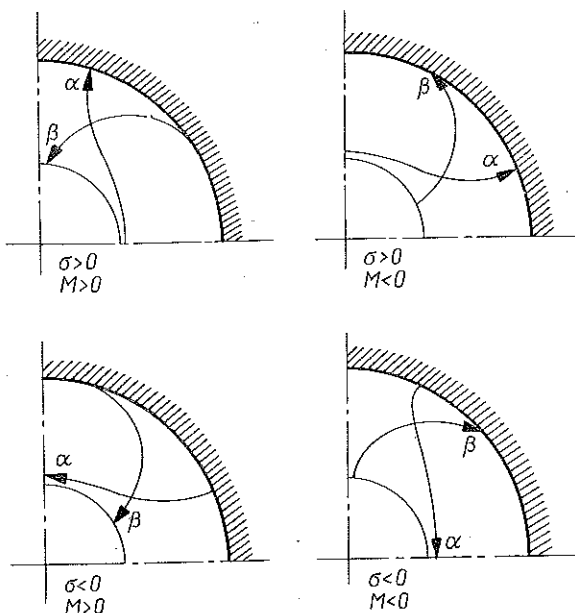
gdzie kąt $\bar{\varphi}(\bar{\alpha}, [\bar{\beta}])$ dany jest wzorem (A.13) oraz $\alpha \equiv \bar{\alpha}R$, $\beta \equiv \bar{\beta}R$. W tym przypadku kontur wewnętrzny przekroju poprzecznego tulei jest linią asymptotyczną trajektorii naprężeń stycznych, a zewnętrzny obwiednią β -okręgów. Istotnie, mamy teraz

$$(2.6) \quad R = \sqrt{R_w + R_0}.$$

Ponieważ dalej musi spełniony być wzór (2.3), przeto

$$(2.7) \quad R + R_0 = R_z,$$

co oznacza uplastycznienie całej tulei.



Rys. 8

Zwroty α -linii i β -linii zależą od kierunków przyłożonego ciśnienia σ i momentu M . Poprawne siatki linii poślizgu i trajektorii naprężeń stycznych, przy których spełniony jest warunek nieujemności mocy dysypowanej dla tulei osadzonej na trzpieniu, przedstawione są na rys. 7, a dla tulei osadzonej w rurze na rys. 8.

3. GRANICZNY MOMENT SKRĘCAJĄCY

Moment skłęcający, powodujący uplastycznienie tulei, otrzymujemy ze wzoru

$$(3.1) \quad M_0 = \int_{\Omega} (x\tau_y - y\tau_x) dx dy,$$

gdzie Ω jest przekrojem poprzecznym tulei.

Przechodząc do zmiennych $\bar{\alpha}$ i $\bar{\varphi}$ (rys. 9) mamy

$$(3.2) \quad M_0 = \varepsilon \int_{\bar{\varphi}_0}^{\frac{\pi}{2}} [x(\bar{\alpha}, \bar{\varphi}) \tau_y(\bar{\alpha}, \bar{\varphi}) - y(\bar{\alpha}, \bar{\varphi}) \tau_x(\bar{\alpha}, \bar{\varphi})] |D(\bar{\alpha}, \bar{\varphi})| d\bar{\alpha} d\bar{\varphi}$$

gdzie

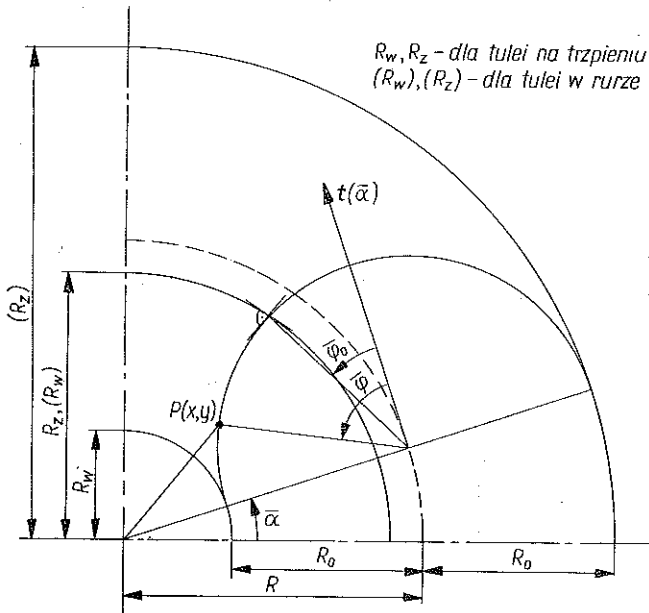
$$(3.3) \quad \bar{\varphi}_0 = \arcsin \frac{R_0}{r + \varepsilon R_0},$$

$\varepsilon=1$, $r \equiv R_w$ dla tulei na trzpieniu; $\varepsilon=-1$, $r \equiv R_z$ dla tulei wewnątrz rury oraz (por. rys. 9)

$$\begin{aligned} x(\bar{\alpha}, \bar{\varphi}) &= (r + \varepsilon R_0) \cos \bar{\alpha} - R_0 \sin(\bar{\alpha} - \bar{\varphi}), \\ y(\bar{\alpha}, \bar{\varphi}) &= (r + \varepsilon R_0) \sin \bar{\alpha} + R_0 \cos(\bar{\alpha} - \bar{\varphi}), \\ |D(\bar{\alpha}, \bar{\varphi})| &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \bar{\alpha}} & \frac{\partial x}{\partial \bar{\varphi}} \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{\alpha}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{\varphi}} \end{array} \right| = R_0 (r + \varepsilon R_0) \cos \bar{\varphi}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\tau_x = -\frac{k}{\cos \bar{\varphi}} [\sin \bar{\alpha} + \sin \bar{\varphi} \cos(\bar{\alpha} - \bar{\varphi})],$$

$$\tau_y = \frac{k}{\cos \bar{\varphi}} [\cos \bar{\alpha} - \sin \bar{\varphi} \sin(\bar{\alpha} - \bar{\varphi})].$$



Rys. 9

Podstawiając (3.4) do (3.2) otrzymujemy:

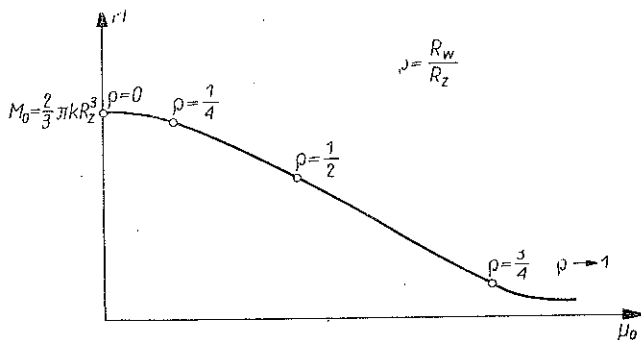
1) dla tulei na trzpieniu

$$(3.5) \quad M_0 = \frac{\pi k}{2} R_0 (R_w + R_0) [(2R_w + 3R_0)(\pi - 2\bar{\varphi}_0) + 4(R_w + 2R_0) \cos \bar{\varphi}_0 + R_0 \sin 2\bar{\varphi}_0];$$

2) dla tulei wewnątrz rury

$$(3.6) \quad M_0 = \frac{\pi k}{2} R_0 (R_z - R_0) [(2R_z - R_0)(\pi + 2\bar{\varphi}_0) - 4R_z \cos \bar{\varphi}_0 - R_0 \sin 2\bar{\varphi}_0].$$

Ze wzorów (3.5) i (3.6) wynika, że moment graniczny M_0 nie zależy od wysokości tulei h . Podamy pewną interpretację otrzymanych wyników. Załóżmy, że badamy nośność graniczną szeregu tulei o tym samym promieniu zewnętrznym i malejącym do zera promieniu wewnętrznym. Odpowiednie gradienty ciśnień μ_0 , obciążające tuleje zgodnie ze wzorem (1.1) też dążą do zera. Na mocy wzoru (1.9)₁ promienie β -okręgów dążą do nieskończoności, a moment M_0 do wielkości $2\pi k R_2^3/3$. Zatem w przejściu granicznym przy $\mu_0=0$ otrzymujemy rozwiązanie opisujące zwykłe skręcanie pręta kołowego. Rysunek 10 pokazuje zależność pomiędzy M_0 i μ_0 dla tulei o tym samym promieniu zewnętrznym i różnych grubościach.



Rys. 10

Uwaga 1. Podane rozwiązania są oczywiście poprawne w przypadku, gdy na tuleję działa ciśnienie opisane wzorem $\sigma = \mu_0 z + \sigma_0$, gdzie $\sigma_0 = \text{const}$. Dotyczy to również pól prędkości rozważanych w p. 4.

4. POLA PRĘDKOŚCI

Z równań (1.5), opisujących prawo plastycznego płynięcia, otrzymujemy następującą klasę pól prędkości:

$$(4.1) \quad V_x = \omega yz + C_1, \quad V_y = -\omega xz + C_2, \quad V_z = w(x, y),$$

gdzie $\omega, C_1, C_2 = \text{const}$ oraz

$$(4.2) \quad \frac{\cos \theta}{\omega y + w_{,x}} = \frac{\sin \theta}{-\omega x + w_{,y}}.$$

Jeżeli wprowadzimy kąt $\vartheta = \theta - \pi/2$, to wzór (4.2) przyjmie postać (por. [1], str. 154):

$$(4.3) \quad \frac{dw}{dn} = \omega e(x, y),$$

gdzie n jest długością β -okręgu, mierzoną od wewnętrznego konturu przekroju poprzecznego tulei do danego punktu; $e = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta$ jest mimośrodem β -okręgu, tzn. odległością stycznej do β -okręgu w danym punkcie od osi tulei.

Jeżeli przyjmiemy, że na wewnętrznym konturze tulei $w(x, y) = w_0 = \text{const}$, to otrzymamy

$$(4.4) \quad w(x, y) = \omega e(x, y) n(x, y) + w_0.$$

Ponieważ trzpień i rura, przylegające do tulei, są elementami sztywnymi, przeto

$$(4.5) \quad \omega = C_1 = C_2 = 0.$$

Pole prędkości (w obu przypadkach osadzenia tulei) jest zatem następujące:

$$(4.6) \quad V_x = 0, \quad V_y = 0, \quad V_z = w_0 = \text{const}.$$

Oznacza to, że w chwili osiągnięcia nośności granicznej uplastyczniona tuleja ma tendencję do zsunęcia się z trzpienia lub rury.

U w a g a 2. Przyjmijmy, że trzpień i rura są wykonane z materiału sprężystego, przenoszącego część momentu skręcającego, a tuleja z materiału sprężysto-idealnie plastycznego o tym samym współczynniku sprężystości na ścinanie. Wówczas w chwili całkowitego uplastycznienia tulei otrzymujemy następującą kinematykę:

$$(4.7) \quad V_x = \omega yz, \quad V_y = -\omega xz, \quad V_z = \omega e(x, y) n(x, y) + w_0.$$

Stałą ω interpretujemy jako prędkość zmiany jednostkowego kąta skręcania. W tym przypadku uplastyczniona tuleja ulega deplanacji i zsuwa się ruchem śrubowym z trzpienia lub rury.

5. PEWNE UOGÓLNIENIA

Podane wyżej rozwiązania można również otrzymać na innej drodze, wykorzystując wyniki prac [2 i 3]. W pracy [2] stwierdzono, że jeżeli materiał sztywno-idealnie plastyczny znajduje się w ruchu, dla którego w każdej chwili istnieje rodzina \mathcal{L} równoległych nierozciągliwych płaszczyzn, zależna od parametru z , to wówczas:

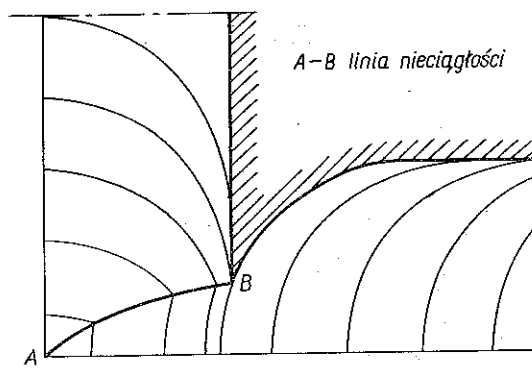
1) na każdej z tych płaszczyzn panuje stałe ciśnienie hydrostatyczne, zależne liniowo od parametru z zgodnie ze wzorem

$$\sigma = \mu_0 z + \sigma_0 \quad \text{dla} \quad \mu_0, \sigma_0 = \text{const};$$

2) istnieje również ortogonalna do rodziny \mathcal{L} rodzina \mathcal{M} powierzchni chwilowo nierozciągliwych, tworząca układ walców kołowych o stałym promieniu $R_0 = k/|\mu_0|$, gdzie k jest wytrzymałością materiału na ścinanie. Ślady powierzchni rodziny \mathcal{M} na płaszczyznach z \mathcal{L} tworzą więc rodzinę okręgów o promieniu R_0 . Budując rodzinę linii ortogonalnych do tych okręgów, otrzymamy trajektorie naprężeń stycznych (por. [2]). W pracy [3] opisano kinematykę ośrodka poruszającego się w opisany wyżej sposób.

Pojawia się zatem możliwość uogólnienia podanych rozwiązań na inne elementy przyrmatyczne, skręcane i ściskane lub skręcane i rozciągane, osadzone na sztywnych, idealnie szorstkich trzpieniach lub rurach. Kontur zewnętrzny przekroju poprzecznego tych elementów może być dowolny. Natomiast kontur wewnętrzny, a zatem i kształt trzpienia lub rury, będzie związany z wartością gradientu μ_0 przyłożonego ciśnienia. Dla elementów osadzonych na trzpieniu, dokonując przejścia granicznego dla $\mu_0 \rightarrow 0$, otrzymamy klasę rozwiązań skręcanych prętów przyrmatycznych.

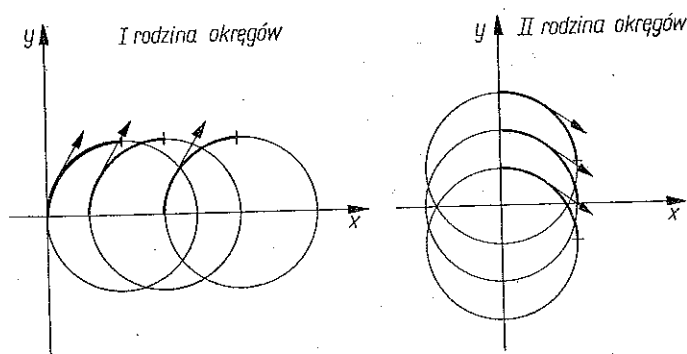
Rozpatrzmy najpierw naroże tworzące kąt prosty. Jako siatkę linii poślizgu można przyjąć kombinację siatek opisanych wzorami (A.18) – (A.19). Otrzymamy wówczas rozwiązanie przedstawione na rys. 11. Kontur zewnętrzny jest tu linią



Rys. 11

asymptotyczną trajektorii naprężeń stycznych, a wewnętrzną obwiednią β -okręgów. Linia AB jest linią nieciągłości naprężeń stycznych.

Wyprowadzimy równanie tej linii. Skorzystamy z tego, że styczne do linii AB są dwusiecznymi kątów, jakie tworzą styczne do przecinających się na niej β -okrę-



Rys. 12

gów. Na rys. 12 pokazane są dwie rodziny okręgów. Pole wersorów stycznych do okręgów I rodziny jest następujące:

$$(5.1) \quad \mathbf{t}_1(x, y) = \frac{1}{R_0} \{x, \sqrt{R_0^2 - x^2}\} \quad \text{dla} \quad 0 < x < R_0,$$

a dla rodziny II ma postać

$$(5.2) \quad \mathbf{t}_2(x, y) = \frac{1}{R_0} \{\sqrt{R_0^2 - y^2}, y\} \quad \text{dla} \quad 0 < y < R_0.$$

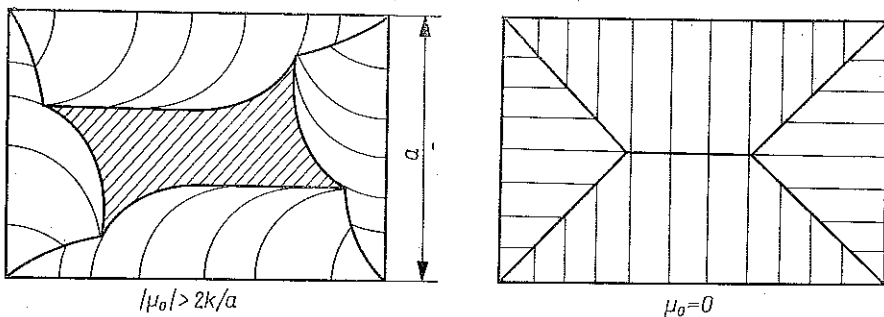
Stąd mamy określone pole wektorów dwusiecznych kątów między stycznymi okręgów z I i II rodziny:

$$(5.3) \quad \mathbf{t}_0 = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 = \frac{1}{R_0} (x + \sqrt{R_0^2 - y^2}, \quad -y + \sqrt{R_0^2 - x^2}).$$

Zatem trajektorie tego pola opisuje równanie

$$(5.4) \quad \frac{dx}{x + \sqrt{R_0^2 - y^2}} = \frac{dy}{-y + \sqrt{R_0^2 - x^2}}.$$

Równanie linii AB jest całką szczególną równania (5.4) przy warunku $y(0) = 0$.



Rys. 13

Ponieważ (5.4) można przedstawić w postaci

$$(5.5) \quad \frac{1}{2} d \left(x \sqrt{R_0^2 - x^2} + R_0^2 \arcsin \frac{x}{R_0} \right) + \\ + \frac{1}{2} d \left(y \sqrt{R_0^2 - y^2} + R_0^2 \arcsin \frac{y}{R_0} \right) - d(xy) = 0,$$

więc natychmiast otrzymujemy równanie linii AB

$$(5.6) \quad x \sqrt{R_0^2 - x^2} + y \sqrt{R_0^2 - y^2} + R_0^2 \arcsin \frac{x}{R_0} + R_0^2 \arcsin \frac{y}{R_0} - 2xy = 0.$$

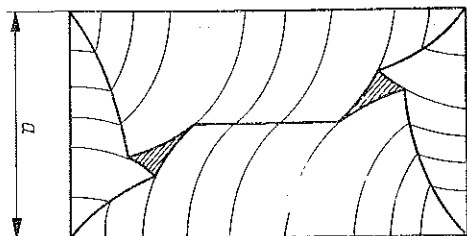
Opisana siatka pozwala zbudować rozwiązanie dla elementu, którego kontur zewnętrzny przekroju poprzecznego jest prostokątem. Kontur wewnętrzny będzie zależał od gradientu μ_0 przyłożonego ciśnienia.

Na rys. 13 przedstawiono siatkę linii poślizgu dla $|\mu_0| > 2k/a$, gdzie a jest krótszym bokiem przyjętego prostokąta. W przejściu granicznym przy $\mu_0 \rightarrow 0$ otrzymujemy zwykle skręcanie pręta przyzmatycznego o przekroju prostokątnym. Pole prędkości jest takie samo jak w przypadku pierścienia osadzonego na trzpieniu.

Uwaga 3. Dla $0 < |\mu_0| < 2k/a$ możemy otrzymać przypadek zdegenerowany, pokazany na rys. 14. Środkowa część trzpienia tworzy tu sztywną płaszczyznę obciążoną z obu stron zgodnie skierowanymi siłami stycznymi. Na płaszczyźnie

tej występuje nieciągłość składowej normalnej wektora naprężeń stycznych, co w przypadku zwykłej powierzchni nieciągłości naprężeń byłoby niedopuszczalne.

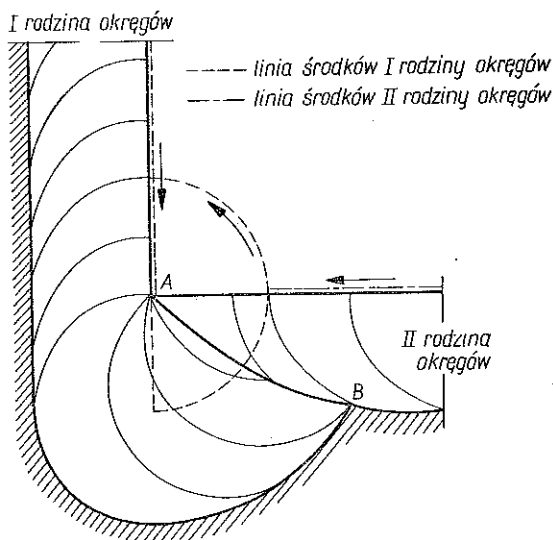
Przypadek ten nie wystąpi dla przekroju kwadratowego.



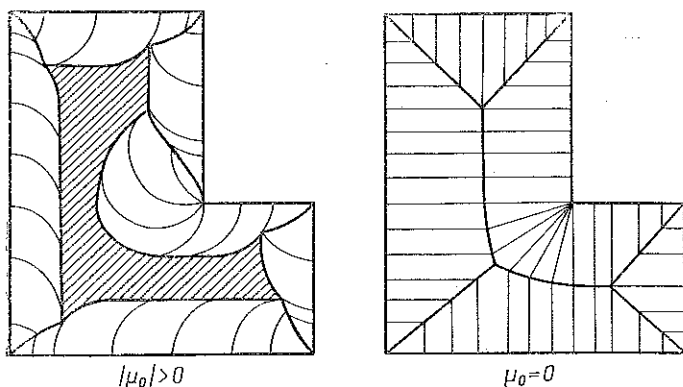
Rys. 14

W dalszym ciągu rozpatrzmy naroże tworzące kąt $3\pi/2$. Jako siatkę linii poślizgu i trajektorii naprężeń stycznych można przyjąć kombinację siatek opisanych wzorami (A.16) oraz (A.18) i (A.19). Otrzymujemy wówczas rozwiązanie przedstawione na rys. 15.

Powyższe wyniki mogą posłużyć do zbudowania siatki dla elementu pokazanego na rys. 16. Dla $\mu_0=0$ otrzymujemy zwykle skręcanie tego elementu.



Rys. 15



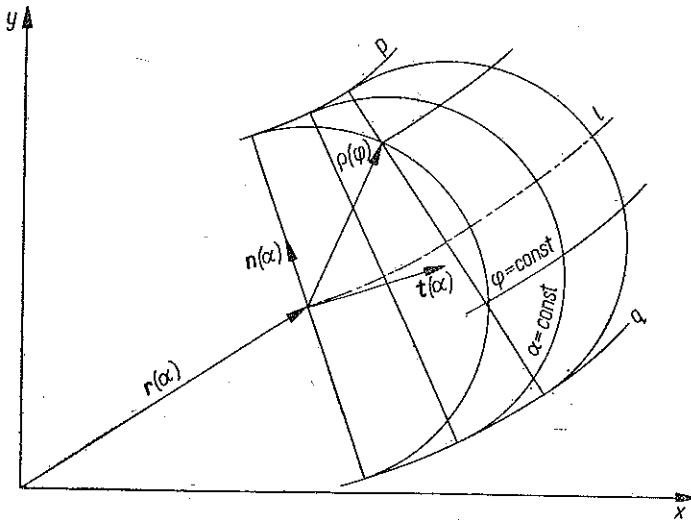
Rys. 16

DODATEK. PŁASKIE SIATKI ORTOGONALNE Z RODZINĄ OKRĘGÓW O STAŁYM PROMIENIU

Rozwiążemy zadanie o konstrukcji rodziny linii ortogonalnych do danej płaskiej, jednoparametrowej rodziny okręgów o stałym promieniu. Rodzinę okręgów o promieniu R_0 opiszemy ustalając promień wodzący linii środków tych okręgów (linia l rys. 17):

$$(A.1) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha),$$

gdzie α jest parametrem naturalnym linii l . Można wykazać, że dwie gałęzie obwiedni rodziny okręgów (linie p i q) stanowią zbiór punktów leżących na prostych prostopadłych do l odległych od niej o R_0 .



Rys. 17

Równanie rodziny okręgów zapiszemy w specjalnie dobranym krzywoliniowym, nieortogonalnym układzie współrzędnych α, φ . Niech $\mathbf{t}(\alpha)$ i $\mathbf{n}(\alpha)$ oznaczają wersory styczny i normalny do linii l w punkcie $\mathbf{r}(\alpha)$. Z punktu $\mathbf{r}(\alpha)$, który jest środkiem pewnego okręgu z danej rodziny, prowadzimy promień wodzący $\boldsymbol{\rho}(\varphi)$ taki, że $|\boldsymbol{\rho}(\varphi)| = R_0$. Przez φ oznaczmy kąt nachylenia promienia $\boldsymbol{\rho}(\varphi)$ do wersora $\mathbf{t}(\alpha)$ (rys. 17). Wielkość φ określimy wzorem:

$$(A.2) \quad \varphi = \bar{\varphi} R_0.$$

Dowolny punkt, przez który przechodzi okrąg z danej rodziny, ma zatem następujący promień wodzący:

$$(A.3) \quad \mathbf{x} = \mathbf{R}(\alpha, \varphi) = \mathbf{r}(\alpha) + \boldsymbol{\rho}(\varphi).$$

Opisany układ współrzędnych przedstawiony jest na rys. 17. W układzie tym równanie danej rodziny okręgów ma postać

$$(A.4) \quad \mathbf{x} = \mathbf{R}_1([\alpha], \varphi) = \mathbf{r}([\alpha]) + R_0 \left\{ \mathbf{t}([\alpha]) \cos \frac{\varphi}{R_0} + \mathbf{n}([\alpha]) \sin \frac{\varphi}{R_0} \right\}.$$

W nawiasach prostokątnych będziemy podawać parametr numerujący linie rozważanej rodziny, bez nawiasów parametr bieżący ustalonej linii.

Odpowiednie równanie rodziny linii $\varphi = \text{const}$ będzie miało postać

$$(A.5) \quad \mathbf{x} = \mathbf{R}_1^*(\alpha, [\varphi]) = \mathbf{r}(\alpha) + R_0 \left\{ \mathbf{t}(\alpha) \cos \frac{[\varphi]}{R_0} + \mathbf{n}(\alpha) \sin \frac{[\varphi]}{R_0} \right\}.$$

Z drugiej strony wiadomo, że równanie rodziny okręgów można sparametryzować inaczej, np. $\mathbf{x} = \mathbf{R}_2([\alpha], \beta)$. Przyjmujemy, że β jest parametrem, dla którego równanie $R_2^* = R_2^*(\alpha, [\beta])$ opisuje rodzinę linii ortogonalnych do danej rodziny okręgów. Jeżeli założymy, że parametry φ i β związane są równaniem $\varphi = \varphi(\alpha, \beta)$, przy $\varphi, \beta \neq 0$, to równanie poszukiwanej przez nas rodziny linii można napisać w postaci

$$(A.6) \quad \mathbf{x} = \mathbf{R}_2^*(\alpha, [\beta]) = \mathbf{R}_1^*\{\alpha; \varphi(\alpha, [\beta])\} = \\ = \mathbf{r}(\alpha) + R_0 \left\{ \mathbf{t}(\alpha) \cos \frac{\varphi(\alpha, [\beta])}{R_0} + \mathbf{n}(\alpha) \sin \frac{\varphi(\alpha, [\beta])}{R_0} \right\},$$

natomiast równanie rodziny okręgów będzie miało postać

$$(A.7) \quad \mathbf{x} = \mathbf{R}_2([\alpha], \beta) = \mathbf{R}_1\{[\alpha]; \varphi([\alpha], \beta)\} = \\ = \mathbf{r}([\alpha]) + R_0 \left\{ \mathbf{t}([\alpha]) \cos \frac{\varphi([\alpha], \beta)}{R_0} + \mathbf{n}([\alpha]) \sin \frac{\varphi([\alpha], \beta)}{R_0} \right\}.$$

Pole wektorów stycznych do rodziny okręgów określone jest równaniem

$$(A.8) \quad \mathbf{R}_{2,\beta} = \mathbf{R}_{1,\varphi} \varphi, \beta = \varphi, \beta \left(-\mathbf{t} \sin \frac{\varphi}{R_0} + \mathbf{n} \cos \frac{\varphi}{R_0} \right),$$

a pole wektorów stycznych do rodziny linii ortogonalnych do okręgów równaniem

$$(A.9) \quad R_{2,\alpha}^* = R_{1,\alpha}^* + R_{1,\varphi}^* \varphi, \alpha = \mathbf{t} + (\varphi, \alpha + \kappa R_0) \left(-\mathbf{t} \sin \frac{\varphi}{R_0} + \mathbf{n} \cos \frac{\varphi}{R_0} \right),$$

gdzie $\kappa(\alpha)$ jest krzywizną linii l .

Warunek ortogonalności

$$(A.10) \quad R_{2,\beta} R_{2,\alpha}^* = 0$$

sprowadza się do postaci

$$(A.11) \quad \varphi, \alpha - \sin \frac{\varphi}{R_0} + R_0 \kappa = 0.$$

Rozwiązując to równanie i podstawiając znalezione $\varphi = \varphi(\alpha, \beta)$ do równania (A.6), otrzymamy równanie rodziny linii ortogonalnych do danej rodziny okręgów.

Uwaga 4. Wzór ten jest poprawny również wtedy, gdy para: (\mathbf{t}, \mathbf{n}) i kąt $\bar{\varphi}$ jednocześnie zmieniają orientację.

Podamy rozwiązanie równania (A.11) dla przypadku szczególnego, gdy linia środków jest okręgiem o promieniu R :

$$(A.12) \quad \kappa(\alpha) \equiv \frac{1}{R} = \text{const.}$$

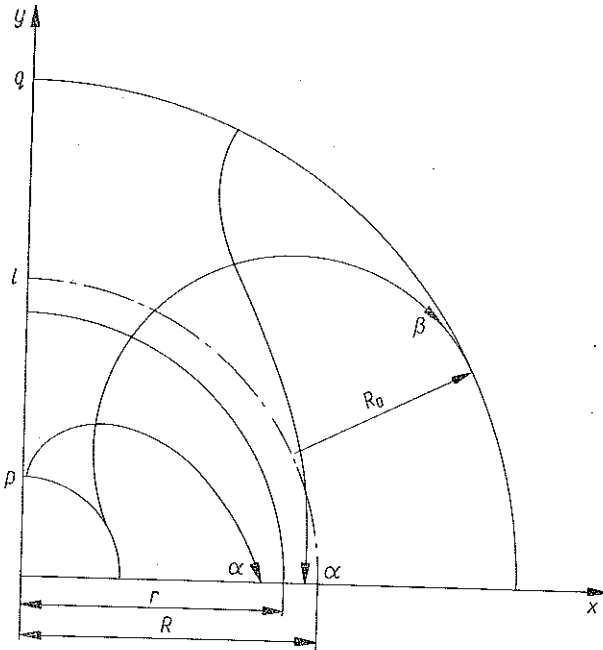
Wprowadzimy kąt $\bar{\alpha}$ jako kąt nachylenia promienia $r(\alpha)$ do ustalonej osi. Zatem $\alpha \equiv \bar{\alpha}R$. Ponadto niech $\beta \equiv \bar{\beta}R$. Przy $0 \leq \bar{\alpha} < 2\pi$ otrzymujemy następujące klasy rozwiązań:

a) Jeżeli $R > R_0$ (rys. 18), to:

$$(A.13) \quad \bar{\varphi} = \arcsin \left\{ R_0 \kappa + \frac{1 - R_0^2 \kappa^2}{R_0 \kappa + \operatorname{sh} \left[\frac{\alpha - \beta}{R_0 \kappa} \sqrt{1 - R_0^2 \kappa^2} \right]} \right\} \quad \text{dla} \quad -\frac{\pi}{2} < \bar{\varphi} < \bar{\varphi}_0,$$

oraz

$$(A.14) \quad \bar{\varphi} = \arcsin \left\{ R_0 \kappa + \frac{1 - R_0^2 \kappa^2}{R_0 \kappa + \operatorname{sh} \left[\frac{\alpha - \beta}{R_0 \kappa} \sqrt{1 - R_0^2 \kappa^2} \right]} \right\} \quad \text{dla} \quad \bar{\varphi}_0 < \bar{\varphi} < \frac{\pi}{2}.$$



Rys. 18

Dla $\bar{\varphi}_0 \equiv \arcsin R_0 \kappa$ otrzymujemy całkę szczególną będącą krzywą asymptotyczną dla pozostałych krzywych całkowych. Jest to okrąg o promieniu

$$(A.15) \quad r = \sqrt{R^2 - R_0^2}.$$

b) Jeżeli $R = R_0$ (rys. 19), to

$$(A.16) \quad \bar{\varphi} = -2 \left[\frac{\pi}{4} + \arctg(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \right] \quad \text{dla} \quad -\frac{\pi}{2} < \bar{\varphi} < \frac{\pi}{2}.$$

Dla $\bar{\varphi}_0 = \pi/2$ otrzymujemy punkt asymptotyczny krzywych całkowych.

c) Jeżeli $R < R_0$ (rys. 20), to

$$(A.17) \quad \bar{\varphi} = 2 \arctg \left\{ 1 - \frac{1}{R_0 \kappa} \left[\sqrt{R_0^2 \kappa^2 - 1} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha - \beta}{2 R_0 \kappa} \sqrt{R_0^2 \kappa^2 - 1} \right) \right] \right\}$$

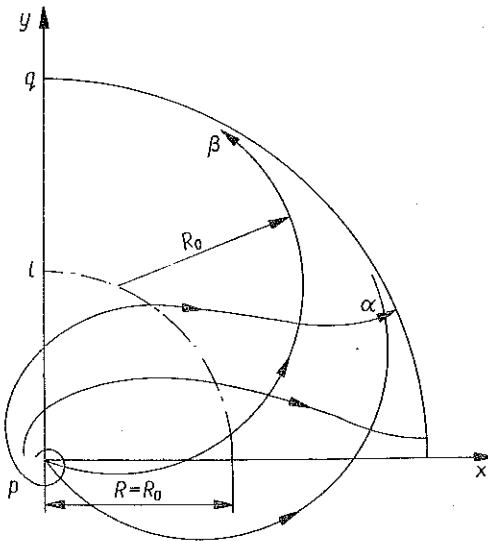
dla $-\frac{\pi}{2} < \bar{\varphi} < \frac{\pi}{2}$.

Osobno rozpatrzmy przypadek, gdy $R \rightarrow \infty$. Otrzymujemy wtedy (rys. 21)

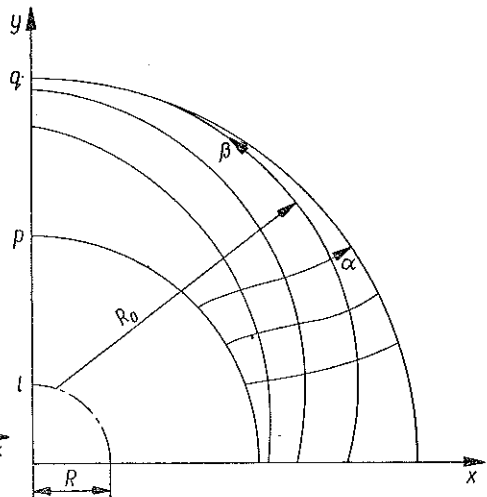
$$(A.18) \quad \bar{\varphi} = -\arctg \left(\exp \frac{\alpha - \beta}{R_0} \right) \quad \text{dla} \quad -\frac{\pi}{2} < \bar{\varphi} < 0$$

oraz

$$(A.19) \quad \bar{\varphi} = \arctg \left(\exp \frac{\alpha - \beta}{R_0} \right) \quad \text{dla} \quad 0 < \bar{\varphi} < \frac{\pi}{2}.$$



Rys. 19



Rys. 20

Dla $\bar{\varphi} \equiv 0$ otrzymujemy całkę szczególną, będącą krzywą asymptotyczną pozostałych krzywych całkowych. Jest nią prosta będąca linią środków. Parametr α jest jej parametrem długościowym.

Równanie (A.6) opisujące promień wodzący trajektorii naprężeń stycznych napiszemy we współrzędnych kartezjańskich x, y o wersorach kierunkowych osi $\mathbf{I}_x, \mathbf{I}_y$.

Promień wodzący linii środków jest dany w postaci

$$(A.20) \quad \mathbf{r}(\alpha) = X(\alpha) \mathbf{I}_x + Y(\alpha) \mathbf{I}_y.$$

Stąd wersory styczny i normalny tej linii są następujące:

$$(A.21) \quad \mathbf{t}(\alpha) = \dot{X}(\alpha) \mathbf{I}_x + \dot{Y}(\alpha) \mathbf{I}_y,$$

oraz

$$(A.22) \quad \mathbf{n}(\alpha) = \frac{1}{\kappa(\alpha)} [\ddot{X}(\alpha) \mathbf{I}_x + \ddot{Y}(\alpha) \mathbf{I}_y].$$

Poszukiwać będziemy równania określającego promienie wodzące trajektorie naprężeń stycznych w postaci

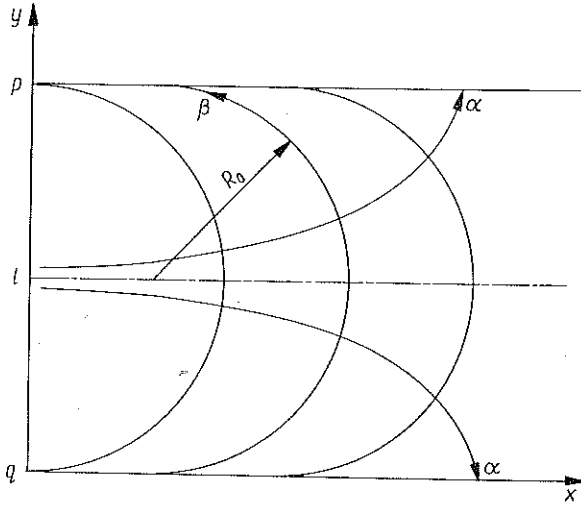
$$(A.23) \quad \mathbf{x} = x(\alpha, [\beta]) \mathbf{I}_x + y(\alpha, [\beta]) \mathbf{I}_y.$$

Rzutuując (A.6) na \mathbf{I}_x , \mathbf{I}_y i podstawiając (A.20) – (A.22), otrzymujemy

$$(A.24) \quad x = x(\alpha, [\beta]) = X(\alpha) + R_0 \left\{ \dot{X}(\alpha) \cos \frac{\varphi(\alpha, [\beta])}{R_0} + \frac{1}{\kappa(\alpha)} \ddot{X}(\alpha) \sin \frac{\varphi(\alpha, [\beta])}{R_0} \right\}$$

oraz

$$(A.25) \quad y = y(\alpha, [\beta]) = Y(\alpha) + R_0 \left\{ \dot{Y}(\alpha) \cos \frac{\varphi(\alpha, [\beta])}{R_0} + \frac{1}{\kappa(\alpha)} \ddot{Y}(\alpha) \sin \frac{\varphi(\alpha, [\beta])}{R_0} \right\}.$$



Rys. 21

Dla przypadku gdy linia środków jest okręgiem o promieniu R mamy

$$(A.26) \quad \mathbf{r}(\alpha) = R \cos \bar{\alpha} \mathbf{I}_x + R \sin \bar{\alpha} \mathbf{I}_y.$$

Stąd

$$(A.27) \quad x = x(\alpha, [\beta]) = R_0 \cos \bar{\alpha} - R_0 \sin \{ \bar{\alpha} - \bar{\varphi}(\bar{\alpha}, [\bar{\beta}]) \}$$

oraz

$$(A.28) \quad y = y(\alpha, [\beta]) = R_0 \sin \bar{\alpha} + R_0 \cos \{ \bar{\alpha} - \bar{\varphi}(\bar{\alpha}, [\bar{\beta}]) \},$$

gdzie $\alpha \equiv \bar{\alpha}R$, $\beta \equiv \bar{\beta}R$, $\varphi \equiv \bar{\varphi}R$.

Jeżeli $R \rightarrow \infty$ tak, aby linia środków pokryła się z osią x , to otrzymamy

$$(A.29) \quad x = x(\alpha, [\beta]) = \alpha + R_0 \cos \bar{\varphi}(\alpha, [\beta])$$

oraz

$$(A.30) \quad y = y(\alpha, [\beta]) = R_0 \sin \bar{\varphi}(\alpha, [\beta]),$$

gdzie $\varphi \equiv \bar{\varphi}R_0$ a α jest parametrem długości linii środków.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Zbiorowe, *Teoria plastyczności*, pod red. naukową W. OLSZAKA, P. PERZYNY, A. SAWCZUKA, PWN, Warszawa 1965.
2. W. GAMBIN, *Pewna klasa rozwiązań zagadnienia trójwymiarowego dla materiału sztywno-idealnie plastycznego z rodziną chwilowo nierozciągłych płaszczyzn*, Rozpr. Inżyn., 20, 2, 1972.
3. W. GAMBIN, *O ruchach izohorycznych z rodziną chwilowo nierozciągłych płaszczyzn*, Arch. Mech. Stos., 24, 2, 1972.

Резюме

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ КОЛЬЦЕВЫХ ТЕЛ ПРИ КРУЧЕНИИ С ЛИНЕЙНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ДАВЛЕНИЯ ВДОЛЬ ОБРАЗУЮЩЕЙ

В работе дано решение задачи о несущей способности кольца при кручении с линейно распределенной боковой нагрузке. Рассмотрены два случая: кольцо посаженное на жестком стержне и кольцо заключенное в жесткой трубе.

Полученные результаты обобщаются на кольцевые тела произвольного поперечного сечения. В предельном переходе, при отсутствии бокового давления, получаются решения, описывающие обычное кручение призматических стержней.

SUMMARY

LIMIT STATES OF TWISTED ELEMENTS
LOADED BY LINEARLY VARIABLE LATERAL PRESSURE

In the paper is solved the problem of load carrying capacity of a twisted rod of annular cross-section loaded by linearly variable lateral pressure. Two particular cases are considered: that of the ring mounted on a rigid pin and that of the ring clamped within a rigid pipe.

The results derived are then generalized to elements having arbitrary annular cross-sections. In the limit case of vanishing lateral pressure, the usual solutions describing the classical problem of torsion of cylindrical shafts are obtained.

N STYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 lutego 1972 r.