ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 22, 4, 655—668, 1974
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

PROBLEMY STANÓW RÓWNOWAGI SIŁ I ZGODNOŚCI PRZEMIESZCZEŃ W DYSKRETNYCH UKŁADACH SPRĘŻYSTYCH

BOGDAN OLSZOWSKI (KRAKÓW)

W pracy przeprowadzono rozważania nad interpretacją, powstawaniem i strukturą macierzy, liniowo niezależnych i jedorodnych układów równań równowagi sił i zgodności przemieszczeń. Ograniczono się przy tym do przypadku liniowych związków statycznych i kinematycznych oraz do węzłowego działania obciążeń. Wykorzystując jednorodny zapis równań zaproponowano jednolity i ogólny sposób analizy kineto-statycznych własności układów dyskretnych o więzach dwustronnych. Rozważania zilustrowano trzema przykładami układów prętowych pracujących głównie na zginanie i siły osiowe.

1. Wstęp

W dwoistych sformułowaniach statycznie i kinematycznie liniowych problemów mechaniki układów dyskretnych [4 i 5] pewne korzyści przynosi posługiwanie się równaniami równowagi sił i zgodności przemieszczeń przedstawionymi w postaci

$$HX=0, \quad Gx=0. \tag{1.1}$$

G i H są w tym przypadku odpowiednimi stałymi macierzami prostokątnymi, a X i x wektorami sił i przemieszczeń.

Ze względu na jednakowe i równoprawne potraktowanie wszystkich zmiennych statycznych X i kinematycznych x, zapis o postaci (1.1) pozwala przeprowadzić analizę związków i odpowiedniości pomiędzy tymi zmiennymi w sposób najbardziej ogólny.

W pracy przeprowadzono rozważania nad interpretacją, powstawaniem i strukturą macierzy G i H, pozwalające w dalszej kolejności na ustalenie właściwego podejścia do zagadnień związanych z tworzeniem ogólnych potencjałów energetycznych mechaniki układów dyskretnych o więzach dwustronnych [4]. Potencjały te są odpowiednimi funkcjami Lagrange'a, występującymi w dwu wzajemnie dualnych postaciach i uwzględniają równania więzów (1.1) w sposób alternatywny. Jak się okazuje, przekształcenie jednej postaci potencjału w drugą można przeprowadzić w sposób ogólny na gruncie transformacji Legendre'a [4 i 6] w oderwaniu od konkretnych własności fizycznych układu. Fakt ten wyjaśnia i uzasadnia potrzebę przeprowadzania rozważań nad problemami czysto kineto-statycznymi, związanymi wyłącznie z własnościami strukturalnymi układu.

Posługując się znanymi analogiami sieciowymi [7 i 8] można by równania (1.1) interpretować w odpowiedni sposób i dalsze rozważania przeprowadzać na gruncie teorii sieci. Takie podejście można spotkać w wielu pracach na temat nowoczesnej analizy i syntezy konstrukcji [1, 2 i 9].

W niniejszej pracy celowo zrezygnowano z odwoływania się do teorii sieci i posługiwania się jej terminologią, kładąc główny nacisk na ściśle mechaniczną interpretację wszystkich związków i pojęć występujących w rozważaniach. Potrzeba przedstawienia takiego podejścia wynika zdaniem autora z faktu, że czysto formalne wprowadzanie i wykorzystywanie pojęć teorii sieci w wielu zagadnieniach mechanicznych często niestety zaciemnia ich interpretację. Podejście tego rodzaju w niczym nie umniejsza znaczenia teorii sieci, lecz tylko traktuje ją jako teorię nadrzędną, wymagającą jednak odpowiedniej, indywidualnej interpretacji w konkretnych przypadkach szczególnych.

Dodatkową, ale jak się wydaje nie mniej ważną okolicznością, uzasadniającą stanowisko autora, są trudności na jakie napotyka sieciowe podejście do problemów obliczania układów nieregularnych, na przykład tzw. nieciągłych, zawierających przeguby i innego rodzaju oswobodzenia (releases) [3].

Treść pracy można tematycznie podzielić na dwie zasadnicze części dotyczące 1) wyboru i ilustracji sposobu tworzenia liniowo niezależnych równań równowagi sił i zgodności przemieszczeń (p. 2 i 3) oraz 2) analizy struktury układu przy założeniu, że macierze G i H są jedynymi źródłami informacji o jego własnościach (p. 4).

Dla uproszczenia rozważań i skoncentrowania uwagi na kwestiach zasadniczych ograniczono się w pracy do omówienia układów dyskretnych, obciążonych tylko węzłowo i pracujących głównie na zginanie i siły osiowe. Rozważania takie można odpowiednio uogólnić na przypadki bardziej złożone.

2. Związki pomiędzy macierzami G i H

Rozważmy układ, którego stan statyczny i kinematyczny można opisać w sposób jednoznaczny za pomocą wektorów X i x o współrzędnych, odpowiadających sobie wzajemnie. Współrzędne te są zmiennymi, opisującymi stany obciążenia i przemieszczenia wszystkich elementów i wszystkich węzłów układu. Na skutek istnienia ograniczeń określonych równaniami (1.1) nie wszystkie współrzędne stanu układu są zmiennymi niezależnymi.

Oznaczmy wektory zależnych i niezależnych zmiennych kinematycznych odpowiednio przez x_1 i x_2. Dzięki temu możemy napisać

$$Gx=(G_1, G_2)(x_1, x_2)^T=G_1 x_1+G_2 x_2=0. \tag{2.1}$$

Jeżeli równania zgodności przemieszczeń są liniowo niezależne, to wówczas G_1 jest nieosobliwą macierzą kwadratową i równanie (2.1) możemy rozwiązać względem zmiennej x_1:

$$x_1=-G_1^{-1} G_2 x_2. \tag{2.2}$$

Przyjmijmy jako wirtualne przemieszczenia x, spełniające równanie (2.1), i skorzystajmy z zasady prac wirtualnych uwzględniając (2.2):

$$X^T x \equiv X_1^T x_1+X_2^T x_2 \equiv X_1^T(-G_1^{-1} G_2 x_2)+X_2^T x_2 \equiv (X_2^T-X_1^T G_1^{-1} G_2) x_2=0.$$

Wobec dowolności zmiennej niezależnej x_2 otrzymujemy

$$X_2^T - X_1^T G_1^{-1} G_2 = 0 \tag{2.3}$$

jako warunek równowagi sił, przy czym X_1 i X_2 są wektorami zmiennych statycznych, odpowiadającymi wektorom x_1 i x_2. Zapisując (2.3) w postaci

$$X_2 = (G_1^{-1} G_2)^T X_1 \tag{2.4}$$

spostrzegamy, że X_1 odgrywa rolę zmiennej niezależnej, a X_2 — zależnej. Jednakowo indeksowane zmienne X_1 i x_1 (X_2 i x_2) odgrywają więc w zagadnieniu wzajemnie przeciwne role.

Wprowadźmy analogiczny do (2.1) zapis równań równowagi:

$$HX = (H_1, H_2)(X_1, X_2)^T = H_1 X_1 + H_2 X_2 = 0. \tag{2.5}$$

W przypadku gdy równania te są liniowo niezależne, musi z nich wynikać (2.4). Jest to jednak możliwe tylko wtedy, gdy H_2 jest nieosobliwą macierzą kwadratową i równanie (2.5) można rozwiązać względem zmiennej X_2:

$$X_2 = -H_2^{-1} H_1 X_1. \tag{2.6}$$

Z porównania (2.4) i (2.6) otrzymujemy

$$(G_1^{-1} G_2)^T = -H_2^{-1} H_1, \tag{2.7}$$

skąd wynika $H_1 G_1^T + H_2 G_2^T = 0$ i ostatecznie

$$HG^T = GH^T = 0. \tag{2.8}$$

Oznaczmy odpowiednio przez m i n liczby liniowo niezależnych równań równowagi i zgodności. Z przeprowadzonych rozważań wynika, że suma tych liczb jest równa liczbie współrzędnych każdego z wektorów X i x, a zatem jest równa wymiarowi przestrzeni stanów rozważanego układu.

Jeżeli wiersze macierzy G i H będziemy interpretować jako wektory $m+n$-wymiarowej przestrzeni stanów, to macierze te określają bazy dwu podprzestrzeni Ω_G i Ω_H o wymiarach odpowiednio n i m. Jak wynika z (2.8) każdy wektor jednej z baz jest ortogonalny względem każdego wektora drugiej bazy. Podprzestrzenie Ω_G i Ω_H są więc wzajemnie ortogonalne.

Rozwiązaniem równania $HX = 0$ jest każdy wektor X ortogonalny względem wszystkich wierszy macierzy H. Taki wektor musi się jednak dać przedstawić w postaci kombinacji liniowej wierszy macierzy G, a zatem musi być wektorem podprzestrzeni Ω_G. Na podstawie (2.4) stwierdzamy, że rozwiązania równania $HX = 0$ tworzą przestrzeń n-wymiarową, skąd wynika, że przestrzeń ta jest identyczna z podprzestrzenią Ω_G.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dotyczące rozwiązań równania $Gx = 0$ możemy stwierdzić, że przestrzenie rozwiązań równań (1.1) są identyczne odpowiednio z podprzestrzeniami Ω_G i Ω_H. Wiersze macierzy H można więc interpretować jako bazowe stany zgodności przemieszczeń, a wiersze macierzy G — jako bazowe stany równowagi sił.

Dla danego konkretnego układu mechanicznego liniowo niezależne równania (1.1) mogą przybierać różne postacie zależne od zastosowanego sposobu postępowania. Przejście od jednej postaci do drugiej można jednak również zrealizować w sposób czysto formalny. Oznaczmy w tym celu przez U i V dwie kwadratowe i nieosobliwe macierze odpowiednich stopni m i n i wprowadźmy do rozważań macierze $\tilde{H}$ i $\tilde{G}$ powstające z H i G w wyniku transformacji

$$\tilde{H}=UH, \quad \tilde{G}=VG. \tag{2.9}$$

Macierze $\tilde{H}$ i $\tilde{G}$ spełniają na mocy (2.8) związek

$$\tilde{H}\tilde{G}^T=\tilde{G}\tilde{H}^T=UH(VG)^T=UHG^TV=0$$

i określają nowe bazy w tych samych co poprzednio podprzestrzeniach Ω_H i Ω_G.

W związku z dowolnością wyboru macierzy U i V obydwie bazy przekształcają się zupełnie niezależnie od siebie. W szczególnym przypadku można przekształcić tylko jedną z baz pozostawiając drugą bez zmiany.

W wyniku transformacji (2.9) równania (1.1) przekształcają się w równoważne równania:

$$\tilde{H}X=0, \quad \tilde{G}x=0.$$

Dowolność towarzysząca układaniu równań równowagi i zgodności stwarza możliwości wyboru właściwej metody postępowania, która gwarantowałaby uzyskiwanie równań liniowo niezależnych o najwygodniejszej postaci.

Jedna z możliwych metod, jakie można tu zaproponować, polega na wykorzystaniu interpretacji wierszy macierzy H (G) jako bazowych stanów zgodności przemieszczeń (równowagi sił), wywołanych działaniem kolejnych jednostkowych zmiennych niezależnych $x_2^i=1$, $i=1, 2, ..., m$ ($X_1^j=1$, $j=1, 2, ..., n$). Przy takiej metodzie postępowania otrzymuje się bezpośrednio macierze

$$H=(H_2^{-1}H_1, E_m), \quad G=(E_n, G_1^{-1}G_2), \tag{2.10}$$

zawierające bloki jednostkowe E_m i E_n odpowiednio stopni m i n, pozwalające na natychmiastowe napisanie równań o postaci (2.6) i (2.2). Po uwzględnieniu (2.7) i wprowadzeniu oznaczenia

$$F=(H_2^{-1}H_1)^T=-G_1^{-1}G_2 \tag{2.11}$$

otrzymujemy zamiast (2.10), (2.6) i (2.2) odpowiednio

$$H=(F^T, E_m), \quad G=(E_n, -F) \tag{2.12}$$

oraz

$$F^TX_1+X_2=0, \quad x_1-Fx_2=0. \tag{2.13}$$

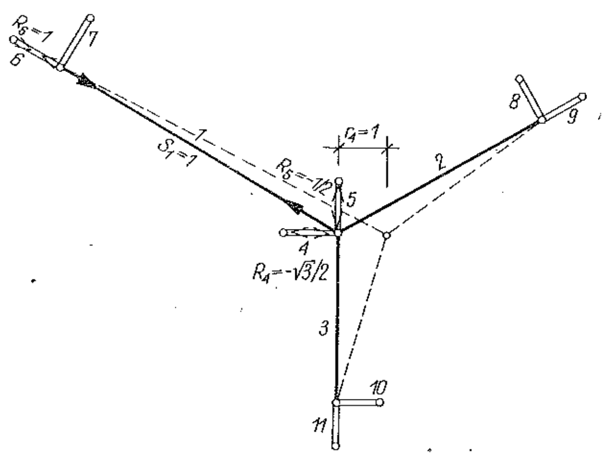
Podsumowując powyższe rozważania zwróćmy uwagę na fakt, że dokonany podział zmiennych X i x na zależne i niezależne wiąże się z odpowiednim podziałem kolumn macierzy układów równań (1.1), co najlepiej jest widoczne w (2.1) i (2.5). Jest rzeczą istotną, że zmienne zależne X_2 (x_1) zawsze odpowiadają tym kolumnom macierzy H (G), które są wzajemnie liniowo niezależne.

Maksymalną liczbę liniowo niezależnych kolumn dowolnej macierzy będziemy nazywać w dalszym ciągu jej bazą kolumnową. Baza ta może w szczególnym przypadku składać się z kolumn jednostkowych tak, jak to ma miejsce np. w (2.10). Ten przypadek jest równoważny rozwiązaniu układu równań względem tych zmiennych, które odpowiadają kolumnom bazowym [por. (2.12) i (2.13)].

3. Przykłady tworzenia macierzy G i H

Przy praktycznym stosowaniu proponowanej metody tworzenia macierzy G i H dla danego układu mechanicznego stajemy przed koniecznością dokonania wyboru zmiennych niezależnych.

Jako jedną z możliwości rozważymy przyjęcie za zmienne niezależne x_2 tych wszystkich przemieszczeń, które w sposób jednoznaczny określają zmiany położeń wszystkich węzłów układu względem pewnego ustalonego układu odniesienia. Dla jednolitości metody możemy sobie wyobrazić, że każdy z węzłów układu połączony jest z «otoczeniem» tego układu za pomocą odpowiedniej liczby dodatkowych elementów, których przemieszczenia można utożsamiać ze zmiennymi niezależnymi x_2. Pozostałe przemieszczenia x_1, występujące w rozważanym układzie, odgrywają role zmiennych zależnych i określają na zasadzie odpowiedniości zmienne niezależne X_1. Omówione postępowanie zilustrujemy na konkretnych przykładach, w których posłużymy się konsekwentnym znakowaniem wielkości statycznych i kinematycznych: np. rozciąganiu i wydłużeniu elementu przypiszemy te same znaki (np. +).



Rys. 1

W układzie pokazanym na rys. 1 każdy z jego węzłów łączymy z otoczeniem za pomocą dodatkowych elementów (linie podwójne) ponumerowanych kolejno od 4 do 11. Zmienne kinematyczne r_i, $i=4, 5, ..., 11$, określające przemieszczenia w tych elementach, przyjmujemy za współrzędne wektora x_2. Podobnie za współrzędne S_j, $j=1, 2, 3$ wektora X_1 przyjmiemy zmienne statyczne, określające siły w elementach układu oznaczonych numerami 1, 2 i 3.

Dla otrzymania elementów np. pierwszego wiersza macierzy H wywołujemy bazowy stan kinematyczny powodując przemieszczenie $r_4=1$ przy $r_i=0$, $i=5, 6, ..., 11$. Ze związków kinematycznych wynika, że w tym przypadku zostają również wywołane przemieszczenia zależne $s_1=\sqrt{3}/2$, $s_2=-\sqrt{3}/2$, $s_3=0$ będące współrzędnymi wektora x_1. Omawiany bazowy stan kinematyczny pokazano na rys. 1 linią przerywaną.

Elementy np. pierwszego wiersza macierzy G otrzymujemy jako współrzędne bazowego stanu statycznego, wywołanego działaniem siły $S_1=1$ przy $S_2=S_3=0$. Ze związków statycznych wynika, że w tym przypadku zostają również wywołane siły zależne $R_4=-\sqrt{3}/2$, $R_5=-1/2$, $R_6=1$, $R_i=0$, $i=7, 8, ..., 11$ będące współrzędnymi wektora X_2. Omawiany bazowy stan statyczny zilustrowano na rys. 1 za pomocą strzałek działających sił.

Elementy pozostałych wierszy macierzy H (G) otrzymuje się w sposób analogiczny do opisanego przez wywoływanie za pomocą jednostkowych przemieszczeń (sił) niezależnych, kolejnych bazowych stanów kinematycznych (statycznych).

Otrzymane w wyniku opisanego postępowania macierze G i H przedstawiają się następująco:

$$G=\left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & 0 & 0 & -u & -v & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & u & -v & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

(3.1)

$$H=\left[\begin{array}{ccc|cccccccc} u & -u & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & v & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

gdzie $u=\sqrt{3}/2$, $v=1/2$.

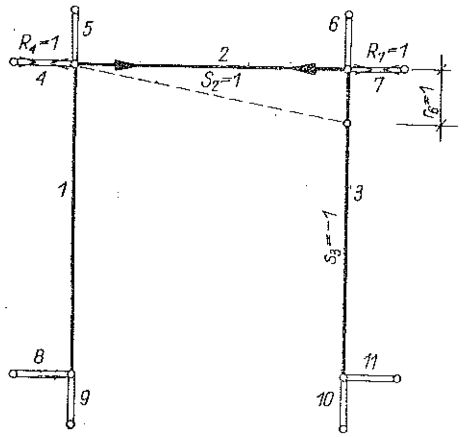
Dla układu z rys. 2 otrzymujemy na tej samej co poprzednio zasadzie

$$G=\left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

(3.2)

$$H=\left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Mimo że zasada postępowania dla układu przedstawionego na rys. 3a nie ulega żadnej zmianie, to jednak przypadek ten omówimy nieco szerzej ze względu na to, że różni się on od dwóch poprzednich występowaniem stanów zgięciowych w elemenatach układu oraz kątowych stopni swobody jego węzłów. Każdy z węzłów ma tutaj trzy stopnie swobody i dlatego wymaga połączenia z otoczeniem za pomocą trzech dodatkowych elementów. Podobnie stan każdego z prętów układu określony jest trzema niezależnymi zmiennymi statycznymi i kinematycznymi; są to momenty zginające i siła podłużna w przywęzłowych przekrojach prętów oraz odpowiadające im przemieszczenia. Na rys. 3b i 3c pokazano przykładowo po trzy bazowe stany statyczne i kinematyczne. Dla rozważanego układu otrzymuje się następujące macierze:



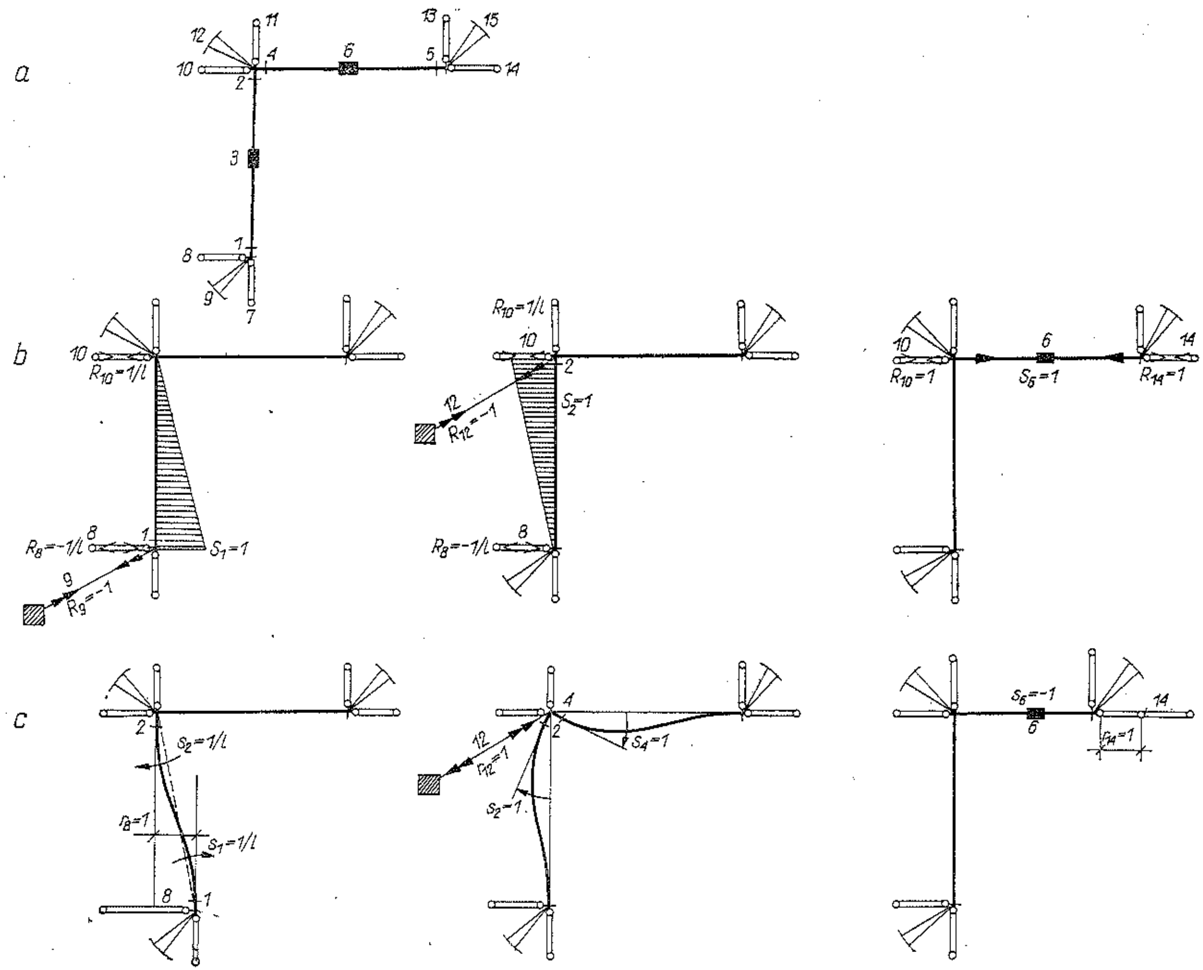
Rys. 2

$$
(3.3)\qquad
G=\left[\begin{array}{cccccc|ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -w & -1 & w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -w & 0 & w & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -w & -1 & w & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -w & 0 & w & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right],
$$

$$
H=\left[\begin{array}{cccccc|ccccccccc}
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
w & w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-w & -w & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & w & w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -w & -w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right],
$$

gdzie w jest odwrotnością długości pręta układu.

W omawianym przypadku mogą pojawiać się pewne trudności związane z określaniem znaków współrzędnych macierzy G i H, odpowiadających kątowym stopniom swobody węzłów. Dla usunięcia tych trudności wygodnie jest wyobrazić sobie, że elementy dodatkowe 9, 12 i 15 są prętami skręcanymi prostopadłymi do płaszczyzny ramy. Przyjęcie jednakowego kryterium znakowania obciążeń i przemieszczeń skrętnych dla tych prętów pozwala już posługiwać się poprzednio stosowanymi zasadami określania znaków.


a
b
c
$R_{10}=1/l$
$R_8=-1/l$
$R_9=-1$
$S_1=1$
$S_2=1$
$R_{12}=-1$
$R_{10}=1$
$S_6=1$
$R_{14}=1$
$s_2=1/l$
$r_8=1$
$s_1=1/l$
$r_{12}=1$
$s_2=1$
$s_4=1$
$s_6=-1$
$r_{14}=1$

Rys. 3

4. Analiza struktury układu

Na podstawie znajomości macierzy G i H dla określonego układu mechanicznego można przeprowadzić dokładną analizę jego struktury. W tym celu wygodnie jest jednak posłużyć się takim nowym podziałem zmiennych, który jest już związany z konkretnymi rolami, jakie te zmienne pełnią w danym układzie.

Podzielmy mianowicie wszystkie zmienne na trzy grupy, które w dalszym ciągu będziemy oznaczać indeksami a, b i c. Do grupy a zaliczymy dane siły o znanych wartościach X_a oraz odpowiadające im przemieszczenia x_a. W grupie c umieścimy siły X_c oraz odpowiadające im dane przemieszczenia o znanych wartościach x_c. Wszystkie pozostałe zmienne zaliczymy do grupy b i oznaczymy przez X_b i x_b.

Dzięki nowemu podziałowi zmiennych możemy teraz korzystać z nowej postaci macierzy H i G oraz równań równowagi i zgodności

$$H=(H_a, H_b, H_c), \quad G=(G_a, G_b, G_c), \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} HX&=(H_a, H_b, H_c)(X_a, X_b, X_c)^T=H_a X_a+H_b X_b+H_c X_c=0, \\ Gx&=(G_a, G_b, G_c)(x_a, x_b, x_c)^T=G_a x_a+G_b x_b+G_c x_c=0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Powracając do przykładu z rys. 1 widzimy, że zastosowanie równań (4.2) wymaga uprzedniego dokonania podziału zmiennych na grupy a, b i c. Staje się to jednak możliwe dopiero wtedy, gdy zostaną konkretnie ustalone zarówno obciążenia układu, jak również sposób jego podparcia, co w dotychczasowych rozważaniach było zupełnie zbyteczne.

Przyjmijmy, że obciążenia R_4 i R_5 są dane co do wartości oraz że $r_i=0$ dla $i=6, 7, ..., 11$. Grupę a tworzą więc zmienne 4 i 5, grupę b — zmienne 1, 2 i 3, a grupę c — zmienne 6, 7, ..., 11. Po odpowiednim przestawieniu kolumn otrzymujemy zamiast (3.1) następujące macierze:

$$G=\left[\begin{array}{cc|ccc|cccccc} -u & -v & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & -v & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$H=\left[\begin{array}{cc|ccc|cccccc} 1 & 0 & u & -u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & v & v & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \tag{4.3}$$

Zwróćmy teraz uwagę na fakt, że układ równań równowagi, którego macierz H ma postać $(3.1)_2$ lub $(4.3)_2$ można uważać za rozwiązany względem zmiennych R_i, $i=4, 5, ..., 11$. W sytuacji, kiedy R_4 i R_5 są dane, interesuje nas rozwiązanie względem zmiennych $S_1, S_2, S_3, R_6, R_7, ..., R_{11}$, które w zagadnieniu występują jako niewiadome. Widzimy jednak od razu, że rozwiązanie takie nie może być jednoznaczne, gdyż liczba niewiadomych przewyższa liczbę równań o jedność.

Przy dokonanych założeniach dotyczących działania obciążeń oraz sposobu podparcia układu jest on więc jednokrotnie statycznie niewyznaczalny lub, jak również mówimy, jednokrotnie przesztywniony.

Posługując się pojęciem bazy kolumnowej dla macierzy H możemy stwierdzić, że wspomniana niejednoznaczność rozwiązań równań równowagi ma swoje źródło w liniowej zależności pomiędzy kolumnami grup b i c. Wybór bazy kolumnowej dla tych grup jest tu możliwy na różne sposoby, przy czym każdorazowo jedna z kolumn musi znajdować się poza bazą. Odpowiadająca tej niebazowej kolumnie zmienna jest niezależna i odgrywa rolę tzw. niewiadomej hiperstatycznej. Przyjęcie określonej bazy kolumnowej dla grup b i c odpowiada więc przyjęciu pewnego układu statycznie wyznaczalnego, obciążonego danym obciążeniem R_4 i R_5 oraz niewiadomą hiperstatyczną.

Analizując możliwości tworzenia różnych baz kolumnowych spostrzegamy, że bazy te nie mogą nie zawierać którejkolwiek z kolumn odpowiadających zmiennym 7, 8 i 10. Kolumny te bowiem nie dają się zastąpić innymi kolumnami i dlatego zawsze muszą wchodzić w skład bazy. Tego rodzaju ograniczenia swobody wyboru baz wiążą się z występowaniem chwilowo chwiejnych układów statycznie niewyznaczalnych, powstających w wyniku usunięcia któregokolwiek z więzów podporowych 7, 8 lub 10.

Bazę kolumnową macierzy G możemy tworzyć tylko z kolumn grup a i b, gdyż zmienne grupy c są dane zgodnie z założeniem ($r_i=0$, $i=6, 7, \ldots, 11$) i w związku z tym muszą być traktowane jako niezależne. Każdorazowo poza bazą muszą w tej sytuacji znaleźć się dwie kolumny, co jest równoznaczne z dwukrotną kinematyczną niewyznaczalnością układu. Zmienne odpowiadające kolumnom pozabazowym są zmiennymi niezależnymi i mogą być przez analogię nazywane niewiadomymi hiperkinematycznymi. Niewiadome typu «hiper», zarówno statyczne jak i kinematyczne, nie mogą być obliczone bez uwzględnienia konkretnych własności fizycznych rozważanego układu mechanicznego. Te aspekty zagadnienia wykraczają jednak poza ramy pracy.

Dla przykładu z rys. 2 ustalmy, że danymi są obciążenia R_4, R_5, R_6, R_7 oraz przemieszczenia $r_i=0$ dla $i=8, 9, 10, 11$. W tym przypadku otrzymujemy zamiast (3.2) następujące macierze:

$$
G=\left[\begin{array}{cccc|ccc|cccc}
0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\
1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0
\end{array}\right],
$$

(4.4)

$$
H=\left[\begin{array}{cccc|ccc|cccc}
1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&-1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-1&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{array}\right].
$$

Ponieważ łączna liczba kolumn grup b i c jest mniejsza od liczby równań równowagi, przeto nie można utworzyć tutaj pełnej bazy kolumnowej dla macierzy H posługując się wyłącznie kolumnami grup b i c. Brakującą kolumnę trzeba dobrać z grupy a; wtedy jednak odpowiednia zmienna tej grupy przestaje być niezależna. Układ o takich własnościach macierzy H jest układem jednokrotnie chwiejnym lub, jak również mówimy, jednokrotnie niedosztywnionym. Jego cechą charakterystyczną jest brak możliwości zrealizowania stanu równowagi przy dowolnym obciążeniu zewnętrznym. Staje się to jednak możliwe, gdy odpowiednia składowa tego obciążenia przestaje być zmienną niezależną.

W rozważanym układzie tworzenie pełnej bazy kolumnowej dla macierzy H z udziałem określonej kolumny z grupy a, warunkujące istnienie stanów równowagi, wiąże się z koniecznością odebrania temu układowi jednego «stopnia swobody statycznej». Mamy tutaj więc do czynienia z sytuacją odwrotną niż w przykładzie poprzednim, w którym obserwowaliśmy pojawienie się dodatkowego «stopnia swobody statycznej» w postaci niezależnej zmiennej hiperstatycznej. Jak łatwo sprawdzić, dla utworzenia pełnej bazy kolumnowej można w rozważanym przypadku posłużyć się tylko jedną z dwu kolumn, odpowiadających zmiennym 1 i 3, co wiąże się z rodzajem chwiejności układu.

Istotną nowością, jeżeli chodzi o macierz G, jest to, że jej bazy kolumnowe można tworzyć np. tylko z kolumn grupy a. Oznacza to, że zmiennymi niezależnymi są w tym przypadku nie tylko zmienne grupy c, ale mogą nimi być także zmienne grupy b. Korzystając z tego możemy w szczególności przyjąć $s_5=s_6=s_7=0$. Jest to równoznaczne przejściu do rozważań nad łańcuchem kinematycznym, dla którego otrzymujemy jako rozwiązanie równań zgodności: $r_1=-r_3$, $r_2=r_4=0$, co świadczy o możliwości występowania ruchu sztywnego w badanym układzie.

Przechodząc do analizy ostatniego z przykładów (rys. 3) przyjmijmy jako dane obciążenia R_i, $i=7, 8, \dots, 12$ oraz przemieszczenia $r_{13}=r_{14}=r_{15}=0$. W tym przypadku zamiast (3.3) otrzymujemy macierze

$$G=\left[\begin{array}{cccccc|cccccc|ccc}
0 & -w & -1 & w & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -w & 0 & w & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -w & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & w & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right],$$

$$H=\left[\begin{array}{cccccc|cccccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & w & w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -w & -w & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & w & w & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -w & -w & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right], \tag{4.5}$$

lub w postaci blokowej

$$G=(-A,\quad E,\quad B),$$
$$H=\begin{bmatrix} E, & A^T, & 0 \\ 0, & -B^T, & E \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Ponieważ macierz A jest nieosobliwą macierzą kwadratową, możemy G i H poddać następującej transformacji:

$$\tilde{G}=C^TG,\qquad \tilde{H}=\begin{bmatrix} C & 0 \\ B^TC, & E \end{bmatrix}$$

po wprowadzeniu oznaczenia $C=(A^T)^{-1}$. W wyniku tej transformacji otrzymujemy zamiast (4.6) macierze

$$\tilde{G}=(\ -E,\ C^T,\ C^TB),$$
$$\tilde{H}=\begin{bmatrix} C & E & 0 \\ B^TC, & 0 & E \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Możliwość przedstawienia macierzy G i H w dwu równoważnych postaciach (4.6) i (4.7) wynika z ich specyficznej struktury świadczącej o statycznej wyznaczalności układu i charakteryzującej się następującymi głównymi cechami.

1. Bloki a i b obydwu macierzy G i H mają tę samą liczbę kolumn, równą liczbie wierszy macierzy G.

2. Bloki G_a i (H_b, H_c) są nieosobliwymi macierzami kwadratowymi, w związku z czym ich kolumny tworzą pełne bazy dla G i H.

3. Po wprowadzeniu zapisu $(4.7)_1$ dla macierzy G, w zapisie $(4.7)_2$ dla macierzy H zostają wyodrębnione równania służące do obliczania reakcji więzów podporowych. Tworzą one końcową grupę równań.

4. Jeżeli rozważania ograniczymy do zmiennych grup a i b przyjmując $x_c=0$ i nie interesując się wartościami sił X_c, to spostrzegamy, że istnieją dwie grupy równoważnych związków wynikających z (4.6) i (4.7):

$$\begin{aligned} -Ax_a+x_b&=0, &\qquad -x_a+C^Tx_b&=0,\\ X_a+A^TX_b&=0, &\qquad CX_a+X_b&=0, \end{aligned} \tag{4.8}$$

przy czym odpowiedniości zarówno pomiędzy zmiennymi statycznymi jak i kinematycznymi są wzajemnie jednoznaczne. Jest to zasadniczą cechą charakterystyczną układów statycznie wyznaczalnych.

5. Zakończenie

Podsumowując wyniki przeprowadzonych rozważań możemy stwierdzić, że zasadniczą zaletą zapisu równań więzów w postaci (1.1) jest jego uniwersalność. Polega ona głównie na tym, że zapis (1.1) jest poprawny niezależnie od sposobu obciążenia i podparcia układu. Dzięki temu można stosować dokładnie tę samą metodę analizy dla każdego układu niezależnie od tego, czy jest on układem chwiejnym, przesztywnionym, czy też statycznie wyznaczalnym. Co więcej, ten sam układ można analizować przy różnych założeniach dotyczących sposobu jego obciążenia i podparcia. Wiąże się to jedynie z koniecznością dokonania odpowiedniego podziału kolumn na grupy oznaczane umownie indeksami *a*, *b* i *c*. Z algebraicznego punktu widzenia jest przy tym zupełnie obojętne czy kolumny należące do tej samej grupy zostaną razem zblokowane, czy też nie. Ma to wpływ jedynie na przejrzystość samego zapisu.

Analiza istnienia i jednoznaczności rozwiązań równań (1.1) sprowadza się do badania różnych możliwości tworzenia baz kolumnowych dla macierzy G i H a w szczególności baz jednostkowych. Tworzenie bazy jednostkowej jest równoważne rozwiązywaniu układu równań i dlatego odbywa się zazwyczaj metodą typu Gaussa. Przechodzenie od jednego rozwiązania do innego jest równoważne zmianie bazy jednostkowej, która może się odbywać sukcesywnie na drodze kolejnej wymiany pojedynczych kolumn bazowych. Ma to bliski związek z metodami programowania liniowego.

Omówione w pracy problemy związane z analizą stanów równowagi sił i zgodności przemieszczeń określonych przez równania (1.1) są z punktu widzenia algebry niewątpliwie problemami podstawowymi. Problemy te jednak mają ścisły związek z jednej strony z budową wzmiankowanych we wstępie ogólnych potencjałów energetycznych, z drugiej zaś z teorią sieci a w szczególności ich topologią. Sprawia to, że nabierają one ważnego znaczenia zarówno z teoretycznego jak i praktycznego punktu widzenia.

Literatura cytowana w tekście

1. S. J. Fenves, F. H. Branin, *Network-topological formulation of structural analysis*, J. Str. Div., Proc. ASCE, **89**, ST4, 483 - 514, 1963.
2. N. C. Lind, *Analysis of structures by system theory*, J. Str. Div., Proc. ASCE, **88**, ST2, 1 - 22, 1962.
3. S. P. Mauch, S. J. Fenves, *Releases and constraints in structural networks*, J. Str. Div., Proc. ASCE, **93**, ST5, 401 - 417, 1967.
4. B. Olszowski, *O dwoistości podstaw mechaniki dyskretnych układów sprężystych*, Arch. Mech. Stos., **25**, 6, 1007 - 1024, 1973.
5. B. Olszowski, *Dualne aspekty analizy układów prętowych*, Rozpr. Inż., **22**, 1, 3 - 19, 1974.
6. M. J. Sewell, *On dual approximation principles and optimization in continuum mechanics*, Phil. Trans. of the Royal Society of Lonodn, Series (A), Math. Phys. Sci., **265**, 1162, 319 - 351, 1969.
7. W. R. Spillers, *Network analogy for the truss problem*, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, **88**, EM6, 33 - 40, 1962.
8. W. R. Spillers, *Network analogy for linear structures*, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, **89**, EM4, 21 - 29, 1963.
9. W. R. Spillers, *Automated structural analysis: An introduction*, Pergamon Press, New York City 1972.

Резюме

ПРОБЛЕМЫ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ СИЛ И СОВМЕСТНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ДИСКРЕТНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМАХ

В работе проведены обсуждения интерпретации, возникновения и структуры матриц линейно независимых и однородных систем уравнений равновесия сил и совместности перемещений. При этом ограничиваются случаем линейных статических и кинематических соотношений и узловым действием нагрузок.

Используя однородную запись уравнений предложен однородный и общий способ анализа кинетико-статических свойств дискретных систем с двухсторонними связами. Рассуждения иллюстрированы тремя примерами стержневых систем, работающих главным образом на изгиб и осевые силы.

Summary

PROBLEMS OF FORCE EQUILIBRIUM AND DISPLACEMENT COMPATIBILITY EQUATIONS FOR DISCRETE ELASTIC SYSTEMS

Considerations concerning interpretation, formation and structure of matrices for linearly independent and homogeneous systems of equilibrium and compability equations are given. Considerations are restricted to the case of linear static and kinematic relations and to node loads action. Because of homogeneous form of equations the uniform and general way of analysis of kinematic and static properties of discrete systems with bilateral constraints is proposed. A theory is illustrated by three examples of rod systems working mainly in conditions of bending and axial forces.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 marca 1974 r.