

## DRGANIA PASMA PŁYTOWEGO NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU WYWOŁANE PRZESUWAJĄCYM SIĘ OBCIĄŻENIEM

JAN R A C Z K A (WARSZAWA)

W pracy rozpatruje się drgania niestacjonarne pasma płytowego wywołane przesuającą się ze stałą prędkością siłą, przyłożoną do płyty w chwili  $t=0$ . Funkcję opisującą drgania płyty o dwóch krawędziach zamocowanych przedstawiono w postaci całki Fouriera.

### 1. WSTĘP

W pracy niniejszej rozpatruje się zagadnienie dynamiczne pasma płytowego o stałej grubości spoczywającego na sprężystym podłożu typu Winklera. Obciążenie w postaci siły skupionej (bez masy) przesuwa się ze stałą prędkością; wielkość siły skupionej jest ustalona. Do rozwiązania odpowiednich równań różniczkowych wykorzystano transformację Fouriera [9].

W literaturze zagadnienie ustrojów na sprężystym podłożu zajmuje ważną pozycję. Należałoby wymienić tutaj prace [1 – 8]. Jednakże zastosowanie w praktyce inżynierskiej wyprowadzonych wzorów napotykało na trudności. Dopiero zastosowanie szybko liczących elektronicznych maszyn cyfrowych do obliczeń numerycznych pozwala na korzystanie z rozważań teoretycznych. Najbardziej zbliżone tematycznie są prace [5 i 10] z tym, że praca [5] zajmuje się drganiami płyty nieograniczonej na sprężystym podłożu, a praca [10] podejmuje problem drgań pasma płytowego swobodnie podpartego i płyty prostokątnej swobodnie podpartej na dwóch krawędziach (bez podłoża).

### 2. ZAŁOŻENIA

Pasma płytowe o stałej sztywności zginania  $D$  i równomiernie rozłożonej na jednostce powierzchni masie  $\mu$  spoczywa na jednoparametrowym podłożu sprężystym typu Winklera o charakterystyce sprężystej  $k$ .

Rozważmy przypadek: w chwili  $t=0$  w punkcie o współrzędnych  $x=y=0$  przyłożona została do płyty stała siła skupiona  $P$  przesuująca się wzdłuż osi  $x$  ze stałą prędkością  $v$ .

### 3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Odkszatałcenie powierzchni płyty otrzymamy jako sumę dwu rozwiązań:

$$(3.1) \quad W(x, y, t) = w(x, y, t) + w^*(x, y, t),$$

gdzie  $w(x, y, t)$  oznacza odkształcenie powierzchni płyty, po której wzdłuż osi  $x$  przesuwa się siła  $P$  ze stałą prędkością, oraz  $w^*(x, y, t)$  odkształcenie powierzchni drgającej swobodnie o określonych warunkach początkowych ruchu.

### 3.1. Drgania wymuszone pasma płytowego na sprężystym podłożu

Równanie różniczkowe drgań wymuszonych płyty na sprężystym podłożu ma postać

$$(3.2) \quad D\nabla^2 \nabla^2 w + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + kw = q(x, y, t),$$

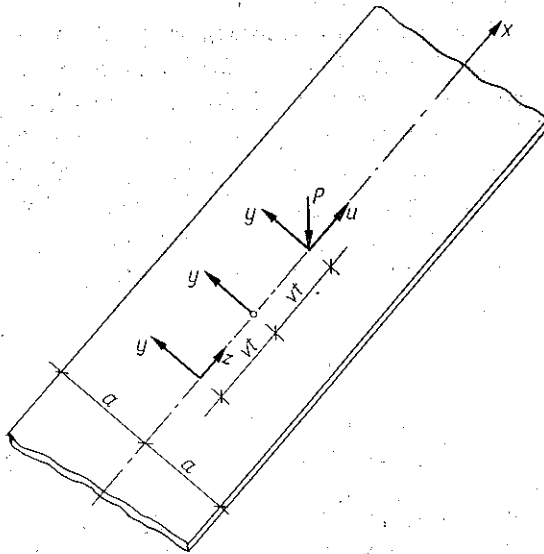
gdzie  $w$  oznacza ugięcie płyty,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

operator Laplace'a,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

szytywność zginania płyty,  $h$  grubość płyty,  $\nu$  liczbę Poissona,  $\mu$  masę przypadającą na jednostkę powierzchni płyty,  $k$  współczynnik sztywności podłoża oraz  $q(x, y, t)$  obciążenie znajdujące się na płycie.



Rys. 1

Niech po płycie wzdłuż osi  $x$  (od punktu  $x = -\infty$  do punktu  $x = \infty$ ) przesuwa się ze stałą prędkością  $v$  siła skupiona  $P$  (rys. 1).

Do równania różniczkowego wprowadzamy nowe zmienne  $u, z$

$$(3.3) \quad u = x - vt, \quad z = x + vt.$$

Równanie (3.2) przekształci się następująco:

$$(3.4) \quad D \nabla^2 \nabla^2 w + \mu v^2 \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial u} \right)^2 w + kw = P \delta(u) \delta(y),$$

gdzie

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

oraz gdzie  $\delta(u)$  i  $\delta(y)$  oznaczają funkcje Diraca.

Odształcenie płyty jest ustabilizowane względem przesuwającego się wraz z siłą  $P$  układu  $u, y$ , a zatem funkcję opisującą powierzchnię odształconą możemy zapisać tylko w tych współrzędnych. Dlatego też w równaniu (3.4) pominiemy wyrazy z pochodną cząstkową  $\partial/\partial z$ . Otrzymamy wtedy

$$(3.5) \quad D \left( \frac{\partial^4}{\partial u^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial u^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) w + \mu v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + kw = P \delta(u) \delta(y).$$

Odształcona powierzchnia płyty jest symetryczna względem osi  $y$ . Wprowadzając założenie, że  $w(u, y) \rightarrow 0$  dla  $u \rightarrow \pm\infty$ , a całka  $\int_{-\infty}^{\infty} |w(u, y)| du$  jest ograniczona, można nieznaną funkcję  $w(u, y)$  przedstawić w postaci całki Fouriera:

$$(3.6) \quad w(u, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{w}(\alpha, y) \cos \alpha u d\alpha;$$

również obciążenie przedstawimy jako całkę Fouriera:

$$(3.7) \quad P \delta(u) \delta(y) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{q}(\alpha, y) \cos \alpha u d\alpha.$$

Podstawiając (3.6) i (3.7) do równania (3.5) i wykonując odpowiednie różniczkowania, otrzymujemy

$$(3.8) \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \{ D [\bar{w} \alpha^4 - 2 \bar{w}'' \alpha^2 + \bar{w}'''' ] - \mu v^2 \alpha^2 \bar{w} + k \bar{w} \} \cos \alpha u d\alpha = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{q}(\alpha u) \cos \alpha u d\alpha,$$

gdzie  $(\quad)' = d/dy$ .

Równanie (3.8) jest zwyczajnym liniowym równaniem różniczkowym czwartego rzędu o stałych współczynnikach. Dla  $y > 0$  równanie (3.8) przedstawimy w postaci jednorodnego równania różniczkowego:

$$(3.9) \quad \bar{w}'''' + \bar{w}''(-2\alpha^2) + \bar{w} \left( \alpha^4 + \frac{k}{D} - \frac{\mu v^2 \alpha^2}{D} \right) = 0.$$

Szukając całki ogólnej równania (3.9) w postaci

$$(3.10) \quad \bar{w} = e^{ry},$$

otrzymujemy następujące równania charakterystyczne:

$$(3.11) \quad r^4 - 2\alpha^2 r^2 + \alpha^4 \left( 1 + \frac{k}{D\alpha^4} - \frac{\mu v^2}{D\alpha^2} \right) = 0.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(3.12) \quad v_\alpha = \frac{\mu v^2}{D\alpha^2}, \quad k_\alpha = \frac{k}{\alpha^4 D}, \quad v_\alpha, k_\alpha > 0,$$

otrzymamy następujące pierwiastki równania charakterystycznego:

$$(3.13) \quad r_{1,2} = \mp \alpha \sqrt{1 + \sqrt{v_\alpha - k_\alpha}}, \quad r_{3,4} = \mp \alpha \sqrt{1 - \sqrt{v_\alpha - k_\alpha}}.$$

Przeprowadzimy analizę otrzymanego rozwiązania. W zależności od wartości  $v_\alpha$  i  $k_\alpha$  możemy otrzymać różne rozwiązania (3.11):

jeśli  $v_\alpha > k_\alpha$  i  $\sqrt{v_\alpha - k_\alpha} < 1$ , to  $r$ :

$$r_{1,2} = \mp \alpha \sqrt{1 + \sqrt{v_\alpha - k_\alpha}}, \quad r_{3,4} = \mp \alpha \sqrt{1 - \sqrt{v_\alpha - k_\alpha}};$$

jeśli  $v_\alpha > k_\alpha$  i  $\sqrt{v_\alpha - k_\alpha} > 1$ , to

$$(3.14) \quad r_{1,2} = \mp \alpha \sqrt{1 + \sqrt{v_\alpha - k_\alpha}}, \quad r_{3,4} = \mp \alpha i \sqrt{\sqrt{v_\alpha - k_\alpha} - 1};$$

jeśli  $v_\alpha < k_\alpha$ , to

$$(3.15) \quad r_{1,2} = \mp \alpha \sqrt{1 + i\sqrt{v_\alpha - k_\alpha}}, \quad r_{3,4} = \mp \alpha \sqrt{1 - i\sqrt{v_\alpha - k_\alpha}};$$

jeśli  $v_\alpha = k_\alpha$ , to

$$(3.16) \quad r_{1,2} = \mp \alpha, \quad r_{3,4} = \pm \alpha.$$

Pierwiastkom równania charakterystycznego będą odpowiadały całki ogólne równania (3.9).

Analizując otrzymane rozwiązania w świetle wartości  $k_\alpha$  i  $v_\alpha$ , przyjmując dla  $v$  odpowiednio 10, 20, 30, 50, 100, 150, 200 m/s i dla  $k$  — 5000, 10000, 15000, 20000, 30000, 40000 T/m<sup>3</sup> oraz przyjmując, że  $\alpha$  jest liczbą rzeczywistą większą od zera (rys. 2) — dochodzimy do wniosku, że do praktycznego zastosowania najbardziej odpowiednie będą pierwiastki (3.15).

W dalszych rozważaniach zajmiemy się tym właśnie rozwiązaniem. Wykorzystując wzory (3.15) i (3.10), otrzymujemy następującą postać rozwiązania równania różniczkowego (3.9):

$$(3.17) \quad \bar{w}(\alpha, y) = A_1 e^{-\alpha \sqrt{1 + i\sqrt{v_\alpha - k_\alpha}} y} + A_2 e^{+\alpha \sqrt{1 + i\sqrt{v_\alpha - k_\alpha}} y} + A_3 e^{-\alpha \sqrt{1 - i\sqrt{v_\alpha - k_\alpha}} y} + \\ + A_4 e^{+\alpha \sqrt{1 - i\sqrt{v_\alpha - k_\alpha}} y}$$

lub inaczej

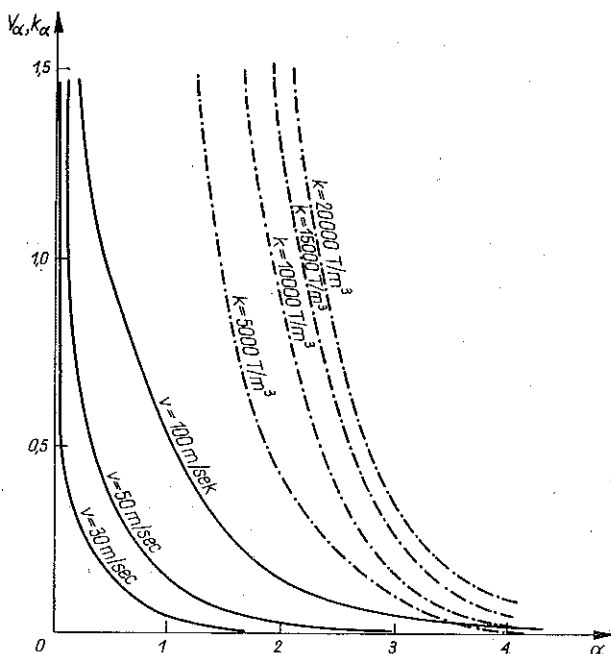
$$(3.18) \quad \bar{w}(\alpha, y) = e^{-\alpha y} (B_1 \sin \alpha \delta y + B_2 \cos \alpha \delta y) + e^{+\alpha y} (B_3 \sin \alpha \delta y + B_4 \cos \alpha \delta y),$$

gdzie

$$(3.19) \quad \delta = \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+k_\alpha - v_\alpha}}{2}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+k_\alpha - v_\alpha}}{2}}.$$

Po wykorzystaniu zależności (3.6) równanie powierzchni odkształconej będzie miało postać

$$(3.20) \quad w(u, y) = \int_0^\infty [e^{-\alpha y} (B_1 \sin \alpha \delta y + B_2 \cos \alpha \delta y) + e^{\alpha y} (B_3 \sin \alpha \delta y + B_4 \cos \alpha \delta y)] \cos \alpha u d\alpha.$$



Rys. 2

Pozostaje następnie wyznaczyć stałe całkowania występujące w tym wyrażeniu. Wykorzystamy tu warunki symetrii wzdłuż osi  $u$  (pod siłą) oraz warunki podparcia na krawędzi  $y=a$ . Warunki te mogą być dowolne. Zajmiemy się przypadkiem, kiedy krawędź jest utwierdzona.

$$(3.21) \quad \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad D \left. \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right|_{y=0} = \frac{P\delta(u)}{2},$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=a} = 0, \quad w|_{y=a} = 0.$$

Ponieważ powierzchnia odkształcona jest wyrażona za pomocą całki Fouriera, to dla ujednoczenia wyrazów warunku brzegowego (3.21)<sub>2</sub> musimy przedstawić

funkcję po prawej stronie w postaci całki Fouriera. Po niewielkich przekształceniach będzie ona miała postać

$$(3.22) \quad \frac{P\delta(u)}{2} = \frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha u \, d\alpha.$$

Warunki brzegowe (3.21) są następujące:

$$(3.23) \quad \begin{aligned} B_1 \delta - B_2 \gamma + B_3 \delta + B_4 \gamma &= 0, \\ B_1 (-\gamma^2 \delta - \delta^3) + B_2 (-\gamma^3 + 3\gamma \delta^2) + B_3 (3\gamma^2 \delta - \delta^3) + B_4 (\gamma^3 + 3\gamma \delta^2) &= \frac{P}{2\sqrt{2\pi}}, \\ B_1 (-\gamma m_1 + \delta m_2) + B_2 (-\gamma m_2 - \delta m_1) + B_3 (\gamma m_3 + \delta m_4) + B_4 (\gamma m_4 - \delta m_3) &= 0, \\ B_1 m_1 + B_2 m_2 + B_3 m_3 + B_4 m_4 &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} m_1 &= e^{-\alpha \gamma a} \sin \alpha \delta a, & m_4 &= e^{\alpha \gamma a} \cos \alpha \delta a, \\ m_2 &= e^{-\alpha \gamma a} \cos \alpha \delta a, & m_3 &= e^{\alpha \gamma a} \sin \alpha \delta a. \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań (3.23) znajdziemy stałe całkowania:

$$(3.24) \quad \begin{aligned} B_1 &= - \frac{[m_2(B_3 \delta + B_4 \gamma) + \gamma(B_3 m_3 + B_4 m_4)]}{\delta m_2 + \gamma m_1}, \\ B_2 &= \frac{m_1(B_3 \delta + B_4 \gamma) - \delta(B_3 m_3 + B_4 m_4)}{\delta m_2 + \gamma m_1}, \\ B_3 &= \frac{P \frac{(\delta m_2 + \gamma m_1)}{2\sqrt{2\pi}} [-\delta \gamma m_2^2 + 2\gamma^2 m_1 m_4 - \delta \gamma m_1^2 + \delta^2 m_1 m_4 + \delta \gamma m_2 m_4 - \delta^2 m_2 m_3 - \delta \gamma m_1 m_3]}{L}, \\ B_4 &= - \frac{\frac{P(\delta m_2 + \gamma m_1)}{2\sqrt{2\pi}} [-\delta^2 m_2^2 + \gamma^2 m_1 m_3 + \gamma \delta m_2 m_3 - \delta^2 m_1^2 + \delta^2 m_1 m_3 + \delta \gamma m_1 m_4 + \gamma^2 m_1 m_2 + \delta^2 m_2 m_4]}{L}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} L &= (4\delta^2 \gamma^2 m_2 + 2\gamma^3 \delta m_3 - 2\gamma \delta^3 m_3 + 6\gamma \delta^3 m_1 - 2\gamma^3 \delta m_1) (-\delta \gamma m_2^2 + \\ &\quad + 2\gamma^2 m_1 m_4 - \delta \gamma m_1^2 + \delta^2 m_1 m_4 + \delta \gamma m_2 m_4 - \delta^2 m_2 m_3 - \delta \gamma m_1 m) - \\ &\quad - (2\gamma^3 \delta m_2 + 4\delta^3 \gamma m_2 + 2\gamma^3 \delta m_4 + 6\gamma^2 \delta^2 m_1) (-\delta^2 m_2^2 + \gamma^2 m_1 m_3 + \\ &\quad + \gamma \delta m_2 m_3 - \delta^2 m_1^2 + \delta^2 m_1 m_3 + \delta \gamma m_1 m_4 + \gamma^2 m_1 m_2 + \delta^2 m_2 m_4). \end{aligned}$$

Wstawiając te wielkości do wyrażenia (3.20) oraz podstawiając  $u = x - vt$ , otrzymamy równanie powierzchni odkształconej pasma płytowego:

$$(3.25) \quad w(x, y, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [e^{-\alpha \gamma v} (B_1 \sin \alpha \delta y + B_2 \cos \alpha \delta y) + e^{\alpha \gamma v} (B_3 \sin \alpha \delta y + B_4 \cos \alpha \delta y)] \cos(x - vt) \, d\alpha,$$

gdzie  $B_1, B_2, B_3$  i  $B_4$  określają wzory (3.24), a prędkość wynosi

$$(3.26) \quad \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} = w(x, y, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} v \int_0^{\infty} [e^{-\alpha y} (B_1 \sin \alpha \delta y + B_2 \cos \alpha \delta y) + e^{\alpha y} (B_3 \sin \alpha \delta y + B_4 \cos \alpha \delta y)] \sin \alpha (x - vt) d\alpha.$$

### 3.2. Drgania swobodne pasma płytowego

Drganie swobodne płyty na podłożu sprężystym opisane jest przez równanie

$$(3.27) \quad D \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) w^* + \mu \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} + k w^* = 0.$$

Poszukujemy rozwiązania w formie

$$(3.28) \quad w^*(x, y, t) = w_1(x, y) T(t).$$

Prowadzi to do rozdziału zmiennych, w wyniku czego otrzymujemy

$$(3.29) \quad \nabla^2 \nabla^2 w_1(x, y) - \lambda^4 w_1(x, y) = 0, \\ \ddot{T}(t) + T(t) \omega^2 = 0,$$

gdzie

$$(3.30) \quad \lambda^4 = \frac{\mu \omega^2 - k}{D}, \quad ( )' = \frac{d}{dt}.$$

Ponieważ  $w_1(x, y)$  jest funkcją symetryczną względem osi  $y$  i  $w_1(x, y) \rightarrow 0$  dla  $x \rightarrow \pm \infty$ , a  $\int_{-\infty}^{\infty} |w_1(x, y)| dx$  jest ograniczone, można nieznaną funkcję  $w_1(x, y)$  przedstawić w postaci całki Fouriera

$$(3.31) \quad w_1(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{w}(\alpha, y) \cos \alpha x d\alpha.$$

Podstawiając do równania (3.29)<sub>1</sub> i wykonując odpowiednie różniczkowania, otrzymamy

$$(3.32) \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \{ [\bar{w} \alpha^4 - 2 \bar{w}'' \alpha^2 + \bar{w}'''' ] - \lambda^4 \bar{w} \} \cos \alpha x dx = 0,$$

gdzie  $d/dy = ( )'$ .

Odpowiednie jednorodne równanie różniczkowe ma postać

$$(3.33) \quad \bar{w}'''' - 2 \bar{w}'' \alpha^2 + \bar{w}(\alpha^4 - \lambda^4) = 0.$$

Zakładając, że całka ogólna równania (3.33) ma postać

$$(3.34) \quad \bar{w} = e^{ry},$$

otrzymamy następujące równanie charakterystyczne:

$$(3.35) \quad r^4 - 2r^2 \alpha^2 + (\alpha^4 - \lambda^4) = 0.$$

Pierwiastki równania charakterystycznego są następujące:

$$(3.36) \quad r_{1,2} = \pm \sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}, \quad r_{3,4} = \pm \sqrt{\alpha^2 - \lambda^2}.$$

Łatwo udowodnić, że technicznie przydatne rozwiązania będą jedynie

$$(3.37) \quad r_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2}, \quad r_{3,4} = \pm \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}.$$

Otrzymamy następującą postać całki ogólnej równania różniczkowego (3.33):

$$(3.38) \quad \bar{w}(\alpha, y) = B_{1\alpha} \cos r_1 y + B_{2\alpha} \operatorname{ch} r_2 y + B_{3\alpha} \sin r_1 y + B_{4\alpha} \operatorname{sh} r_2 y.$$

W związku z powyższym funkcję (3.31) można przedstawić następująco:

$$(3.39) \quad w_1(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [B_{1\alpha} \cos r_1 y + B_{2\alpha} \operatorname{ch} r_2 y + B_{3\alpha} \sin r_1 y + B_{4\alpha} \operatorname{sh} r_2 y] \cos \alpha x \, d\alpha.$$

Ponieważ układ osi jest tak zorientowany, że oś  $x$  pokrywa się z osią płyty, odkształcenie względem tej osi będzie symetryczne. Zatem przyjmujemy, że stałe  $B_{3\alpha}$  i  $B_{4\alpha}$  są równe zero, ponieważ taką postać odkształcenia opisują tylko funkcje parzyste. Wystarczy więc, aby funkcja

$$(3.40) \quad w_1(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [B_{1\alpha} \cos r_1 y + B_{2\alpha} \operatorname{ch} r_2 y] \cos \alpha x \, d\alpha.$$

spełniała tylko dwa warunki brzegowe na krawędzi  $y=a$

Po podstawieniu (3.40) do warunków brzegowych określonych na krawędzi  $y=a$  otrzymujemy jednorodny układ dwóch równań:

$$(3.41) \quad \begin{aligned} B_{1\alpha} \cos r_1 a + B_{2\alpha} \operatorname{ch} r_2 a &= 0, \\ -B_{1\alpha} r_1 \sin r_1 a + B_{2\alpha} r_2 \operatorname{sh} r_2 a &= 0, \end{aligned}$$

którego wyznacznik charakterystyczny ma postać

$$(3.42) \quad \begin{vmatrix} \cos r_1 a & \operatorname{ch} r_2 a \\ -r_1 \sin r_1 a & r_2 \operatorname{sh} r_2 a \end{vmatrix}.$$

Przyrównując wyznacznik do zera otrzymujemy równanie przestępne

$$(3.43) \quad r_2 \cos r_1 a \operatorname{sh} r_2 a + r_1 \sin r_1 a \operatorname{ch} r_2 a = 0.$$

Wprowadzając nową zmienną

$$(3.44) \quad z_m = \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2},$$

równanie (3.43) przedstawimy w postaci

$$(3.45) \quad \sqrt{z_m^2 + 2\alpha^2} + z_m^2 \operatorname{tg} z_m a \operatorname{ctgh} a \sqrt{z_m^2 + 2\alpha^2} = 0.$$



Z równania tego dla każdego rzeczywistego  $\alpha$  otrzymujemy nieskończony przeliczalny ciąg wartości  $\omega_{an}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ). Każdej wartości własnej  $\omega_{an}$  odpowiada jedna funkcja własna  $w_{an}(x, y)$ . Wynosząc stałą  $B_{1\alpha}$  przed nawias i oznaczając przez  $\beta = B_{2an}/B_{1an}$  otrzymamy

$$(3.46) \quad \bar{w}_{1an}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left\{ B_{1an} \left( \cos r_1 y + \frac{B_{2an}}{B_{1an}} \operatorname{ch} r_2 y \right) \right\} \cos \alpha x d\alpha.$$

Stosunek stałych  $B_{2an}/B_{1an}$  wyznaczmy z (3.41):

$$(3.47) \quad \beta = -\frac{\operatorname{ch} r_2 a}{\cos r_1 a},$$

a funkcje własne przedstawimy za pomocą następującego wzoru:

$$(3.48) \quad \bar{w}_{1an} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left\{ B_{1an} \left[ \cos r_1 y + \left( -\frac{\operatorname{ch} r_2 a}{\cos r_1 a} \right) \operatorname{ch} r_2 y \right] \right\} \cos \alpha x d\alpha.$$

Stałą  $B_{1an}$  wyznaczmy korzystając z warunku ortogonalności funkcji własnych i założenia, że są one znormowane.

Wróćmy teraz do równania (3.29)<sub>2</sub>. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$(3.49) \quad T(t) = A_{an} \sin \omega_{an} t + B_{an} \cos \omega_{an} t.$$

Wobec powyższego funkcja  $w^*(x, y, t)$  przyjmie postać

$$(3.50) \quad w^*(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_{an} \sin \omega_{an} t + B_{an} \cos \omega_{an} t) \bar{w}_{an},$$

a prędkość

$$(3.51) \quad \dot{w}^*(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_{an} \omega_{an} \cos \omega_{an} t - B_{an} \omega_{an} \sin \omega_{an} t) \bar{w}_{an}.$$

Stałe  $A_{an}$  i  $B_{an}$  określimy z następujących warunków początkowych:

$$(3.52) \quad \begin{aligned} w^*(x, y, 0) + w(x, y, 0) &= 0, \\ \dot{w}^*(x, y, 0) + \dot{w}(x, y, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Po odpowiednich podstawieniach przyjmą one postać następującą:

$$(3.53) \quad \begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [e^{-\alpha y} (B_1 \sin \alpha \delta y + B_2 \cos \alpha \delta y) + e^{\alpha y} (B_3 \sin \alpha \delta y + B_4 \cos \alpha \delta y)] \times \\ & \times \cos \alpha x dx + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} B_{1an} \bar{w}_{an} \cos \alpha x dx = 0, \\ & -\sqrt{\frac{2}{\pi}} v \int_0^{\infty} [e^{-\alpha y} (B_1 \sin \alpha \delta y + B_2 \cos \alpha \delta y) + e^{\alpha y} (B_3 \sin \alpha \delta y + B_4 \cos \alpha \delta y)] \times \\ & \times \alpha \sin \alpha x + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} A_{an} \omega_{an} \bar{w}_{1an} \cos \alpha x dx = 0. \end{aligned}$$

Oznaczając

$$\bar{w}(\alpha, y) = e^{-\alpha y} (B_1 \sin \alpha \delta y + B_2 \cos \alpha \delta y) + e^{\alpha y} (B_3 \sin \alpha \delta y + B_4 \cos \alpha \delta y)$$

i wstawiając do (3.45), otrzymamy

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left[ \bar{w}(\alpha, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_{an} B_{an} \right] \cos \alpha x \, d\alpha = 0, \\ & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left[ -\bar{w}(\alpha, y) \alpha \sin \alpha x + \sum_{n=1}^{\infty} A_{an} \omega_{an} \cos \alpha x \right] d\alpha = 0. \end{aligned}$$

Przedstawiając

$$(3.54) \quad \bar{w}(\alpha, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{na} \bar{w}_{an},$$

gdzie

$$a_{na} = \int_0^a \bar{w}_{an} \bar{w}(\alpha, y) \, dy,$$

otrzymamy

$$(3.55) \quad \begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{na} + B_{an}) \bar{w}_{an} \cos \alpha x \, d\alpha = 0, \\ & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-a_{na} \alpha \sin \alpha x + A_{an} \omega_{an} \cos \alpha x) \bar{w}_{na} \, d\alpha = 0. \end{aligned}$$

Z równań (3.55) wyznaczmy stałe  $A_{an}$  i  $B_{an}$  czyniące zadość warunkom początkowym:

$$(3.56) \quad B_{an} = -\frac{a_{na}}{\alpha^2}, \quad A_{an} = \frac{a_{na} \alpha}{\omega_{an}} \operatorname{tg} \alpha x.$$

Wstawiając wyrażenia (3.56) do (3.50), otrzymamy równanie drgań swobodnych pasma płytowego. Wyrażenie to wraz z wyrażeniem (3.24) opisuje nam ruch pasma płytowego pod wpływem przesuwającej się wzdłuż pasma siły.

#### 4. PRZYKŁAD

W przykładzie liczbowym zajęto się przypadkiem, gdy ruch trwa już jakiś czas i wpływ drgań swobodnych jest w zaniku. W związku z tym do obliczeń wykorzystano wzór (3.52). Dla porównania obliczeń ugięcia liczono w układzie «ruchomym».

W obliczeniach przyjęto: siła  $P=1 \text{ T}$ , grubość płyty betonowej 19 cm,  $E=200000 \text{ kG/cm}^2$ ,  $\mu=0,0426 \text{ Tsec}^2/\text{m}^3$  oraz  $k=5000 \text{ T/m}^3$ .

Obliczenia wykonano na EMC ODRA 1204 układając program w języku ALGOL 1204.

Ugięcia podano w metrach (ograniczono wyniki do czterech cyfr znaczących).

Tablica 1

V(m/sec) \ U (m)	0	20	40	60
0,0	$1,194 \cdot 10^{-5}$	$1,252 \cdot 10^{-5}$	$1,334 \cdot 10^{-5}$	$1,384 \cdot 10^{-5}$
1,0	$8,072 \cdot 10^{-6}$	$7,723 \cdot 10^{-6}$	$7,243 \cdot 10^{-6}$	$6,961 \cdot 10^{-6}$
2,0	$5,738 \cdot 10^{-6}$	$5,320 \cdot 10^{-6}$	$4,770 \cdot 10^{-6}$	$4,626 \cdot 10^{-6}$
3,0	$-9,355 \cdot 10^{-7}$	$-7,867 \cdot 10^{-7}$	$-4,261 \cdot 10^{-7}$	$1,542 \cdot 10^{-8}$
4,0	$-1,731 \cdot 10^{-6}$	$-1,388 \cdot 10^{-6}$	$-1,014 \cdot 10^{-6}$	$-1,076 \cdot 10^{-6}$
5,0	$-4,277 \cdot 10^{-7}$	$-1,220 \cdot 10^{-7}$	$2,652 \cdot 10^{-7}$	$4,477 \cdot 10^{-7}$
6,0	$1,951 \cdot 10^{-6}$	$1,464 \cdot 10^{-6}$	$8,073 \cdot 10^{-7}$	$4,349 \cdot 10^{-7}$
7,0	$-1,105 \cdot 10^{-6}$	$-8,227 \cdot 10^{-7}$	$-4,528 \cdot 10^{-7}$	$-2,379 \cdot 10^{-7}$
8,0	$-8,768 \cdot 10^{-7}$	$-5,157 \cdot 10^{-7}$	$-1,822 \cdot 10^{-8}$	$-3,019 \cdot 10^{-8}$
9,0	$1,624 \cdot 10^{-7}$	$8,446 \cdot 10^{-8}$	$-4,062 \cdot 10^{-8}$	$-1,406 \cdot 10^{-8}$
10,0	$7,552 \cdot 10^{-7}$	$4,501 \cdot 10^{-7}$	$3,657 \cdot 10^{-8}$	$3,119 \cdot 10^{-8}$

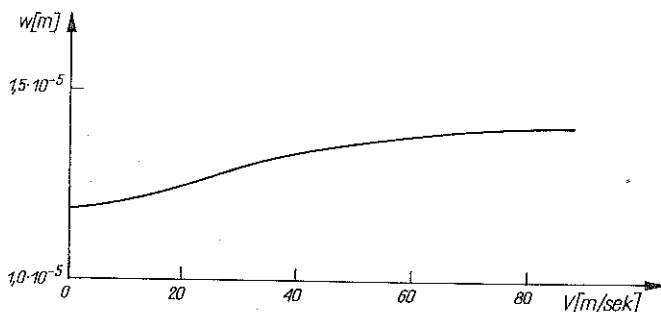
## 5. WNIOSKI

Przedstawione powyżej zagadnienie stanowi w pewnym sensie rozwiązanie drgań drogi startowej pod działaniem lądującego samolotu. Dokładniejsze rozwiązanie można by otrzymać zakładając, że na krawędzi  $y=a$  moment zginający i siła poprzeczna są równe zero. Zmieniłby się tylko w tym przypadku zapis matematyczny i odpowiednie równania byłyby bardziej skomplikowane. Uwzględnienie tłumienia też nie nastęrczyłoby specjalnych kłopotów.

Przyjmując inne warunki początkowe dla równania drgań (np.  $W(x, y, 0) + W(x, y, 0) = f(x, y)$ ), gdzie  $f(x, y)$  byłoby rozwiązaniem statycznym), mielibyśmy rozwiązane zagadnienie np. startu samolotu.

Mimo że otrzymane wzory mają formę dość skomplikowaną, to dzięki zastosowaniu szybko liczących maszyn cyfrowych istnieje możliwość otrzymania wystarczająco dokładnych wyników.

Pozostaje jeszcze do ustalenia optymalna wartość warunku  $\alpha$  (z rys. 2 wnioskujemy, że wynosi ona 4) i przyjęcie odpowiedniego przedziału dla całkowania numerycznego, gdyż  $\alpha$  musi się zmieniać w sposób ciągły [9].



Rys 3

Wpływ prędkości na wielkość ugięcia pod punktem działania siły ilustruje rys. 3. Analizując wyniki widzimy, że wpływ prędkości, która w rozwiązaniach komunikacyjnych odgrywa ważną rolę, może być uwzględniony w zakresie odpowiadającym aktualnym potrzebom.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. P. TIMOSHENKO, *La Genie Civil*, 2.4. Decembre 1921 p. 555.
2. W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Arkady, Warszawa 1972.
3. S. KALISKI i inni, *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.
4. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty. Obliczenia statyczne*, Arkady, 1969.
5. M. ŻYSZKO, *Drgania nieograniczonej płyty na sprężystym podłożu pod wpływem przesuwających się obciążeń*, Rozprawa doktorska, Biblioteka PW, 1968.
6. R. SKARŻYŃSKI, *Dynamiczne linie wpływu ugięć wieloczęściowego pasma na sprężystym podłożu*, Rozpr. Inżyn., 4, 1970.
7. W. SZCZEŚNIAK, *Drgania wymuszone belki i płyty na podłożu odkształcalnym pod obciążeniem ruchomym*, Rozprawa doktorska, Biblioteka PW, 1970.
8. R. SOLECKI, J. SZYMKIEWICZ, *Układy prętowe i powierzchniowe. Obliczenia dynamiczne*, Arkady, 1964.
9. G. M. FICHTENHOLZ, *Rachunek różniczkowy i całkowity*, t. III, PWN 1963.
10. F. JARZYŃSKI, *Drgania niestabilne płyt sprężystych pod wpływem siły ruchomej*, Wydawnictwa Politechniki Poznańskiej, Poznań 1972.
11. M. ŻYSZKO, *Drgania nieograniczonej płyty na sprężystym podłożu pod wpływem przesuwających się obciążeń*, *Archiwum Inżyn. Łądowej*, 14, 2, 1968.

#### Резюме

#### КОЛЕБАНИЯ ПЛИТОЧНОЙ ПОЛОСЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, ВЫЗВАННЫЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКОЙ

В работе рассматриваются нестационарные колебания плиточной полосы, вызванные движущейся с постоянной скоростью силой, приложенной к плите в момент времени  $t=0$ . Функция описывающая колебания плиты с двумя закрепленными краями представлена в виде интеграла Фурье.

#### SUMMARY

#### VIBRATIONS OF PLATE STRIP ON ELASTIC FOUNDATION CAUSED BY MOVING LOAD

Nonstationary vibrations of plate strip caused by a force moving with constant velocity and applied to the plate at time  $t=0$ , are considered. A function describing the vibrations of a plate fixed on two edges is presented in a form of Fourier integral.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji 10 lipca 1973 r.