

METODA SZTYWNYCH ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W OBLICZENIACH KONSTRUKCJI OKRĘTOWYCH

JAN KRUSZEWSKI, WŁODZIMIERZ GAWROŃSKI i EDMUND
WITTBRODT (GDAŃSK)

Metoda sztywnych elementów skończonych należy do typowych metod mechaniki komputerowej. Polega ona na podziale układu rzeczywistego na sztywne elementy połączone ze sobą linowymi elementami sprężysto-tłumiącymi. W pracy dano podstawy teoretyczne metody oraz oceniono jej dokładność i pokazano przykłady zastosowania (drżania kadłuba statku, wałów napędowych i innych urządzeń okrętowych). Za jej pomocą oblicza się ruch swobodny i wymuszony konstrukcji. Wymuszenia mogą być zarówno siłowe jak i kinematyczne, okresowe, nieokresowe i stochastyczne.

1. WSTĘP

Metoda sztywnych elementów skończonych należy do typowych metod mechaniki «komputerowej», opracowana jest bowiem pod kątem łatwego programowania na elektroniczne maszyny cyfrowe.

Geneza metody związana jest ściśle z polskim przemysłem okrętowym, dla którego biur konstrukcyjnych opracowane zostały na jej podstawie programy obliczeń drgań swobodnych oraz drgań wymuszonych różnorodnych ustrojów.

Pierwsze programy oparte na metodzie sztywnych elementów skończonych dotyczyły obliczeń drgań skrętnych typowych okrętowych wałów napędowych [6 i 7] oraz wałów rozwidlonych [8]. W obu przypadkach stosowano sztywne elementy skończone o jednym stopniu swobody. W r. 1969 zastosowano metodę do sztywnych elementów skończonych o większych liczbach stopni swobody [9], ograniczając się jednak do obliczeń tylko drgań swobodnych. Metodę tę udoskonalono [10 i 11], układając programy umożliwiające obliczanie drgań swobodnych układów prętowych i płytowych. Znalazły one zastosowanie w przemyśle okrętowym do obliczeń drgań giętnych kadłubów statków, drgań giętnych wałów napędowych na wielu podporach w tym również tzw. elastycznych wałów typu Grima oraz drgań urządzeń okrętowych mocowanych sprężysto do odkształcalnych platform (również połączonych z kadłubem sprężysto). Platformy te, zwane platformami pływającymi (floating rafts), zastosowane łącznie z elastycznym wałem typu Grima na statku badawczym »Prof. Siedlecki«, zapewniły wyjątkowo małe drżania urządzeń i kadłuba, obniżając znacznie poziom hałasu w maszynowni i innych pomieszczeniach. Niewątpliwie do sukcesu konstruktorów tej jednostki w dużej mierze przyczyniła się metoda sztywnych elementów skończonych, dzięki której mogli oni łatwo dobrać optymalne pod względem stanu drgań rozwiązania konstrukcyjne. W r. 1972 zastosowano metodę sztywnych elementów skończonych do obliczeń drgań wymuszonych

nietłumionych [4] oraz do drgań z uwzględnieniem tłumienia [5]. Drgania mogły być wymuszane siłami okresowymi i pseudookresowymi. Następnie [3] opierając się również na metodzie sztywnych elementów skończonych opracowano algorytm obliczania drgań wymuszanych kinematycznie. W chwili obecnej prowadzone są prace w Instytucie Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Gdańskiej nad algorytmami obliczeń drgań wymuszonych siłami nieokresowymi przy niezerowych warunkach początkowych oraz siłami o charakterze stochastycznym. Na podstawie metody sztywnych elementów skończonych tworzy się obecnie dla potrzeb przemysłu okrętowego system obliczeń drgań nazwany SFEM 72 [12]. Programy tego systemu pisane są w języku FORTRAN IV i uruchamiane na komputerze ICL systemu IV. Przy opracowywaniu tych programów przywiązuje się szczególną wagę do automatyzacji procesu przygotowywania danych, co jest szczególnie istotne dla biur projektowych.

Istotną nowością tej pracy w stosunku do poprzednich naszych publikacji jest podanie podstaw matematycznych metody sztywnych elementów skończonych w ogólnej formie, poprawnej zarówno dla wymuszeń siłowych, kinematycznych jak i siłowo-kinetycznych. W dotychczasowych publikacjach podstawy te zostały omówione fragmentarycznie, niejednokrotnie bez wystarczająco ścisłych uzasadnień i tylko dla szczególnych przypadków. Wydaje się więc, że numer Rozpraw Inżynierskich poświęcony zastosowaniom matematyki w okrętownictwie stwarza możliwość zapoznania Czytelników z aktualnie najnowszym i dotychczas nigdzie nie publikowanym ujęciem podstaw matematycznych metody sztywnych elementów skończonych, metody — która znalazła szerokie zastosowania w budownictwie okrętowym.

2. MODEL OBLICZENIOWY

2.1. Elementy składowe modelu obliczeniowego

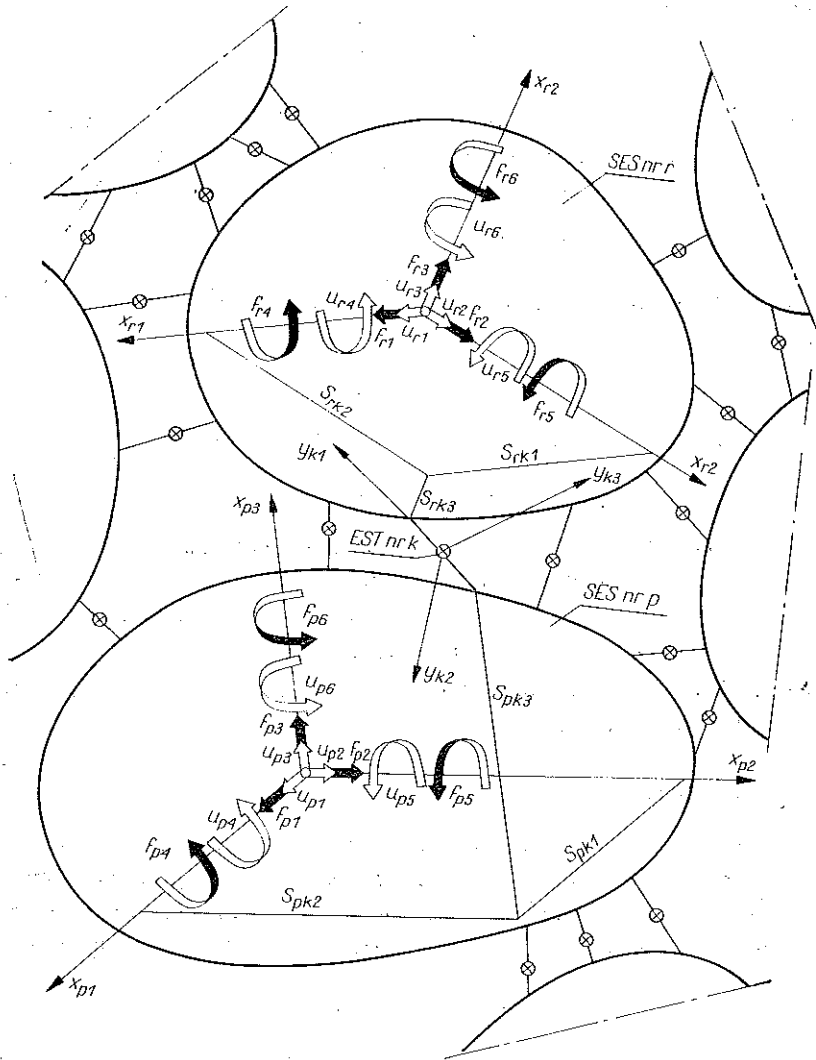
Model obliczeniowy (rys. 1) składa się z \bar{n} nieodkształcalnych brył nazwanych sztywnymi elementami skończonymi (SES) oraz z v elementów sprężysto-tłumiących (EST). Sposób łączenia sztywnych elementów skończonych elementami sprężysto-tłumiącymi jest dowolny.

Sztywny element skończony charakteryzują masy i masowe momenty bezwładności, natomiast element sprężysto-tłumiący — współczynniki sztywności i tłumienia. Masę elementu sprężysto-tłumiącego pominięto. Przyjęto, że charakterystyki EST są liniowe.

2.2. Układy odniesienia

Przy matematycznym opisie ruchu układu złożonego ze sztywnych elementów skończonych, połączonych elementami sprężysto-tłumiącymi (rys. 1), stosuje się niezależne układy odniesienia, przyporządkowane poszczególnym SES oraz EST. Układy te są układami nieruchomymi.

Układ osi x_{r1}, x_{r2}, x_{r3} pokrywa się w stanie równowagi badanego układu z głównymi, centralnymi osiami bezwładności sztywnego elementu skończonego o numerze r .



Rys. 1. Model obliczeniowy. Strzałkami białymi zaznaczono kierunki współrzędnych uogólnionych, a strzałkami czarnymi kierunki sił uogólnionych

Układ y_{k1}, y_{k2}, y_{k3} pokrywa się w stanie równowagi modelu obliczeniowego z głównymi osiami deformacji elementu sprężysto-tłumiącego o numerze k .

Układy x_{r1}, x_{r2}, x_{r3} są układami podstawowymi, ponieważ względem nich rozpatrywany jest ruch badanego modelu obliczeniowego.

Dodać należy, że główne osie deformacji elementu sprężysto-tłumiącego charakteryzują się tym, że siły działające na element w kierunku zgodnym z tymi osiami

powodują jego odkształcenia translacyjne i prędkości odkształceń translacyjnych tylko w kierunku działania tych sił. Oczywiście odnosi się to również i do par sił, które działając wokół głównych osi powodują odkształcenia rotacyjne i prędkości odkształceń rotacyjnych tylko wokół tych osi.

2.3. Współczynniki bezwładności

Każdy SES określony jest blokiem współczynników bezwładności. Ze względu na to, że osie x_{r1} , x_{r2} , x_{r3} są głównymi centralnymi osiami bezwładności — blok ten jest macierzą diagonalną. Dla układów przestrzennych jego postać jest następująca:

$$(2.1) \quad M_r = \text{diag} \{m_{r1}, m_{r2}, \dots, m_{r6}\}.$$

Pierwsze trzy wyrazy diagonalne tego bloku są równe masie SES oznaczonego numerem r , stąd

$$m_{r1} = m_{r2} = m_{r3}.$$

Niekiedy istnieją jednak takie układy, dla których należy przyjmować

$$m_{r1} \neq m_{r2} \neq m_{r3}.$$

Układy takie występują wtedy, gdy wielkość masy SES zależy od kierunku jego ruchu. Ma to miejsce wtedy, gdy masa ośrodka towarzyszącego ruchowi SES jest różna w zależności od kierunku ruchu. Ze zjawiskiem takim spotykamy się na przykład przy obliczaniu drgań kadłuba statku.

Pozostałe trzy wyrazy diagonalne bloku M_r są masowymi momentami bezwładności SES względem osi x_{r1} , x_{r2} , x_{r3} .

2.4. Współczynniki sztywności i tłumienia

Każdy EST określony jest blokiem współczynników tłumienia i blokiem współczynników sprężystości. Ze względu na to, że osie y_{k1} , y_{k2} , y_{k3} są głównymi osiami EST — bloki te są macierzami diagonalnymi. W przypadku układu przestrzennego blok współczynników sztywności EST o numerze k ma następującą postać:

$$(2.2) \quad C_k = \text{diag} \{c_{k1}, c_{k2}, \dots, c_{k6}\}.$$

Pierwsze trzy wyrazy diagonalne tego bloku są współczynnikami sztywności translacyjnej wzdłuż osi y_{k1} , y_{k2} , y_{k3} . Współczynnik taki definiujemy jako stosunek siły do odkształcenia EST, które ta siła powoduje. Oczywiście siła ta musi działać wzdłuż głównej osi deformacji EST, powodując odkształcenie w kierunku tej osi. W układach rzeczywistych przez pojęcie «współczynnik sztywności translacyjnej» rozumiemy współczynnik sztywności rozciągania lub ścinania.

Pozostałe trzy wyrazy diagonalne są współczynnikami sztywności rotacyjnej wokół osi y_{k1} , y_{k2} , y_{k3} . Współczynnik taki definiujemy jako stosunek momentu powodującego odkształcenie rotacyjne EST do wielkości tego odkształcenia. Moment ten działa wokół głównej osi EST, powodując jego odkształcenie rotacyjne

względem tej osi. W układach rzeczywistych przez pojęcie «współczynnik sztywności rotacyjnej» rozumiemy współczynnik sztywności skręcania lub zginania.

Postać bloku współczynników tłumienia EST jest taka sama jak bloku współczynników sztywności. Dla układów przestrzennych mamy:

$$(2.3) \quad \mathbf{B}_k = \text{diag} \{b_{k1}, b_{k2}, \dots, b_{k6}\}.$$

Pierwsze trzy wyrazy diagonalne są współczynnikami tłumienia translacyjnego EST o numerze k wzdłuż osi y_{k1}, y_{k2}, y_{k3} . Współczynnik taki definiujemy jako stosunek siły wywołującej prędkość odkształcenia translacyjnego EST do wielkości tej prędkości. Siła ta działa wzdłuż głównej osi EST, wywołując jego prędkość odkształcenia wzdłuż tej osi.

Pozostałe trzy wyrazy diagonalne są współczynnikami tłumienia rotacyjnego wokół osi y_{k1}, y_{k2}, y_{k3} . Współczynnik ten definiujemy jako stosunek momentu wywołującego prędkość odkształcenia rotacyjnego EST do wielkości prędkości odkształcenia.

Istnieją układy, w których mogą występować EST nie posiadające własności tłumiących lub własności sprężystych. W pierwszym przypadku nazywać je będziemy elementami sprężystymi, w drugim — elementami tłumiącymi. Dla elementów sprężystych bloki współczynników tłumienia są blokami zerowymi, a dla elementów tłumiących bloki współczynników sztywności są blokami zerowymi.

Metody obliczania współczynników sztywności i tłumienia EST dla układów zastępujących rzeczywiste konstrukcje omówiono w następnym punkcie.

2.5. Współrzędne uogólnione i siły uogólnione

W układach przestrzennych każdy SES ma sześć stopni swobody, a więc dla jednoznacznego określenia jego położenia musimy podać sześć współrzędnych uogólnionych. Jako współrzędne uogólnione przyjęto przemieszczenia środka masy SES, licząc od położenia równowagi, w kierunku osi x_{r1}, x_{r2}, x_{r3} oraz jego obroty wokół tych osi. Współrzędne te tworzą blok w postaci wektora. Dla układu przestrzennego ma on postać:

$$(2.4) \quad \mathbf{u}_r = \text{col} \{u_{r1}, u_{r2}, \dots, u_{r6}\}.$$

Pierwsze trzy wyrazy tego wektora są przemieszczeniami translacyjnymi, natomiast trzy ostatnie — przemieszczeniami rotacyjnymi.

Obciążenia działające zgodnie ze współrzędnymi uogólnionymi są w przyjętym modelu obliczeniowym siłami uogólnionymi. Siły te tworzą wektor

$$(2.5) \quad \mathbf{f}_r = \text{col} \{f_{r1}, f_{r2}, \dots, f_{r6}\},$$

gdzie pierwsze trzy wyrazy są siłami działającymi wzdłuż osi x_{r1}, x_{r2}, x_{r3} , natomiast pozostałe — momentami działającymi wokół tych osi.

Zgodność numeracji sił uogólnionych z numeracją współrzędnych uogólnionych musi być ściśle zachowana (rys. 1). Jeżeli w rzeczywistym układzie siły nie działają wzdłuż głównych centralnych osi bezwładności, to należy przeprowadzić ich redukcję do sił uogólnionych.

2.6. Klasyfikacja sztywnych elementów skończonych ze względu na obciążenia

W układzie obliczeniowym występują dwa rodzaje sztywnych elementów skończonych:

1) elementy, na które działają znane obciążenia, a niewiadomymi są współrzędne uogólnione;

2) elementy, których dany ruch jest określony, a niewiadomymi są siły wywołujące ten ruch.

W związku z tym wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$\mathbf{u}_r = \begin{cases} \mathbf{q}_r, & \text{gdy jest nieznan ruch SES,} \\ \mathbf{z}_r, & \text{gdy jest dany ruch SES} \end{cases}$$

oraz

$$\mathbf{f}_r = \begin{cases} \mathbf{p}_r, & \text{gdy jest nieznan ruch SES,} \\ \mathbf{r}_r, & \text{gdy jest dany ruch SES.} \end{cases}$$

Często na sztywne elementy skończone nie działają obciążenia; wtedy $\mathbf{p}_r = \mathbf{0}$. Szczególnym przypadkiem sztywnego elementu skończonego o danym ruchu jest element nieruchomy, dla którego $\mathbf{z}_r = \mathbf{0}$. Element taki nazywamy ostoją. Osie x_{r1}, x_{r2}, x_{r3} ostoi można przyjąć dowolnie.

2.7. Transformacja przemieszczeń

W dalszych rozważaniach potrzebne są związki uzależniające energię potencjalną odkształcenia EST od współrzędnych uogólnionych. W celu wyznaczenia tych zależności w pierwszym rzędzie należy znaleźć związek między przemieszczeniami sztywnych elementów skończonych w punktach, w których zamocowane są EST, a współrzędnymi uogólnionymi. Pamiętać przy tym trzeba, że wektor przemieszczeń SES w punkcie zamocowania EST jest w układzie y_{k1}, y_{k2}, y_{k3} , a wektor współrzędnych uogólnionych — w układzie x_{r1}, x_{r2}, x_{r3} . Wspomniany związek, zwany transformacją przemieszczeń, ma następującą postać [5]:

$$(2.6) \quad \mathbf{w}_{rk} = \mathbf{F}_{rk} \mathbf{u}_r,$$

gdzie $\mathbf{w}_{rk} = \text{col} \{w_{r1}, w_{r2}, \dots, w_{r6}\}$ oznacza wektor przemieszczeń SES o numerze r w punkcie zamocowania EST o numerze k , $\mathbf{u}_r = \text{col} \{u_{r1}, u_{r2}, \dots, u_{r6}\}$ wektor współrzędnych uogólnionych r -tego SES jest to wektor przemieszczenia tego SES w środku masy;

$$(2.7) \quad \mathbf{F}_{rk} = \mathbf{\Theta}_{rk} \mathbf{S}_{rk}$$

jest macierzą transformacji, przy czym

$$(2.8) \quad \mathbf{\Theta}_{rk} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Theta}_{rk}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Theta}_{rk}^* \end{bmatrix},$$

$$(2.9) \quad \mathbf{\Theta}_{rk}^* = [\cos \vartheta_{rk\alpha\beta}], \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3,$$

oraz

$$(2.10) \quad S_{rk} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & s_{rk3} & -s_{rk2} \\ 0 & 1 & 0 & -s_{rk3} & 0 & s_{rk1} \\ 0 & 0 & 1 & s_{rk2} & -s_{rk1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz Θ_{rk} nazywamy blokiem współczynników kierunkowych ($\vartheta_{rka\beta}$ jest kątem nachylenia osi y_{ka} względem osi $x_{r\beta}$), a macierz S_{rk} blokiem współrzędnych zamocowania (s_{rka} jest współrzędną punktu zamocowania k -tego EST do r -tego SES mierzone w kierunku osi x_{ra}).

2.8. Odkształcenia elementów sprężysto-tłumiących

Odkształcenia EST przedstawia się za pomocą wektora, który dla układów przestrzennych posiada sześć wyrazów:

$$(2.11) \quad \Delta w_k = \text{col} \{ \Delta w_{k1}, \Delta w_{k2}, \dots, \Delta w_{k6} \}.$$

Wektor odkształceń EST jest różnicą wektorów przemieszczeń końców rozpatrywanego EST:

$$(2.12) \quad \Delta w_k = w_{rk} - w_{pk},$$

gdzie w_{rk} oznacza wektor przemieszczeń końca EST o numerze k przyczepionego do SES o numerze r oraz w_{pk} — wektor przemieszczeń końca tego samego EST przyczepionego do SES o numerze p .

Wykorzystując zależność (2.6) uzyskuje się następujący wzór, uzależniający wektor odkształceń EST od wektorów współrzędnych uogólnionych sztywnych elementów skończonych, połączonych rozpatrywanym EST:

$$(2.13) \quad \Delta w_k = F_{rk} u_r - F_{pk} u_p.$$

2.9. Układy szczególne

W praktyce wiele konstrukcji można zastąpić znacznie prostszymi modelami obliczeniowymi. Układy płaskie modeluje się sztywnymi elementami skończonymi o dwóch lub trzech stopniach swobody, a przy obliczaniu drgań skrętnych lub wzdłużnych wałów napędowych można stosować elementy o jednym stopniu swobody. Ponadto wiele konstrukcji można zastąpić modelem o osiach x_{r1}, x_{r2}, x_{r3} i y_{k1}, y_{k2}, y_{k3} odpowiednio równoległych do siebie. Wszystkie te przypadki opisywane są za pomocą macierzy o znacznie mniejszych wymiarach lub prostszej strukturze. Zagadnieniami tymi szczegółowo zajmuje się praca [10].

3. PARAMETRY MODELI OBLICZENIOWYCH

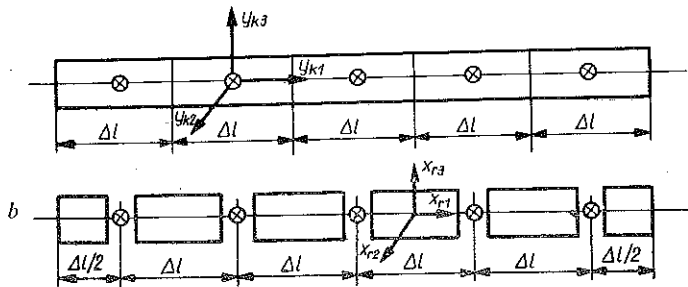
Rzeczywiste konstrukcje mogą być dzielone na sztywne elementy skończone i elementy sprężysto-tłumiące w dwojaki sposób:

1) Za sztywne elementy skończone przyjmuje się całe fragmenty konstrukcji, jak na przykład zespoły prądotwórcze, sprężarki, sztywne platformy itp., a za elementy sprężysto-tłumiące — sprężyny, podkładki gumowe, tłumiki drgań itp. Podział taki nazywamy rzeczywistym, ponieważ rzeczywiste elementy konstrukcyjne przyjmowane są za SES i EST.

2) Sztywne elementy skończone i elementy sprężysto-tłumiące uzyskuje się na drodze pomyślanego podziału ciągłych fragmentów belek i płyt. Podział taki nazywamy wyobraźnym.

Oczywiście w jednym modelu obliczeniowym mogą występować oba podziały równocześnie. Sposób obliczania współczynników bezwładności (mas i masowych momentów bezwładności) nie wymaga wyjaśnień, ponieważ oblicza się je powszechnie znanymi metodami. Również w przypadku podziału rzeczywistego, gdy elementy sprężysto-tłumiące są rzeczywistymi elementami konstrukcji, współczynniki sztywności oblicza się ze znanych wzorów wytrzymałości materiałów lub np. w przypadku podkładek gumowych dobiera się je na podstawie katalogów firmowych. Podobnie współczynniki tłumienia tłumików podaje zwykle ich wytwórca.

Przy podziale na sztywne elementy skończone fragmentów ciągłych w sposób pomyślany oblicza się współczynniki sztywności przy założeniu, że naprężenia na odcinku wzdłuż zastępowanej części są stałe. Zakłada się, że EST odkształca się w identyczny sposób z zastępowanym fragmentem konstrukcji.



Rys. 2. Podział belki pryzmatycznej na sztywne elementy skończone

Poniżej zostanie wyjaśniona metoda wyznaczania współczynników sztywności elementów sprężysto-tłumiących, uzyskanych z podziału belki pryzmatycznej (rys. 2a). Belkę tę dzieli się na równe odcinki o długości Δl i w środkach tych odcinków skupia się ich własności sprężysto-tłumiące. Następnie między tak uzyskanymi skupionymi EST umieszcza się sztywne elementy skończone (rys. 2b). Każdy z elementów sprężysto-tłumiących w układzie przestrzennym przenosi trzy siły i trzy pary sił, a więc określony jest sześcioma współczynnikami sprężystości i sześcioma współczynnikami tłumienia.

Z prostych rozważań teorii sprężystości przy założeniu modelu Kelvina-Voigta [2] wzory na obliczanie tych współczynników są następujące:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} c_{k1} &= \frac{EF}{\Delta l} \left[\frac{\text{kG}}{\text{cm}} \right], & c_{k2} = c_{k3} &= \frac{GF}{\chi \Delta l} \left[\frac{\text{kG}}{\text{cm}} \right], \\ c_{k4} &= \frac{GJ_0}{\Delta l} [\text{kGcm}], & c_{k5} &= \frac{EJ_2}{\Delta l} [\text{kGcm}], \\ & & c_{k6} &= \frac{EJ_3}{\Delta l} [\text{kGcm}], \end{aligned}$$

gdzie EF oznacza sztywność na rozciąganie, GF/χ sztywność na ścinanie, GJ_0 sztywność na skręcanie, EJ_2 sztywność na zginanie wokół osi y_{k2} , EJ_3 sztywność na zginanie wokół osi y_{k3} , przy czym F jest polem powierzchni przekroju poprzecznego belki, a E modułem Younga; G oznacza moduł Kirchhoffa (odkształcenia postaciowego), J_0 biegunowy moment bezwładności przekroju poprzecznego (tylko dla przekrojów kołowo-symetrycznych), J_2, J_3 momenty bezwładności przekroju poprzecznego względem osi y_{k2}, y_{k3} , χ współczynnik uwzględniający nierównomierny rozkład naprężeń stycznych przy zginaniu oraz

$$(3.2) \quad \begin{aligned} b_{k1} &= \frac{\eta F}{\Delta l} \left[\frac{\text{kGs}}{\text{cm}} \right], & b_{k2} = b_{k3} &= \frac{\bar{\eta} F}{\chi \Delta l} \left[\frac{\text{kGs}}{\text{cm}} \right], \\ b_{k4} &= \frac{\bar{\eta} J_0}{\Delta l} [\text{kGcms}], & b_{k5} &= \frac{\eta J_2}{\Delta l} [\text{kGcms}], \\ & & b_{k6} &= \frac{\eta J_3}{\Delta l} [\text{kGcms}]. \end{aligned}$$

We wzorach tych η oznacza stałą materiałową tłumienia normalnego oraz $\bar{\eta}$ stałą materiałową tłumienia stycznego.

Czytelników pragnących poznać się z wyprowadzaniem tych wzorów odsyła się do pracy [5].

Moduły sprężystości na ogół są znane dla poszczególnych materiałów konstrukcyjnych. Niestety, posiadamy bardzo mało danych o stałych materiałowych tłumienia. Tłumienie zależy od tylu różnych czynników, że określenie dokładnej jego wartości liczbowej dla rzeczywistych konstrukcji jest najczęściej niemożliwe.

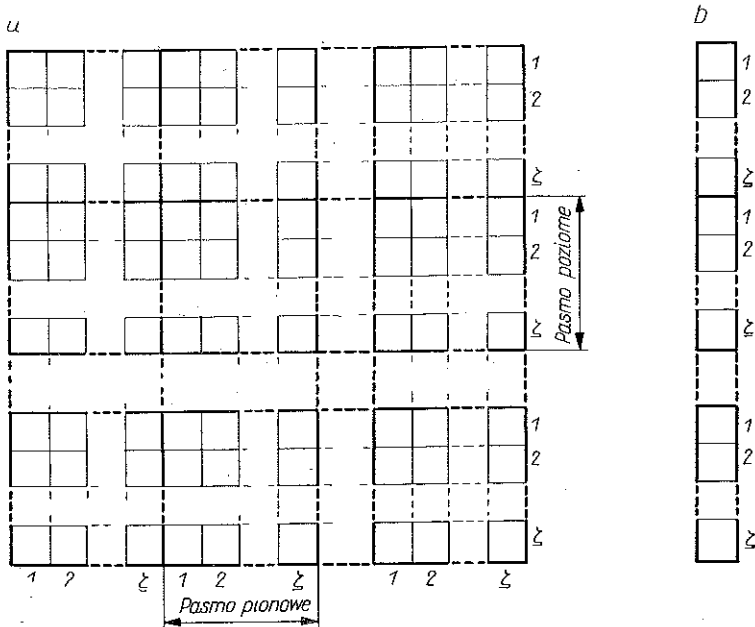
W praktyce jednak przy obliczaniu drgań swobodnych, jak również drgań wymuszonych w dostatecznej odległości od rezonansu, najczęściej nie uwzględnia się w ogóle tłumienia, gdyż jego wpływ jest nieznaczny. Natomiast przy obliczaniu amplitud drgań w rezonansie trzeba się liczyć z możliwością popełnienia dużych błędów. Przy projektowaniu jednak unikamy zwykle takich rozwiązań, w których maszyna pracuje w rezonansie.

Oczywiście analogiczne wzory można również uzyskać dla belek niepryzmatycznych, zakrzywionych jak również i płyt [10].

4. RÓWNANIA RUCHU

4.1. Blokowa postać macierzy układu

W p. 2 wykazano, że wszystkie wielkości określające sztywne elementy skończone, elementy sprężysto-tłumiące oraz przemieszczenia i siły uogólnione określone są za pomocą bloków. Bloki są albo macierzami kwadratowymi o wymiarze $\zeta \times \zeta$, albo macierzami kolumnowymi o wymiarze $\zeta \times 1$, gdzie ζ jest liczbą stopni swobody jednego sztywnego elementu skończonego.



Rys. 3. Blokowa postać macierzy sztywności

Przy wyprowadzaniu równań ruchu tworzy się macierze, zwane macierzami układu. Charakteryzują one cały układ i składają się z bloków (rys. 3) o takich samych wymiarach jak bloki omówione w p. 2. Matematyczny ich zapis nie zmienia się przy zmianie liczby stopni swobody sztywnych elementów skończonych dla układów szczególnych, co znacznie uogólnia, a przy tym upraszcza rozważania. Operować więc będziemy najczęściej nie na poszczególnych wyrazach macierzy, lecz na całych blokach, dzielących macierze układu na pasma poziome i pasma pionowe o szerokości ζ . Pasma te traktować będziemy jako wiersze i kolumny macierzy układu.

4.2. Wektory współrzędnych uogólnionych i sił uogólnionych układu

Położenie układu złożonego z \tilde{u} sztywnych elementów skończonych określone jest w przestrzeni za pomocą współrzędnych uogólnionych

$$(4.1) \quad \tilde{n} = \zeta \tilde{u}.$$

Współrzędne te tworzą wektor o wymiarze $\tilde{n} \times 1$, który składa się z bloków współrzędnych uogólnionych poszczególnych sztywnych elementów skończonych:

$$(4.2) \quad \mathbf{u} = \text{col} \{ \mathbf{u}_r \} = \text{col} \{ u_i \}, \quad r = 1, 2, \dots, \tilde{u}, \quad i = 1, 2, \dots, \tilde{n}.$$

Podobnie siły uogólnione układu tworzą wektor o takim samym wymiarze. Utworzony jest on z bloków sił uogólnionych działających na poszczególne sztywne elementy skończone:

$$(4.3) \quad \mathbf{f} = \text{col} \{ \mathbf{f}_r \} = \text{col} \{ f_i \}, \quad r = 1, 2, \dots, \tilde{u}, \quad i = 1, 2, \dots, \tilde{n}.$$

Sztywne elementy skończone układu numeruje się zwykle w ten sposób, aby w pierwszej kolejności podawać numery sztywnych elementów skończonych o nieznanym ruchu $r = 1, 2, \dots, u$, a następnie sztywne elementy skończone o danym ruchu $r = u + 1, u + 2, \dots, \tilde{u}$. Wtedy wektory współrzędnych uogólnionych i wektory sił uogólnionych można podzielić na bloki

$$(4.4) \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dots \\ \mathbf{z} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(4.5) \quad \mathbf{q} = \text{col} \{ \mathbf{u}_r \}, \quad r = 1, 2, \dots, u$$

jest wektorem współrzędnych uogólnionych sztywnych elementów skończonych o nieznanym ruchu, a

$$(4.6) \quad \mathbf{z} = \text{col} \{ \mathbf{u}_r \}, \quad r = u + 1, u + 2, \dots, \tilde{u}$$

jest wektorem współrzędnych uogólnionych sztywnych elementów skończonych o danym ruchu. Podobnie

$$(4.7) \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \dots \\ \mathbf{r} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(4.8) \quad \mathbf{p} = \text{col} \{ \mathbf{f}_r \}, \quad r = 1, 2, \dots, u$$

jest wektorem sił uogólnionych, a

$$(4.9) \quad \mathbf{r} = \text{col} \{ \mathbf{f}_r \}, \quad r = u + 1, u + 2, \dots, \tilde{u}$$

jest wektorem nieznanymi sił uogólnionych (reakcji).

4.3. Równanie różniczkowe ruchu

Równanie różniczkowe ruchu wyprowadza się z równań Lagrange'a drugiego rodzaju. W zapisie macierzowym dla drgań o niewielkich amplitudach ma ono postać

$$(4.10) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \mathbf{f},$$

gdzie

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \text{col} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right\}, \quad \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}} = \text{col} \left\{ \frac{\partial U}{\partial u_i} \right\}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \text{col} \left\{ \frac{\partial R}{\partial \dot{u}_i} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, \tilde{n}.$$

Energia kinetyczna układu jest równa sumie energii kinetycznych poszczególnych sztywnych elementów skończonych:

$$(4.11) \quad T = \sum_{r=1}^{\tilde{n}} T_r.$$

Energię kinetyczną sztywnego elementu skończonego przedstawia się w postaci formy kwadratowej

$$(4.12) \quad T_r = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_r^T \mathbf{M}_r \dot{\mathbf{u}}_r.$$

Jak łatwo sprawdzić, wzór (4.12) można przedstawić w postaci

$$(4.13) \quad T_r = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_r^*{}^T \mathbf{M}_r^* \dot{\mathbf{u}}_r^*,$$

gdzie

$$\mathbf{u}_r^* = \text{col} \{ \underbrace{0, 0, \dots, 0, \mathbf{u}_r, 0, \dots, 0}_{\text{Blok nr } r} \}$$

oraz

$$(4.13a) \quad \mathbf{M}_r^* = \text{diag} \{ \underbrace{0, 0, \dots, 0, \mathbf{M}_r, 0, \dots, 0}_{\text{Blok nr } r} \}.$$

Wykonując mnożenie można wykazać, że

$$(4.14) \quad T_r = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_r^*{}^T \mathbf{M}_r^* \dot{\mathbf{u}}_r^* = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_r^T \mathbf{M}_r \dot{\mathbf{u}}_r.$$

Wstawiając wyrażenie (4.14) do (4.11) uzyskujemy

$$T = \sum_{r=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_r^*{}^T \mathbf{M}_r^* \dot{\mathbf{u}}_r^* = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \left(\sum_{r=1}^{\tilde{n}} \mathbf{M}_r^* \right) \dot{\mathbf{u}}.$$

Oznaczając

$$(4.15) \quad \tilde{\mathbf{M}} = \sum_{r=1}^{\tilde{n}} \mathbf{M}_r^*,$$

energii kinetycznej układu nadamy postać

$$(4.16) \quad T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{u}}.$$

Macierz $\tilde{\mathbf{M}}$, zwana macierzą bezwładności, jest macierzą diagonalną, ponieważ jest ona sumą macierzy diagonalnych.

Sposób tworzenia macierzy \tilde{M} wyjaśniono dodatkowo w przykładzie (rys. 5). Różniczkując energię kinetyczną T (4.16) względem wektora prędkości, a następnie względem czasu, uzyskujemy

$$(4.17) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) = \tilde{M} \ddot{\mathbf{u}}.$$

Energia potencjalna układu jest równa sumie energii potencjalnych poszczególnych elementów sprężystych

$$(4.18) \quad U = \sum_{k=1}^v U_k.$$

Energję potencjalną odkształcenia elementu sprężystego o numerze k , łączącego SES o numerze r z SES o numerze p przedstawia się za pomocą formy kwadratowej

$$(4.19) \quad U_k = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{w}_k^T \mathbf{C}_k \Delta \mathbf{w}_k,$$

gdzie \mathbf{C}_k oznacza blok określający współczynniki sztywności elementu sprężysto-tłumiącego o numerze k według zależności (2.2) oraz gdzie $\Delta \mathbf{w}_k$ jest wektorem (blokiem) określającym odkształcenie elementu sprężysto-tłumiącego o numerze k według zależności (2.13).

Zależność (4.19) przedstawia się analogicznie jak związek (4.13) za pomocą wzoru

$$(4.20) \quad U_k = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{w}_k^* T \mathbf{C}_k^* \Delta \mathbf{w}_k^*,$$

gdzie

$$(4.21) \quad \mathbf{C}_k^* = \text{diag} \{ \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \underbrace{\mathbf{C}_k}_{\text{Blok nr } r}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0} \}$$

oraz

$$(4.22) \quad \Delta \mathbf{w}_k^* = \text{col} \{ \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \underbrace{\Delta \mathbf{w}_k}_{\text{Blok nr } r}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0} \}.$$

Uwzględniając związek (2.13), z (4.22) otrzymujemy

$$(4.23) \quad \Delta \mathbf{w}_k^* = \text{col} \{ \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{F}_{rk} \mathbf{u}_r - \mathbf{F}_{pk} \mathbf{u}_p, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0} \}.$$

Wprowadzając następnie macierz

$$(4.24) \quad \mathbf{N}_{rk} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{rk} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{F}_{pk} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Pasma poziome nr } r \\ \text{Pasma poziome nr } p \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Pasma pionowe nr } r} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Pasma pionowe nr } p}$

zależność (4.23) można zapisać w postaci

$$(4.25) \quad \Delta w_k^* = N_{rk} u.$$

Wstawiając (4.25) do (4.20) otrzymujemy

$$(4.26) \quad U_k = \frac{1}{2} (N_{rk} u)^T C_k^* (N_{rk} u) = \frac{1}{2} u^T (N_{rk}^T C_k^* N_{rk}) u.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$(4.27) \quad \tilde{K}_k = N_{rk}^T C_k^* N_{rk}$$

zależność (4.26) przedstawimy w postaci

$$(4.28) \quad U_k = \frac{1}{2} u^T \tilde{K}_k u.$$

Macierz \tilde{K}_k ma następującą postać:

$$(4.29) \quad \tilde{K}_k = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & K_{rrk} & 0 & \dots & 0 & K_{rpk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & K_{prk} & 0 & \dots & 0 & K_{ppk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{Pasma poziome nr } r \\ \\ \\ \text{Pasma poziome nr } p \\ \\ \\ \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Pasma pionowe nr } r} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Pasma pionowe nr } p}$

gdzie

$$(4.30) \quad K_{rrk} = F_{rk}^T C_k F_{rk}, \quad K_{ppk} = F_{pk}^T C_k F_{pk}, \quad K_{rpk} = -F_{rk}^T C_k F_{pk}, \quad K_{prk} = K_{rpk}^T.$$

Wstawiając następnie (4.28) do (4.18) uzyskujemy

$$(4.31) \quad U = \sum_{k=1}^v \frac{1}{2} u^T \tilde{K}_k u = \frac{1}{2} u^T \left(\sum_{k=1}^v \tilde{K}_k \right) u.$$

Oznaczając

$$(4.32) \quad \tilde{K} = \sum_{k=1}^v \tilde{K}_k$$

wzór (4.31), uzależniający energię potencjalną układu od wektora współrzędnych uogólnionych, przedstawimy w następującej postaci:

$$(4.33) \quad U = \frac{1}{2} u^T \tilde{K} u.$$

Stąd

$$(4.34) \quad \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{u}.$$

Macierz $\tilde{\mathbf{K}}$ określoną wzorem (4.32) nazywamy macierzą sztywności układu. Sposób tworzenia tej macierzy wyjaśniono dodatkowo w zamieszczonym przykładzie (rys. 5).

Funkcję dysypacji układu przedstawia się jako sumę funkcji dysypacji poszczególnych elementów sprężysto-tłumiących:

$$(4.35) \quad R = \sum_{k=1}^v R_k = \sum_{k=1}^v \frac{1}{2} \Delta \dot{\mathbf{w}}_k^T \mathbf{B}_k \Delta \dot{\mathbf{w}}_k,$$

gdzie $\Delta \dot{\mathbf{w}}_k$ oznacza wektor prędkości odkształceń elementu sprężysto-tłumiącego o numerze k oraz \mathbf{B}_k blok współczynników tłumienia elementu sprężysto-tłumiącego o numerze k określony zależnością (2.3).

Związek między funkcją dysypacji układu a wektorem prędkości uogólnionych wyprowadza się podobnie jak zależność między energią potencjalną a wektorem współrzędnych uogólnionych. Wywody te można więc pominąć. Funkcję dysypacji układu otrzymujemy w postaci

$$(4.36) \quad R = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{u}},$$

gdzie

$$(4.37) \quad \tilde{\mathbf{L}} = \sum_{k=1}^v \tilde{\mathbf{L}}_k$$

nazywamy macierzą tłumienia układu.

Macierz $\tilde{\mathbf{L}}_k$ ma podobną postać jak macierz $\tilde{\mathbf{K}}_k$, a pochodna cząstkowa funkcji dysypacji określona wzorem (4.36) względem wektora prędkości uogólnionych ma postać

$$(4.38) \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \tilde{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{u}}.$$

Wykorzystując zależność (4.17), (4.34) i (4.38), z równań Lagrange'a (4.10) otrzymujemy niejednorodne równania różniczkowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach, które w zapisie macierzowym mają następującą postać:

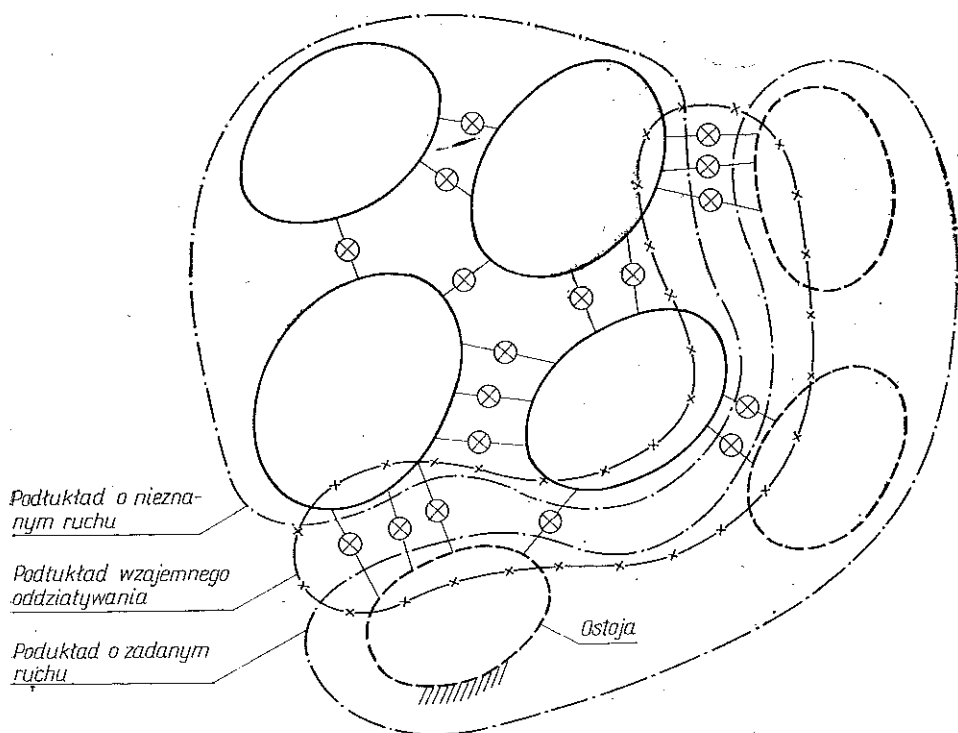
$$(4.39) \quad \tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

Przy dalszych rozważaniach wygodnie jest podzielić układ obliczeniowy na trzy podukłady (rys. 4): 1) podukład o nieznanym ruchu, na który działają dane wymuszenia siłowe, 2) podukład o danym ruchu, na który działają nieznanne siły powodując ten ruch oraz 3) podukład wzajemnego oddziaływania poprzednio omówionych podukładów.

Podukład o nieznanym ruchu zawiera u sztywnych elementów skończonych, a jego położenie w przestrzeni określone jest współzrzednymi uogólnionymi

$$(4.40) \quad n = \zeta u.$$

Wielkość tych współzrzednych nie jest znana, a celem naszych rozważań jest wyznaczenie określających je funkcji czasu.



Rys. 4. Podział układu obliczeniowego na podukład o nieznanym ruchu, podukład o danym ruchu i podukład wzajemnych oddziaływań

W skład podukładu o nieznanym ruchu wchodzi ponadto elementy sprężysto-tłumiące, łączące między sobą sztywne elementy skończone o nieznanym ruchu, oraz EST łączące podukład o nieznanym ruchu z podukładem o danym ruchu.

Podukład o danym ruchu zawiera u' sztywnych elementów skończonych a jego ruch określony jest n' współzrzednymi uogólnionymi, będącymi danymi funkcjami czasu

$$n' = \zeta u'.$$

W skład podukładu o danym ruchu wchodzi ponadto elementy sprężysto-tłumiące, łączące go z podukładem o nieznanym ruchu.

W skład trzeciego podukładu (wzajemnych oddziaływań) wchodzi elementy sprężysto-tłumiące, łączące podukład o danym ruchu z podukładem o nieznanym ruchu.

Wydzielenie podukładów w modelu obliczeniowym pozwala rozdzielić macierze wchodzące w skład równań (4.39) na dwa bloki kwadratowe o wymiarach równych liczbie stopni swobody podukładu o nieznanym ruchu ($n \times n$) i podukładu o danym ruchu ($n' \times n'$) oraz bloki prostokątne o wymiarach ($n \times n'$) i ($n' \times n$), będące odpowiednikami układu wzajemnych oddziaływań:

$$(4.41) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{L}' \\ \mathbf{L}'^T & \mathbf{L}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}' \\ \mathbf{K}'^T & \mathbf{K}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}.$$

Bloki \mathbf{M} , \mathbf{L} i \mathbf{K} mają wymiary $n \times n$ i odpowiadają układowi o nieznanym ruchu.

Blok

$$(4.42) \quad \mathbf{M} = \text{diag}\{\mathbf{m}_r\}, \quad r = 1, 2, \dots, u$$

nazywamy macierzą bezwładności podukładu o nieznanym ruchu lub w skrócie macierzą bezwładności.

Blok \mathbf{K} uzyskujemy przez skreślenie w macierzy $\tilde{\mathbf{K}}$ pasm poziomych i pionowych o numerach większych od u . Nazywamy go macierzą sztywności podukładu o nieznanym ruchu lub w skrócie macierzą sztywności.

Blok \mathbf{L} tworzymy analogicznie do bloku \mathbf{K} skreślając w macierzy $\tilde{\mathbf{L}}$ pasma pionowe i poziome o numerach większych od u . Nazywamy go macierzą tłumienia podukładu o nieznanym ruchu lub w skrócie macierzą tłumienia. Bloki \mathbf{M}' , \mathbf{K}' , \mathbf{L}' o wymiarach $n' \times n'$ odpowiadają układowi o danym ruchu.

Blok

$$\mathbf{M}' = \text{diag}\{\mathbf{M}_r\}, \quad r = u + 1, u + 2, \dots, \tilde{u}$$

nazywamy macierzą bezwładności podukładu o danym ruchu, przy czym składowy blok \mathbf{M}_r , odpowiadający ostoi, nie wchodzi do dalszych obliczeń i w związku z tym można przyjąć dowolnie wartości liczbowe na jego wyrazy. Na ogół zakłada się, że jest to blok zerowy. Również, jeżeli wymuszeniom kinematycznym poddane są bezpośrednio końce elementów sprężysto-tłumiących, to masę sztywnych elementów skończonych, przyczepionych do tych końców, traktujemy jako zerową. W obu wyżej opisanych przypadkach osie układu x_{r1} , x_{r2} , x_{r3} możemy obierać dowolnie.

Blok \mathbf{K}' uzyskujemy przez skreślenie w macierzy $\tilde{\mathbf{K}}$ pasm poziomych i pionowych o numerach mniejszych i równych u . Nazywamy go macierzą sztywności podukładu o danym ruchu.

W analogiczny sposób tworzy się blok \mathbf{L}' skreślając w macierzy $\tilde{\mathbf{L}}$ pasma poziome i pionowe o numerach mniejszych i równych u .

Bloki \mathbf{K}'' i \mathbf{L}'' posiadają wymiary $n \times n'$ i odpowiadają układowi wzajemnego oddziaływania. Blok \mathbf{K}'' nazywamy macierzą sztywności połączeń podukładu o nieznanym ruchu z podukładem o danym ruchu, a w skrócie macierzą sztywności oddziaływań kinematycznych. Analogicznie blok \mathbf{L}'' nazywamy macierzą tłumienia oddziaływań kinematycznych.

Po przemnożeniu bloków w równaniu (4.41) otrzymujemy dwa równania macierzowe ruchu o następującej postaci:

$$(4.43) \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{L}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{K}''\mathbf{z} - \mathbf{L}''\dot{\mathbf{z}}$$

oraz

$$(4.44) \quad \mathbf{M}'\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{L}'^T\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{L}'\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}'^T\mathbf{q} + \mathbf{K}'\mathbf{z} = \mathbf{r}.$$

Prawa strona pierwszego z tych równań przedstawia dane wymuszenia zarówno w postaci sił uogólnionych jak i w postaci kinematycznej. Rozwiązanie tego równania prowadzi do wyznaczenia jako funkcji czasu wektora przemieszczeń uogólnionych, sztywnych elementów skończonych rozpatrywanego układu.

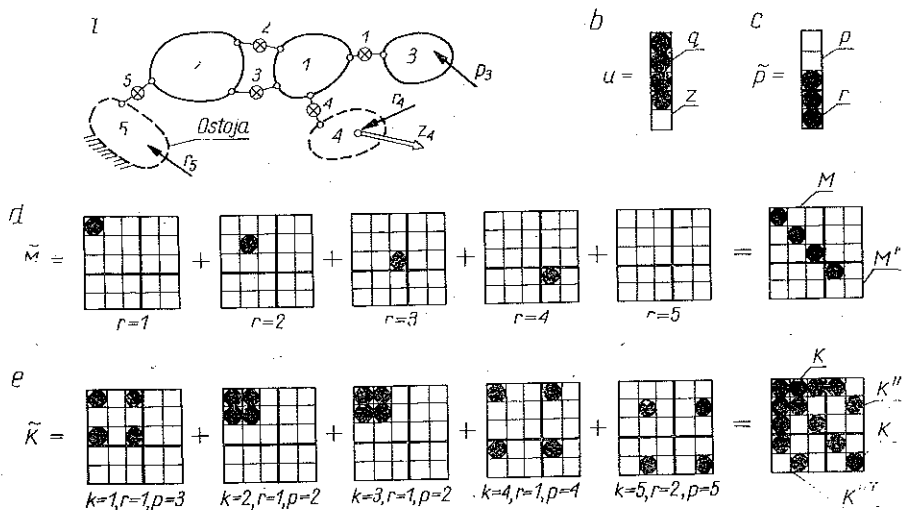
Prawą stroną równania (4.43) nazywamy wektorem zredukowanych sił wymuszających i oznaczamy

$$(4.45) \quad \mathbf{h} = \text{col}\{\mathbf{h}_r\} = \mathbf{p} - \mathbf{K}''\mathbf{z} - \mathbf{L}''\dot{\mathbf{z}}, \quad r=1, 2, \dots, u.$$

Równanie (4.43) niezależnie od typu wymuszeń przyjmuje wtedy postać

$$(4.46) \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{L}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{h}.$$

Dla przykładu rozpatrzmy układ składający się z pięciu sztywnych elementów skończonych (rys. 5a), przy czym jeden z nich jest ostoją ($r=5$) i jeden posiada dany ruch ($r=4$). Stąd $u=3$, $u'=2$, $\tilde{u}=5$, czyli macierze układu mają pięć pasm pionowych i pięć pasm poziomych, a wektory składają się z pięciu bloków.



Rys. 5. a) Układ złożony z pięciu SES, b) schemat wektora współrzędnych uogólnionych, c) schemat wektora sił uogólnionych, d) schemat tworzenia macierzy bezwładności, e) schemat tworzenia macierzy sztywności. Kratki zaczerknione oznaczają bloki niezerowe

Na rys. 5b przedstawiono wektor współrzędnych uogólnionych układu z podziałem na podwektory \mathbf{q} i \mathbf{z} . W wektorze tym ostatni blok jest blokiem zerowym, ponieważ odpowiada on ostoi, której ruch z założenia jest zerowy.

Na rys. 5c przedstawiono wektor sił uogólnionych układu z podziałem na podwektory \mathbf{p} i \mathbf{r} . Pierwsze dwa bloki wektora \mathbf{p} są blokami zerowymi, ponieważ na sztywne elementy skończone o numerze 1 i 2 nie działają żadne wymuszenia.

Na rys. 5d przedstawiono macierz bezwładności układu i jej podział na macierze M i M' . Macierz \tilde{M} uzyskuje się sumując pięć macierzy M_r^* ($r=1, 2, \dots, 5$), odpowiadających poszczególnym sztywnym elementom skończonym i utworzonych na podstawie zależności (4.13a). Ostatni blok diagonalny podmacierzy M' jest blokiem zerowym, ponieważ odpowiada on ostoji i nie wchodzi do dalszych obliczeń.

Na rys. 5e przedstawiono macierz sztywności układu oraz jej podział na podmacierze K , K' i K'' . Macierz \tilde{K} uzyskuje się sumując pięć macierzy K_k ($k=1, 2, \dots, 5$) odpowiadających pięciu EST i utworzonych na podstawie zależności (4.27).

Macierz \tilde{K}_1 ma niezerowe bloki na przecięciu się pasm poziomych i pasm pionowych o numerach 1 i 3, ponieważ EST o numerze 1, dla którego tworzona jest macierz \tilde{K}_1 , łączy sztywne elementy skończone o numerach 1 i 3. Macierze \tilde{K}_2 i \tilde{K}_3 mają niezerowe bloki na przecięciu się pasm poziomych z pionowymi o numerach 1 i 2, ponieważ EST o numerach 2 i 3 łączą sztywne elementy skończone o numerach 1 i 2. Macierz \tilde{K}_4 ma niezerowe bloki na przecięciu się pasm poziomych z pasmami pionowymi o numerach 1 i 4, ponieważ EST o numerze 4 łączy sztywne elementy skończone o numerach 1 i 4. Podobnie macierz \tilde{K}_5 posiada niezerowe bloki na przecięciu się pasm poziomych z pasmami pionowymi o numerach 2 i 5, ponieważ EST o numerze 5 połączony jest z ostoją, której nadano numer 5.

Sposób tworzenia macierzy tłumienia układu jest identyczny ze sposobem tworzenia macierzy sztywności.

Na rys. 5b–5e poszczególne bloki M , M' , K , K' , K'' oddzielono od siebie grubszymi liniami.

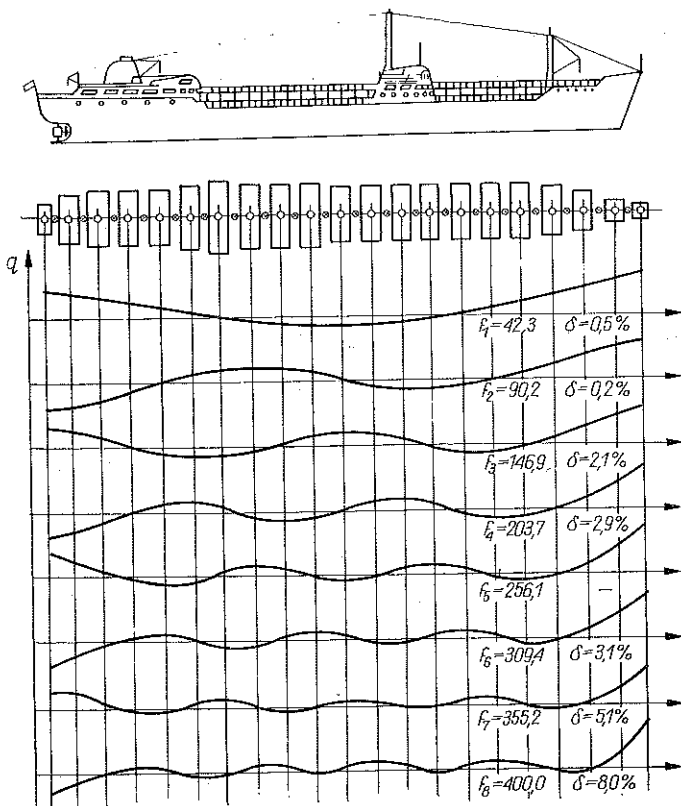
5. ZASTOSOWANIA I DOKŁADNOŚĆ METODY SES

Niżej podano niektóre przypadki zastosowań metody SES. Wykorzystano ją do obliczeń drgań własnych i form drgań kadłubów statków [10] (rys. 6), drgań własnych i wymuszonych okrętowych wałów napędowych [7 i 8] (rys. 7), drgań prętów zakrzywionych [10], drgań urządzeń okrętowych, płyt itp.

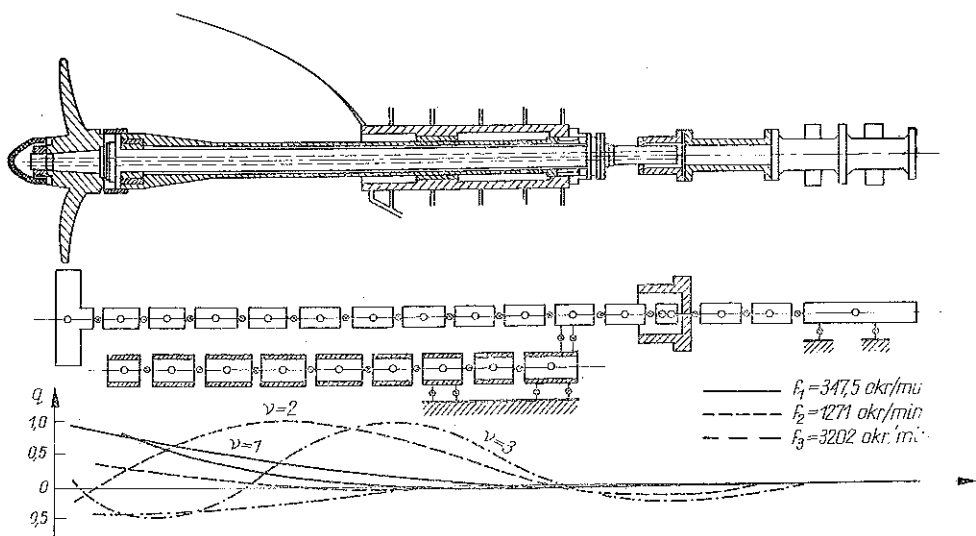
Metodę SES wykorzystuje się do obliczeń drgań własnych konstrukcji [10 i 11], drgań wymuszonych siłami okresowymi [4, 5 i 14], stochastycznymi stacjonarnymi i siłami niestacjonarnymi wraz z ruchem swobodnym układu. Wymuszenia powyższe mogą być zarówno siłowe, jak i kinematyczne lub mieszane siłowo-kinematyczne. Oblicza się również obciążenia, reakcje i naprężenia układów obciążonych statycznie.

Dokładność metody ocenia się na podstawie porównania z wynikami pomiarów lub z obliczeniami przeprowadzonymi innymi metodami uznanymi za dokładne. To ostatnie z konieczności musi ograniczać się do prostych układów ze względu na ograniczoność metod klasycznych. Na rys. 8 podano dokładność obliczeń częstości drgań własnych swobodnej belki pryzmatycznej, a na rys. 6 uwidoczniła jest dokładność obliczeń drgań własnych kadłuba statku porównana z pomiarami.

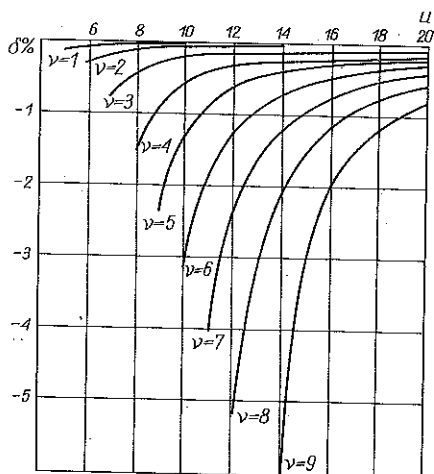
Dla drgań wymuszonych sprawdzono dokładność obliczeń amplitud drgań belki pryzmatycznej w zależności od gęstości podziału [4].



Rys. 6. Schemat kadłuba zbiornikowca, jego podział na sztywne elementy skończone oraz pierwszych osiem postaci drgań swobodnych (δ — odchyłka metody SES w stosunku do pomiarów, f — częstość drgań własnych w okr/min)



Rys. 7. Wał napędowy typu Grima: podział na sztywne elementy skończone i trzy pierwsze postacie drgań własnych



Rys. 8. Dokładność obliczeń częstości drgań własnych w zależności od gęstości podziału swobodnej belki pryzmatycznej (ν — numer postaci drgań własnych, δ — odchyłka metody SES w stosunku do metody Csupora [10], uwzględniającej wpływ sił stycznych i energię kinetyczną ruchu obrotowego, u — liczba SES na jaką podzielono rozpatrywaną belkę)

6. WNIOSKI

1. Metoda SES należy do metod mechaniki «komputerowej».
2. Dokładność metody dla celów praktycznych jest wystarczająco dobra.
3. Metoda SES znalazła szerokie zastosowanie do obliczeń drgań swobodnych i wymuszonych różnorodach konstrukcji okrętowych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. G. ANDERSON, K. NORRAND, *A method for the calculation of vertical vibration with several nodes and some other aspects of ship vibration*, RINA, 1969.
2. W. DERSKI, S. ZIEMBA, *Analiza modeli reologicznych*, PWN, Warszawa 1966.
3. W. GAWROŃSKI, *Drgania układów liniowych wymuszone kinematycznie*, Arch. Bud. Masz., 4, 1973.
4. W. GAWROŃSKI, J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do analizy drgań złożonych układów liniowych*, Rozpr. Inż., 20, 4, 1972.
5. W. GAWROŃSKI, J. KRUSZEWSKI, *Analiza drgań wymuszonych złożonych układów liniowych metodą sztywnych elementów skończonych*, Arch. Bud. Masz., 4, 1972.
6. J. KRUSZEWSKI, *Macierzowa metoda obliczania częstości skrętnych drgań własnych układów napędowych*, Zbiór Prac WSMW, 12, 1965.
7. J. KRUSZEWSKI, *Nowa metoda obliczeń drgań skrętnych okrętowych układów napędowych za pomocą elektronicznej maszyny cyfrowej*, Bud. Okr., 8, 1964.
8. J. KRUSZEWSKI, *Macierzowa metoda obliczania częstości skrętnych drgań własnych rozwidlo-nych układów napędowych*, Zbiór Prac WSMW, 13, 1965.
9. J. KRUSZEWSKI, W. OJAK, *Application of finite element method to calculations of ship structure vibrations*, Eur. Shipbuilding, 3, 1969.

10. J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń częstości drgań własnych złożonych układów liniowych*, Zesz. Nauk. Pol. Gdańskiej, Mechanika, 12, 1971.
11. J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń częstości drgań własnych ustrojów okrętowych*, Mech. Teor. i Stos., 4, 1971.
12. J. KRUSZEWSKI, *System obliczeń SFEM 72*. Materiały sympozjum pt. Metody numeryczne w mechanice, Gdańsk 1972.
13. J. KRUSZEWSKI, W. GAWROŃSKI, E. WITTBRODT, *Stiff finite elements method in the dynamics of the structures*, Ref. II Seminar about FE Method in Plzen, Plzen 1973.
14. E. WITTBRODT, J. KRUSZEWSKI, *Algorytm obliczeń drgań wymuszonych metodą sztywnych elementów skończonych*, Arch. Inż. Łąd., 3, 1974.

Резюме

МЕТОД ЖЕСТКИХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАСЧЕТАХ СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Метод жестких конечных элементов является типичным численным методом в механике. Суть метода содержится в разделении действительной системы на жесткие элементы соединенные друг с другом линейными упруго-вязкими элементами.

В работе даны теоретические основы метода, указана его точность и примеры применения (колебания судового корпуса, приводных валов и другого судового оборудования). С помощью этого метода рассчитывается свободное и вынужденное движение конструкций. Можно рассчитывать силовые и кинематические, периодические, аperiodические и случайные вынуждения.

SUMMARY

THE STIFF FINITE ELEMENTS METHOD IN SHIPS STRUCTURES COMPUTATION

The stiff finite elements method is the typical numerical method in engineering. It consists in dividing of actual system on stiff elements interconnected with linear elastic — damping elements.

In the paper the theoretical basis of the method and its accuracy are discussed. The examples of application (vibrations of ships hull, propeller shafts and other ship's equipments) are given. It is used to computations of free and forced motions of the structures. The force and kinematic excitations with periodic, nonperiodic and stochastic character can be calculated.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 października 1973 r.