

## DYFUZJA OD ŹRÓDŁA PUNKTOWEGO W KANAŁE OTWARTYM

WŁODZIMIERZ CZERNUSZENKO (WARSZAWA)

### OZNACZENIA

- $t$  czas,
- $u$  wektor prędkości chwilowej,
- $u'$  wektor pulsacji prędkości,
- $\bar{u}$  wektor prędkości średniej,
- $U$  prędkość średnia przepływającej wody w kanale,
- $C$  chwilowe stężenie wskaźnika w punkcie,
- $\bar{C}$  średnie stężenie wskaźnika w punkcie,
- $C'$  pulsacja stężenia wskaźnika w punkcie,
- $C_0$  stężenie początkowe wskaźnika,
- $C_{\max}$  maksymalne stężenie wskaźnika w przekroju poprzecznym kanału,
- $q$  intensywność źródła w mg/sek,
- $Q$  wydatek źródła w  $\text{cm}^3/\text{sek}$ ,
- $D_{ij}$  tensor dyspersji,
- $K_{ij}$  tensor dyfuzji turbulentnej,
- $\delta(x)$  funkcja Diraca,
- $B$  szerokość kanału,
- $H$  głębokość wody w kanale,
- $d$  średnica źródła,
- $x_1, x_2, x_3$  współrzędne przyjętego układu odniesienia,
- $x, y, z$  układ współrzędnych prostokątnych.

### 1. WSTĘP

Praca dotyczy problemu przemieszczania się nieaktywnego wskaźnika wprowadzonego do przepływającej wody. Celem pracy jest zbadanie podstawowych cech charakteryzujących zjawisko transportu masy w przepływie turbulentnym w kanale otwartym. Rozpatrzono przypadek nieruchomego, punktowego źródła znajdującego się w przepływającej wodzie i wydatkującego nieaktywny wskaźnik — roztwór wodny rodaminy B z prędkością zbliżoną do prędkości przepływającej wody. Rozwiązanie tego prostego przypadku jest pomocne do zbadania procesu mieszania się rzutowych wód przemysłowych w rzekach i kanałach. Problem ten staje się coraz bardziej aktualny w związku z coraz szerszym wykorzystywaniem rzek jako odbiorników wód zanieczyszczonych. Z drugiej zaś strony wzrastają wymagania odnośnie czystości wód w rzekach. Wzrasta rola ochrony naturalnego środowiska

człowieka. Z tego względu wymagana jest dobra znajomość procesu mieszania się zanieczyszczonych wód przemysłowych z wodami rzek i kanałów.

Obecnie brak jest ogólnej teorii wyjaśniającej proces rozprzestrzenienia się wskaźnika wprowadzonego do przepływającego ośrodka. Znane są teorie dotyczące przypadków szczególnych jak np. przypadku dyfuzji w przepływie burzliwym o jednorodnej i izotropowej strukturze pola pulsacji prędkości. W niniejszej pracy zastosowano teorię TAYLORA [17] do opisu rozkładów stężeń wskaźnika wprowadzonego do przepływającej wody. TAYLOR podał swoją teorię w 1921 r. badając transport ciepła w przypadku jednowymiarowego, izotropowego przepływu turbulentnego. Po raz pierwszy teorię tę zastosowano w 1954 r. [18] do określenia rozkładu stężeń wprowadzonej jednorazowo porcji wskaźnika do przepływającej w rurze cieczy. W r. 1959 ELDER [5] zastosował teorię Taylora do opisu rozkładów stężeń wprowadzonego wskaźnika do przepływającej wody w kanale otwartym.

Poczynając od 1959 r. stale ukazują się prace poświęcone zastosowaniu teorii Taylora do różnych problemów transportu masy i ciepła w przepływie turbulentnym. Prace te jednak dotyczą wyłącznie transportu wskaźnika w kierunku przepływającej cieczy. Wynika to z faktu, że tylko w takim przypadku można bez zastrzeżeń przyjąć założenie dotyczące jednorodności przepływu. Brak jest natomiast teorii wyjaśniających proces poprzecznego przemieszczania się wskaźnika w kanałach otwartych. Istnieje szereg teorii półempirycznych dotyczących tego problemu. Jedną z najbardziej rozpowszechnionych i najczęściej stosowanych jest teoria oparta na równaniu dyfuzji turbulentnej. W pracy zostały zanalizowane i przedyskutowane rozwiązania tego równania dla różnych warunków charakteryzujących przepływ strumienia wody. Dla sprawdzenia przydatności omawianych teorii wykonano badania doświadczalne, dotyczące procesu rozprzestrzeniania się wskaźnika od nieruchomego źródła punktowego w burzliwym przepływie wody w kanale otwartym.

## 2. PODSTAWY TEORETYCZNE

Wprowadzona do strumienia porcja wskaźnika przemieszcza się na skutek ruchu ośrodka. Przemieszczanie to w zasadzie nie wpływa na deformację obszaru zajmowanego przez wskaźnik, a powoduje jedynie zmianę położenia chmury wskaźnika jako całości. Na skutek istnienia niejednorodności w rozkładzie stężenia wskaźnika, jak również na skutek istnienia turbulentnych perturbacji pola prędkości — obszar zajmowany przez wskaźnik ulega deformacji. Deformacja ta jest przede wszystkim spowodowana turbulencją przepływu, w mniejszym natomiast stopniu niejednorodnością w rozkładzie wskaźnika. Zatem często pomija się wpływ niejednorodności (efektów molekularnych) na proces rozprzestrzeniania się wskaźnika w przepływającym ośrodku. W przypadku gdy wprowadzony wskaźnik jest fizycznie nieodróżnialny od środka, równanie opisujące przemieszczanie się chmury wskaźnika w ośrodku poruszającym się z prędkością  $\bar{u}$  ma postać [12]

$$(2.1) \quad \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{C}}{\partial x_i} = - \frac{\partial S_i}{\partial x_i}, \quad i=1, 2, 3,$$

gdzie  $S_i = \overline{u'_i C'}$ . W równaniu powyższym jak i w zależnościach spotykanych niżej korzysta się z tzw. umowy sumacyjnej Einsteina. Wektor  $S$  interpretuje się jako gęstość strumienia turbulentnego przenoszenia wskaźnika. Zazwyczaj [7] przyjmuje się liniową zależność tego wektora od gradientu średniego stężenia, tzn.

$$(2.2) \quad S_i = -K_{ij} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j}.$$

Tensor dyfuzji turbulentnej  $K_{ij}$  jest w ogólnym przypadku funkcją położenia i czasu. Wykorzystując hipotezę (2.2) otrzymujemy następującą postać równania dyfuzji turbulentnej:

$$(2.3) \quad \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j}.$$

Powyższe równanie zastosujemy do opisu procesu dyfuzji z chwilowego źródła punktowego, znajdującego się w nieograniczonym, stacjonarnym i jednorodnym przepływie turbulentnym. Zakładając liniowe zmiany prędkości w kierunku głębokości i stałość składowych tensora dyspersji, równanie (2.3) sprowadzimy do postaci

$$(2.4) \quad \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + ax_3 \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_1} = K_{11} \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x_1^2} + K_{22} \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x_2^2} + K_{33} \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x_3^2}.$$

Rozwiązaniem tego równania przy warunku początkowym  $C(x, t_0) = \delta(x - x_0)$  jest trójwymiarowy rozkład Gaussa z następującymi składowymi tensora dyspersji [14]:

$$(2.5) \quad D_{1j} = 2/3 a^2 K_{33} t^3 + 2K_{11} t, \quad D_{22} = 2K_{22} t, \quad D_{33} = 2K_{33} t, \\ D_{12} = D_{23} = 0, \quad D_{13} = aK_{33} t^2.$$

Wychodząc z modelu Taylora tensor dyspersji można wyrazić w następującej postaci:

$$(2.6) \quad D_{ij}(t) = (\bar{u}_i'^2 \bar{u}_j'^2)^{1/2} \int_0^t (t-s) [R_{ij}(s) + R_{ji}(s)] ds,$$

gdzie

$$(2.7) \quad R_{ij}(s) = \frac{\overline{u'_i(x, t_0) u'_j(x, t_0 + s)}}{(\bar{u}_i'^2 \bar{u}_j'^2)^{1/2}}.$$

Tensor dyspersji  $D_{ij}(t)$  jest funkcją czasu i zależy w dużym stopniu od kształtu funkcji korelacji Lagrange'a  $R_{ij}(t)$ . Funkcja ta przy dostatecznie dużych wartościach  $t$  zeruje się, a dla czasów zbliżonych do zera przyjmuje wartość równą 1. A zatem dla pewnych przedziałów czasu tensor (2.6) można aproksymować następującymi wyrażeniami: dla krótkich czasów dyspersji

$$(2.8) \quad D_{ii}(t) = \bar{u}_i'^2 t^2;$$

dla długich czasów dyspersji

$$(2.9) \quad D_{ii}(t) = 2\bar{u}_i'^2 T_i t,$$

gdzie

$$(2.10) \quad T_i = \int_0^{\infty} R_{ii}(s) ds.$$

Można pokazać [6], że w przypadku nieujemnych funkcji korelacji zależność tensora dyspersji od ich przebiegu jest bardzo mała. Stąd (2.8) i (2.9) dobrze aproksymują równanie (2.6) odpowiednio przy  $t \leq T_i$  i  $t \geq 5T_i$ . Z porównania wzorów (2.9) i (2.5) widać rolę, jaką odgrywa gradient prędkości w przyspieszeniu procesu rozprzestrzeniania się wskaźnika w burzliwym przepływie wody. Przyspieszenie to jest zwłaszcza duże w przypadku mieszania podłużnego.

Zastosujemy równanie (2.3) do opisu procesu dyfuzji ze źródła punktowego znajdującego się w stacjonarnym, ograniczonym przepływie.

Wydatek źródła jest stały w czasie i wynosi  $q$  jednostek masy na sekundę. Jeżeli pominiemy dyfuzję w kierunku przepływu jako bardzo małą w stosunku do dyfuzji poprzecznej, to równanie dyfuzji turbulენტnej przyjmie postać

$$(2.11) \quad u_1 \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( K_{22} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( K_{33} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_3} \right).$$

Uprościmy równanie przyjmując, że jego współczynniki są stałe, i zastosujemy równanie do opisu procesu dyfuzji w kanale otwartym [8]. Załóżmy przy tym, że cząstki wody całkowicie odbijają się od sztywnych granic, a przepływ turbulენტny jest jednorodny i stacjonarny. Przy danym wydatku sekundowym źródła  $q$  rozwiązanie tak postawionego zagadnienia można otrzymać metodą obrazów symetrycznych [10].

Metoda ta polega na utworzeniu, poczynając od źródła, rzeczywistego ciągu punktów będących obrazami symetrycznymi źródła rzeczywistego i jego obrazów względem ścianek kanału i zwierciadła wody. W punktach tych umieszczamy źródła o parametrach takich samych jak źródło rzeczywiste. Suma rozwiązań odpowiadających wszystkim źródłom, ograniczona do rzeczywistego obszaru przepływu, stanowi poszukiwane rozwiązanie równania (2.11) z dodatkowym warunkiem zerowania się pochodnej poszukiwanej funkcji na ściankach kanału i na powierzchni zwierciadła wody.

Postępując w ten sposób otrzymujemy następujące rozwiązanie naszego zagadnienia:

$$(2.12) \quad \bar{C} = \frac{q}{U} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{22}}} \exp \left[ -\frac{(x_2 - x_{2i})^2}{2D_{22}} \right] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{33}}} \exp \left[ -\frac{(x_3 - x_{3j})^2}{2D_{33}} \right],$$

gdzie

$$(2.13) \quad D_{ii} = 2K_{ii} \frac{x}{U}, \quad i = 2, 3.$$

Źródło rzeczywiste jest położone w punkcie  $(0, x_{20}, x_{30})$ , a jego odbicia zwierciadlane w punktach  $(0, x_{2i}, x_{30})$  i  $(0, x_{20}, x_{3j})$ . Współrzędne tych punktów wyrażają się następującymi wzorami:

$$(2.14) \quad x_{2i} = \left( \frac{1}{2} + 2i \right) B \pm \left( \frac{B}{2} - x_{20} \right), \quad x_{2i} = - \left( \frac{3}{2} + 2i \right) B \pm \left( \frac{B}{2} - x_{20} \right),$$

$$(2.15) \quad x_{3j} = (1 + 2j) H \mp (H - x_{30}), \quad x_{3j} = - (1 + 2j) H \pm (H - x_{30}).$$

## 3. DYFUZJA W KANALE OTWARTYM

Ograniczymy nasze rozważania do przypadku bardzo szerokiego kanału, w którym ścianki boczne nie wpływają na rozprzestrzenienie się wprowadzonego wskaźnika. Wówczas proces dyfuzji ze względu na charakter zjawiska można podzielić na dwie strefy. Strefę dyfuzji swobodnej i strefę, w której istnieje oddziaływanie zwierciadła wody lub dna na mieszanie. Rozpatrzmy tylko wpływ zwierciadła wody na proces transportu wskaźnika pomijając wpływ dna kanału. W tym przypadku zależność (2.12) w układzie współrzędnych prostokątnych  $x, y, z$  upraszcza się do postaci

$$(3.1) \quad \bar{C}(x, y, z) = \frac{q}{U} \frac{1}{\sqrt{2\pi D_y}} \exp\left[-\frac{y^2}{2D_y}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi D_z}} \left\{ \exp\left[-\frac{(z-z_0)^2}{2D_z}\right] + \exp\left[-\frac{(z-2H+z_0)^2}{2D_z}\right] \right\},$$

gdzie  $q=QC_0$ ,  $Q$  oznacza wypływ wskaźnika,  $C_0$  koncentrację początkową oraz  $U$  prędkość średnią w kanale doświadczalnym.

W przypadku dyfuzji na niedużych odległościach od źródła, gdzie nie zaznacza się jeszcze wpływ zwierciadła wody, formuła opisująca rozprzestrzenienie się wskaźnika uprości się i przyjmie następującą postać:

$$(3.2) \quad \bar{C}(x, y, z) = \frac{q}{U} \frac{1}{\sqrt{2\pi D_y}} \exp\left[-\frac{y^2}{2D_y}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi D_z}} \exp\left[-\frac{(z-z_0)^2}{2D_z}\right].$$

Z powyższego wzoru wynikają trzy następujące wnioski:

1) dla ustalonych wartości  $y$  i  $z$  koncentracja wskaźnika zmienia się proporcjonalnie do  $x^{-1}$ ,

2) dla ustalonego  $x$  w miarę oddalenia się od osi strugi koncentracja wskaźnika zmienia się eksponencjalnie,

3) położenie maksymalnego stężenia wskaźnika w ustalonym przekroju poprzecznym kanału nie zmienia się z odległością od źródła i pokrywa się z osią źródła.

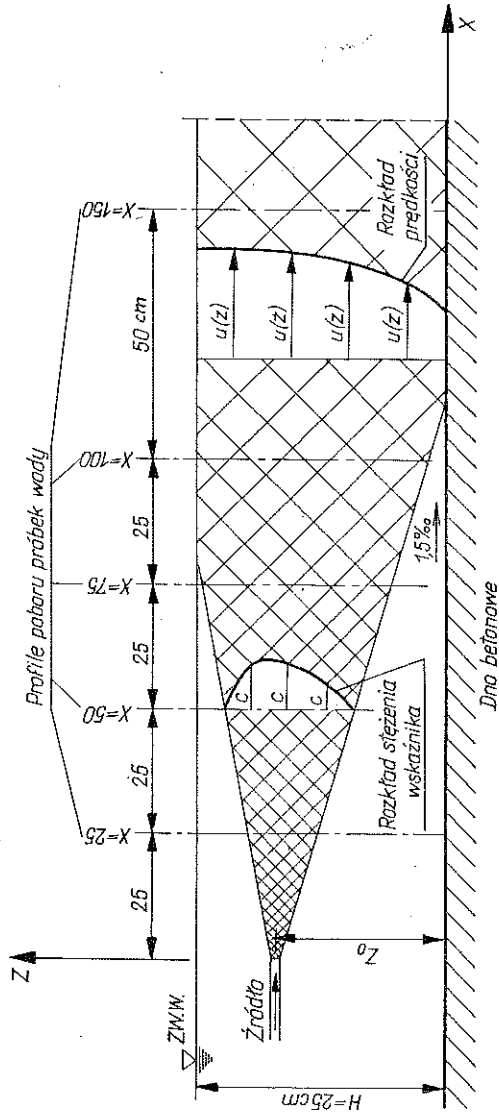
Zastanówmy się teraz, jaki przebieg mają linie jednakowych stężeń wskaźnika w ustalonym przekroju poprzecznym kanału w przypadku dyfuzji swobodnej. Dla ustalonego  $x$  funkcja  $\bar{C}(xyz)$  ma jedno maksimum leżące w punkcie  $(x, 0, z_0)$ . Niech  $\bar{C}(x, 0, z_0) = C_{\max}$ . Wówczas wzór (3.2) po zlogarytmowaniu i po niewielkich przekształceniach algebraicznych można sprowadzić do postaci

$$(3.3) \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{(z-z_0)^2}{b^2} = 1,$$

gdzie

$$(3.4) \quad a^2 = D_y \ln\left(\frac{C_{\max}}{\bar{C}(x, y, z)}\right)^2, \quad b^2 = D_z \ln\left(\frac{C_{\max}}{\bar{C}(x, y, z)}\right)^2.$$

Równanie (3.3) dla  $\bar{C}(x, y, z) = \text{const}$  jest równaniem elipsy lub okręgu. Może służyć ono do określenia wartości współczynników dyfuzji na podstawie znajomości

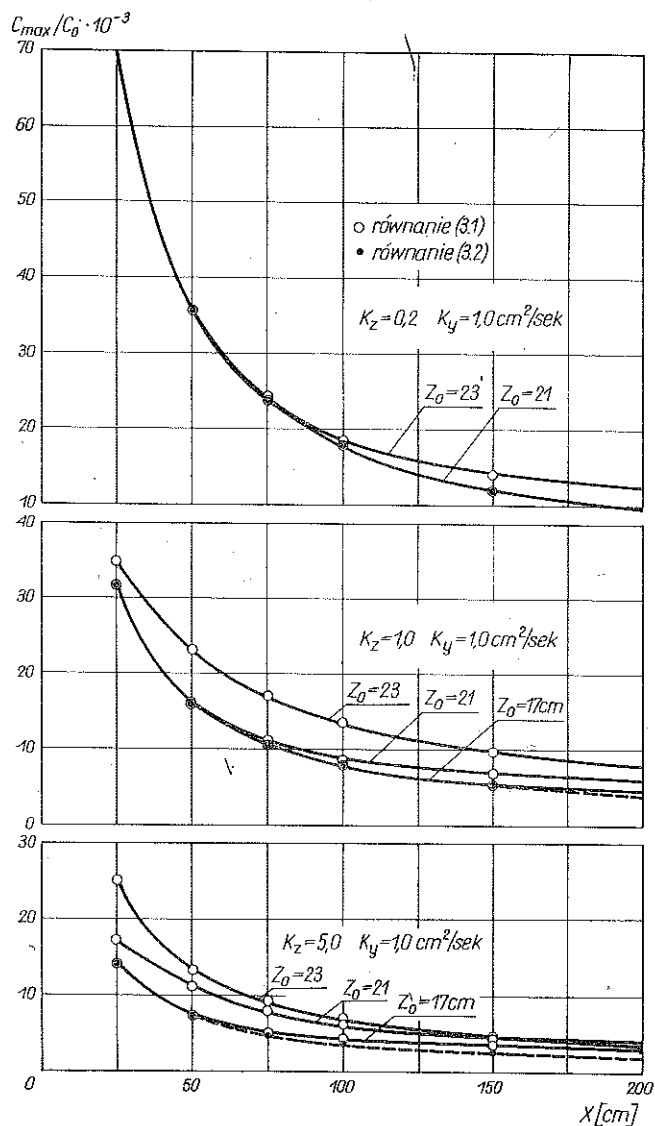


Rys. 1. Schemat badań doświadczalnych

wartości stężeń wskaźnika w trzech dowolnych punktach ustalonego przekroju poprzecznego kanału. Jako miarę rozproszenia wskaźnika często przyjmuje się długości głównych osi izolinii o stężeniu równym  $C_{max}/2$ . Długości te można łatwo wyliczyć ze wzoru (3.2); mają one postać

$$(3.5) \quad l_y = 2a = 2,36 \sqrt{D_y}, \quad l_z = 2b = 2,36 \sqrt{D_z}.$$

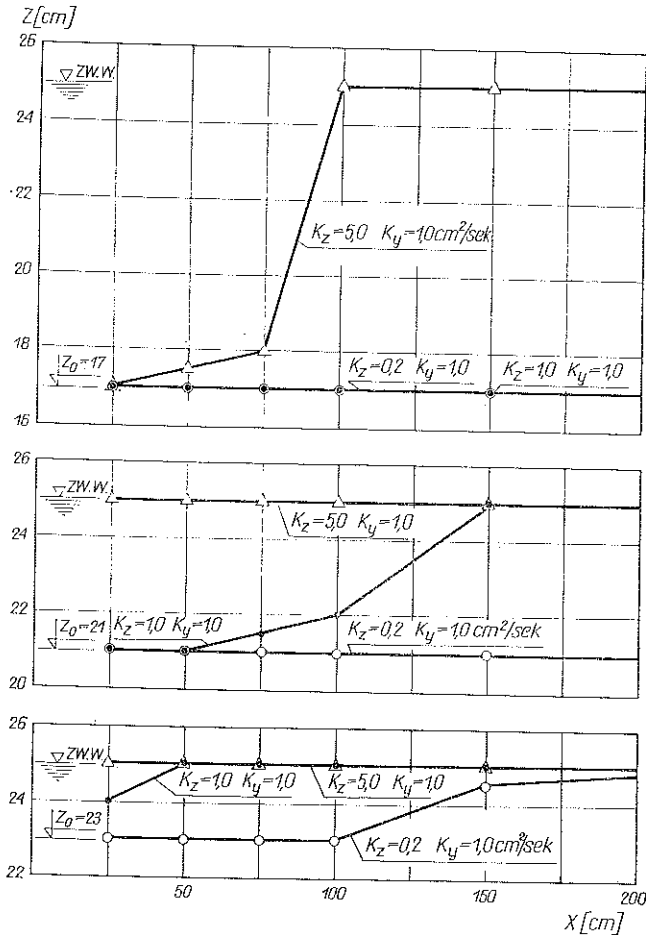
Powyższe rozważania nie dotyczą przypadku dyfuzji, na proces której ma wpływ powierzchnia zwierciadła wody. Do tego przypadku odnosi się wcześniej wyprowadzony wzór (3.1), który nieco różni się od wzoru (3.2). Zanalizowano różnicę w war-



Rys. 2. Wpływ współczynników dyfuzji na zmianę maksymalnego stężenia wskaźnika poniżej źródła

tościach stężeń wyznaczonych ze wzoru (3.1) i (3.2) dla różnych wartości współczynnika dyfuzji i różnych położenia źródła, wyprowadzając następujące wnioski:

1. Wartości maksymalnego stężenia w przekrojach poprzecznych kanału są większe w przypadku, gdy na proces dyfuzji wpływa powierzchnia zwierciadła wody, natomiast zmiany tego stężenia wraz z odległością od źródła są powolniejsze. Wyniki te przedstawiono na rys. 2 w zależności od położenia źródła i wartości współczynników dyfuzji. Z rysunku tego wynikają jeszcze dodatkowe informacje o wpływie zwierciadła wody na wartość maksymalnego stężenia w przekroju poprzecznym kanału. Dla małych wartości «pionowego» współczynnika dyfuzji i dla położenia źródła  $z_0 = 23$  cm wpływ ten zaznacza się w odległości 75 cm od źródła. Dla pozostałych położenia źródła wpływ powierzchni zwierciadła wody na wartość  $C_{\max}$  nie występuje na odległościach do 150 cm od źródła. Z rysunku można uzyskać jeszcze podobne informacje dla pionowego współczynnika dyfuzji równego 1,0 i 5,0  $\text{cm}^2/\text{sek}$ .

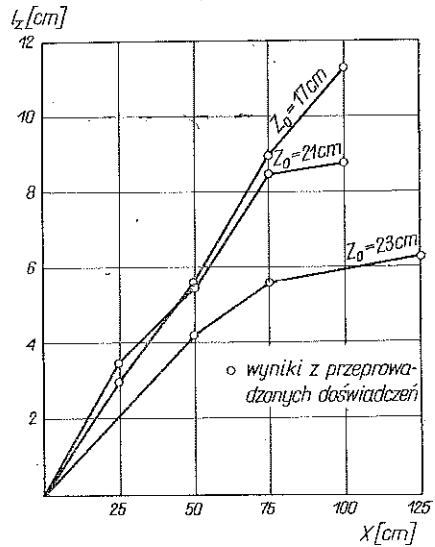
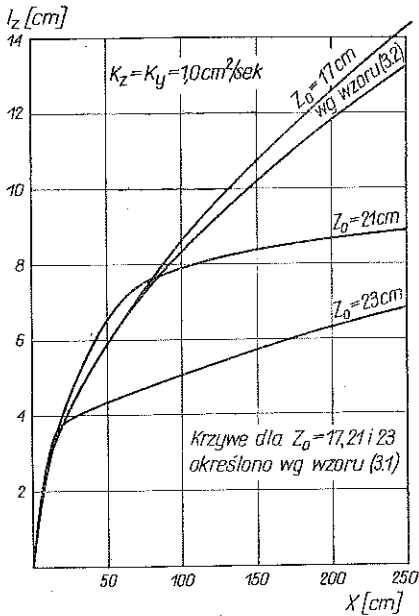


Rys. 3. Położenie maksymalnego stężenia wskaźnika poniżej źródła



2. Położenie punktu maksymalnego stężenia w przekroju poprzecznym kanału zmienia się z odległością, dążąc do powierzchni zwierciadła wody. Odległość, na której położenie  $C_{\max}$  osiągnie zwierciadło wody, zależy od położenia źródła i wartości pionowego współczynnika dyfuzji. Szybkość zmian tego położenia w zależności od wymienionych parametrów pokazana jest na rys. 3.

3. Dynamikę zmian wielkości obszaru zajmowanego przez wskaźnik scharakteryzowano zmianami długości głównych osi izolunii  $C_{\max}/2$ . Zmiany tych wiel-



Rys. 4. Zmiany obszaru zajmowanego przez wskaźnik

kości względem odległości od źródła dla różnych położenia źródła przedstawiono na rys. 4. Rysunek ten sporządzono dla równych sobie i stałych wartości pionowego i boczego współczynnika dyfuzji jak również i dla przeprowadzonych badań doświadczalnych.

#### 4. BADANIA DOŚWIADCZALNE

W celu sprawdzenia przydatności omawianego wyżej modelu matematycznego do badania procesu dyfuzji wskaźnika w kanale otwartym — wykonano szereg badań doświadczalnych. Badania przeprowadzono w betonowym kanale doświadczalnym o przekroju prostokątnym  $60 \times 45$  cm i długości około 12 m. Pochylenie dna kanału było stałe i wynosiło 1,5‰. Kanał doświadczalny zasilany był wodą ze zbiornika górnego, w którym utrzymywany był stały poziom zwierciadła wody. Przed wlotem do kanału woda przepływała przez przelew trójkątny, na którym mierzono grubość warstwy przelewającej się wody. Na podstawie tego pomiaru określono wielkość przepływu wody, służącą między innymi do obliczania średniej

prędkości wody w kanale doświadczalnym. Wskaźnikiem była rodamina B, najbardziej zalecana do tego typu badań, m.in. przez Międzynarodowy Komitet Normalizacyjny ISO [9]. Rodamina B jest bardzo intensywnym barwnikiem koloru czerwonego, posiadająca własności fluorescencji. Jest łatwo wykrywalna w wodzie, mało absorbowana przez beton, szkło i drewno, nie zmienia również swych własności z upływem czasu.

Roztwór wodny rodminy o znanym stężeniu wprowadzano do wody rurką mosiężną o średnicy 5 mm i 9 mm, umieszczoną w kanale równolegle do wektora średniej prędkości przepływającej wody. Roztwór rodminy znajdował się w stalowym zbiorniku o pojemności 250 l, umożliwiającym stały wypływ wskaźnika. Zbiornik połączony był rurką gumową ze źródłem, które dodatkowo wyposażone było w urządzenie regulujące prędkość wypływu wskaźnika. Stężenie rodminy B w ustalonym punkcie określano przez analizowanie na fluorymetrze pobranej z tego punktu próbki wody. Próbki pobierano specjalnie skonstruowanym urządzeniem umożliwiającym pobór jednocześnie z 36 różnych punktów przekroju poprzecznego kanału.

Próbki wody pobierano cienkimi rurkami o średnicy 2 mm w ciągu ok. 2 min. Czas ten był niezbędny na to, aby pobrane próbki miały cechy próbki średniej ze względu na losowy charakter transportu wskaźnika.

Badania doświadczalne przeprowadzono dla liczb Reynoldsa od 20 000 do 90 000 przy głębokości wody w kanale ok. 25 cm. Źródło wydankujące roztwór rodminy umieszczono w osi kanału na głębokościach ok. 15 cm, 17 cm, 20 cm, 21 cm i 23 cm. Prędkość wypływu ze źródła zbliżona była do prędkości przepływającej wody. Próbki pobierano w czterech przekrojach poprzecznych kanału, oddalonych od źródła o 25, 50, 75, 100 i 125 cm (por. rys. 1). W każdym z przekrojów pobierano około 60 próbek wody. W celu wykorzystania do badań możliwie długiego odcinka kanału, na którym turbulencja przepływu byłaby jednorodna względem osi kanału, na wlocie kanału umieszczono dwa rzędy siatki i kratę o stosunku  $M/d=5,55$  ( $M$  oznacza odstęp między osiami prętów, a  $d$  średnicę prętów).

Na odcinku wykorzystanym do badań napełnienie kanału nie różniło się od siebie więcej niż o 4 mm. Pole średniej prędkości przepływu w obszarach zajmowanych przez roztwór wodny rodminy było praktycznie bezgradientowe (największa różnica prędkości między dwoma dowolnymi punktami wynosiła 1,1 cm/sek). Doświadczenia ograniczały się do badania parametrów rozkładów stężeń wskaźnika w odległościach nie przekraczających 150 cm od punktu wprowadzenia wskaźnika. Odległość ta podyktowana była dokładnością stosowanej aparatury. Ponieważ odległość źródła od najbliższej ścianki wynosiła 15 cm, zatem ich wpływ na dyspersję wskaźnika w rozpatrywanych przekrojach był znikomy i został pominięty. Tak więc do opisu procesu dyfuzji wskaźnika wypływającego ze źródła punktowego możemy stosować otrzymany wcześniej wzór (3.1). Wzór (3.1) otrzymany został przy przyjęciu następujących założeń dotyczących hydromechaniki przepływu: 1) pole prędkości średniej jest bezgradientowe, 2) pole pulsacji prędkości jest jednorodne, 3) składowe tensora dyfuzji są stałe oraz 4) wskaźnik jest wprowadzony «punktowo» do przepływającej wody.

W przeprowadzonych doświadczeniach założenie pierwsze było praktycznie spełnione, ponieważ rozważania dotyczyły jądra przepływu, tzn. obszaru dostatecznie oddalonego od stałych ścianek kanału. Poza tym liczby Reynoldsa nie były niższe niż 20 000. Spełnienie założeń drugiego i trzeciego przy przepływach o dużej liczbie Reynoldsa w ustalonym przekroju poprzecznym nie powinno budzić większych wątpliwości. Założenie ostatnie nie było spełnione dokładnie, ponieważ źródło użyte w badaniach miało powierzchnię około 0,8 cm<sup>2</sup>. Jednak wpływ powierzchni źródła na rozpatrywanych przez nas odległościach nie jest istotny; wynika to z następującego rozumowania. Przy uwzględnieniu powierzchni kołowego źródła o promieniu  $a$  wzór opisujący rozkład stężenia wskaźnika w przypadku dyfuzji swobodnej w układzie współrzędnych cylindrycznych przyjmuje postać następującą [1]:

$$(4.1) \quad \bar{C} = \frac{C_0 U}{2Kx} \exp\left[-\frac{r^2 U}{4Kx}\right] \int_0^a \exp\left[-\frac{r' U}{4Kx}\right] Y_0\left(\frac{rr' U}{2Kx}\right) r' dr',$$

gdzie  $Y_0$  oznacza funkcję Bessla drugiego rodzaju rzędu zerowego,

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad K = K_y = K_z.$$

Największe różnice między wzorami (4.1) i (3.2) występują na osi źródła i ten przypadek poniżej zanalizujemy. Dla zmian stężenia wskaźnika wzdłuż osi źródła, tzn. dla  $r=0$ , równanie (4.1) przyjmie postać [1]

$$(4.2) \quad C = C_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{a^2 U}{4Kx}\right) \right];$$

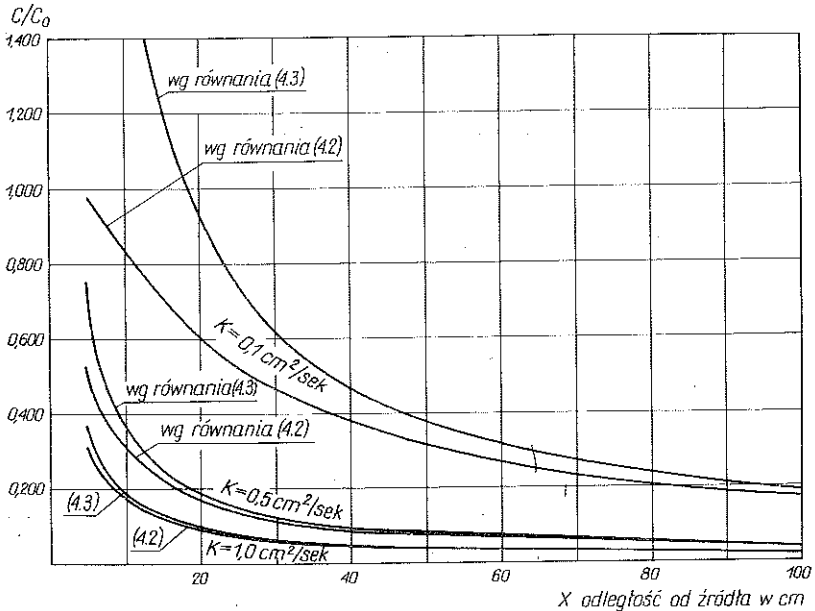
natomiast w przypadku źródła punktowego przy tych samych danych wyjściowych, dla których otrzymano równanie (4.2), otrzymamy

$$(4.3) \quad C = C_0 \frac{a^2 U}{4Kx}.$$

Wzory (4.2) i (4.3) zgodne są dla małych wartości ilorazu  $1/x$ ; ma to miejsce w przypadku większych odległości od źródła. Praktycznie w przeprowadzonych badaniach począwszy od  $x=25$  cm wpływ ten nie przekraczał kilku procent. Dla mniejszych odległości od źródła rozbieżności są większe. Pokazano to na rys. 5 dla różnych wartości współczynników dyfuzji.

W niektórych z przeprowadzonych badań nie stwierdzono wyraźnego wpływu zwierciadła wody na transport wprowadzonego wskaźnika. A więc w badaniach tych powinny być zaobserwowane pewne prawidłowości w rozkładzie stężenia wskaźnika, o których już mówiliśmy w trakcie analizy wzoru (3.2); oczywiście, o ile przyjęty model matematyczny odpowiada omówionemu modelowi fizycznemu. Z analizy rozkładów linii jednakowych stężeń wskaźnika w ustalonym przekroju poprzecznym kanału wynika, że są one elipsami. Położenie tych elips w większości przeprowadzonych badań wskazuje na większe zdolności transportowe strumienia w kierunku pionowym niż poprzecznym. Analizując linie jednakowych koncentracji wskaźnika w różnych przekrojach poprzecznych kanału widać, że dla małych odle-

głości od źródła na niedużych obszarach otaczających punkt największego stężenia wskaźnika — linie te są okręgami, natomiast dla większych obszarów i dalszych odległości od źródła otrzymujemy elipsy. Fakt ten wynika ze struktury pola pulsacji prędkości, które można uważać za izotropowe na odpowiednio małych obszarach, natomiast dla większych obszarów zajętych przez wskaźnik takie założenie nie jest poprawne. Dla dalszych odległości od źródła dyspersja chmury wskaźnika zależy głównie od pulsacji prędkości o najniższych częstościach, a struktura tych wirów jest nieizotropowa.



Rys. 5. Wpływ powierzchni źródła na zmiany maksymalnego stężenia względem odległości od źródła

W celu praktycznego wykorzystania podanych wzorów (3.1) i (3.2) do obliczeń rozkładów koncentracji wprowadzonego wskaźnika należy znać wartości współczynników dyfuzji. W przypadku dyfuzji swobodnej [wzór (3.2)] jest dosyć łatwo znaleźć wartości tych współczynników na podstawie znajomości wartości stężeń przynajmniej w trzech punktach przekroju poprzecznego kanału. W przeprowadzonych badaniach doświadczalnych dysponowano kilkudziesięcioma punktami. W celu określenia w ustalonym przekroju poprzecznym kanału wartości np. współczynnika  $K_z$  należy obliczyć współczynnik kątowy prostej, będącej wykresem średnim punktów pomiarowych w układzie współrzędnych  $\log [C(x, 0, z)/C_0]$  i  $(z - z_0)^2$  [3]. Współczynnik ten jest, jak wiadomo, proporcjonalny do ilorazu  $U/K_z x$ . Analogicznie można wyznaczyć współczynnik dyfuzji poprzecznej  $K_y$ .

Wyznaczenie współczynników dyfuzji w przypadku wpływu zwierciadła wody na proces dyfuzji jest bardziej kłopotliwe. Wykonywano to w sposób następujący. Dla ustalonego przekroju poprzecznego kanału wybrano kilka par punktów o zna-

nej wartości koncentracji. Współrzędne tych punktów wstawiano do równania (3.1) tworząc układ równań, z którego numerycznie wyznaczano wartości współczynników  $K_y$  i  $K_z$ . Następnie znowu korzystano z równania (3.1) i obliczonych współczynników w celu określenia siatki stężeń wskaźnika w wybranych przekrojach poprzecznych kanału. Rozkłady stężeń otrzymane w ten sposób porównywano z rozkładami otrzymanymi z badań doświadczalnych. Parę współczynników, dla której otrzymano najlepszą zgodność rozkładów koncentracji, przyjmowano za właściwą.

## 5. OMÓWIENIE BŁĘDÓW I Dyskusja Uzyskanych Wyników

Wykonując dowolny pomiar zwykle popełnia się błędy, których wielkość zależy od stosowanej metody pomiarowej, dokładności przyrządów itp. Jedną z wielkości mierzonych w wykonywanych badaniach doświadczalnych była koncentracja wskaźnika w punkcie. Popełniany błąd przy jej pomiarze wynikał z losowego charakteru transportu wprowadzonego wskaźnika. Chcąc, aby w pobranej próbce koncentracja wskaźnika była równa średniej oczekiwanej wartości koncentracji w tym punkcie, należałoby brać próbkę wody o dużej objętości (stosować długie czasy poboru próbek), co z przyczyn technicznych nie dało się zrealizować. Jeżeli przyjąć [13], że największe wiry w kanale doświadczalnym są rzędu dziesięciu szerokości, to czas przechodzenia ich przez ustalony punkt przy najmniejszej prędkości stosowanej w naszych badaniach nie powinien przekraczać 40 sek. Zatem niezbędny czas potrzebny dla uśrednienia danej wielkości losowej nie powinien być mniejszy niż 80 sek. W przeprowadzonych badaniach doświadczalnych czas poboru próbek był większy i wynosił 120 sek. Nie gwarantował on jednak pełnej stabilności w czasie średniej wartości koncentracji.

Przeprowadzono specjalne badania, polegające na kolejnym poborze próbek wody z kilku wybranych punktów przekroju poprzecznego kanału. Zbadano, o ile różni się koncentracja w próbkach wody pobranych z tego samego punktu w różnym czasie. Stwierdzono, że dla dziesięciu próbek pobranych z tego samego punktu największe odchylenia między koncentracją nie przekraczały 10%. Inne błędy wynikają z niedokładności pomiarów takich wielkości, jak przepływ wody w kanale, czas napełniania kanału, współrzędne punktu źródłowego i współrzędne punktów poboru próbek wody. Z bliższej analizy tych błędów wynika, że pierwsze trzy wielkości mierzymy z błędem maksymalnym 1%, natomiast wielkość ostatnią z błędem ok. 5%.

Zestawiając wszystkie obliczone wartości współczynników dyfuzji można na ich podstawie sformułować dwa ogólne wnioski (tablica 1):

1) współczynnik dyfuzji rośnie ze wzrostem odległości przekroju poprzecznego od źródła,

2) współczynnik dyfuzji rośnie ze wzrostem wartości prędkości średniej.

Wyjaśnienie pierwszego wniosku znajdziemy ze znanego empirycznego wzoru Richardsona, podanego w r. 1926 [15]. Wzór ten mówi o proporcjonalności dyspersji chmury wskaźnika do liniowych rozmiarów tej chmury w potęgę  $4/3$ . Bezpośred-

Tablica 1. Zestawienie wyników badań doświadczalnych

Lp.	$z_0$	$C_0$	$Q$	$d$	$U$	$H$	$x$	$C_{max}$	$Z_{max}$	$K_y$	$K_z$
	cm	mg/l	cm <sup>3</sup> /s	cm	cm/s	cm	cm	mg/l	cm	cm <sup>2</sup> /s	cm <sup>2</sup> /s
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	14,7	60	3,63	0,5	14,8	25,9	25	3,32	14,6	0,19	0,21
							50	1,82	14,9	0,20	0,25
							100	0,59	14,9	0,23	0,40
2	15,0	60	4,9	0,5	25,0	25,6	25	1,70	15,0	0,50	0,65
							50	0,84	15,0	0,54	0,70
							75	0,50	15,0	0,54	0,75
							100	0,30	15,0	0,70	0,85
3	15,0	60	5,9	0,5	35,6	25,4	25	1,05	15,0	1,30	1,30
							50	0,41	15,0	1,47	1,47
							100	0,21	15,0	1,50	1,50
4	17,0	72	6,7	0,9	9,1	25,3	25	7,70	17,4	0,22	0,17
							50	1,90	17,9	0,25	0,29
							75	1,01	20,0	0,25	0,55
							100	0,58	22,0	0,66	0,70
5	17,0	56	15,2	0,9	19,2	25,4	25	8,20	16,3	0,25	0,50
							50	2,20	16,4	0,38	0,80
							75	1,00	17,0	0,59	1,11
							100	0,80	16,5	0,99	1,16
6	17,0	68	18,5	0,9	29,7	25,4	25	5,80	17,0	0,78	1,02
							50	1,30	17,2	1,40	2,02
							75	0,63	17,6	1,72	2,69
							100	0,37	18,0	1,90	2,69
7	21,0	79	2,1	0,5	11,8	24,7	25	1,25	20,4	0,68	0,40
							50	0,52	20,6	0,69	0,50
							75	0,25	21,3	0,72	0,60
8	21,0	72	2,3	0,5	14,7	24,9	25	0,73	21,0	0,77	0,62
							50	0,29	21,4	1,09	1,52
							75	0,18	22,6	1,28	1,78
9	21,0	77	18,1	0,9	32,5	24,8	50	1,87	21,0	1,17	1,95
							75	0,82	22,1	2,00	3,00
							125	0,43	22,4	3,00	2,90
10	21,0	72	14,8	0,9	20,3	25,3	50	0,95	21,5	1,82	1,76
							75	0,59	23,0	2,15	2,30
							100	0,44	25,2	2,30	2,52
							125	0,33	25,2	2,80	2,75
11	21,0	68	16,4	0,9	19,6	25,2	25	10,0	20,8	0,28	0,53
							50	3,0	21,5	0,38	0,70
							75	1,7	23,0	0,40	1,40
							100	1,0	25,2	0,68	1,59

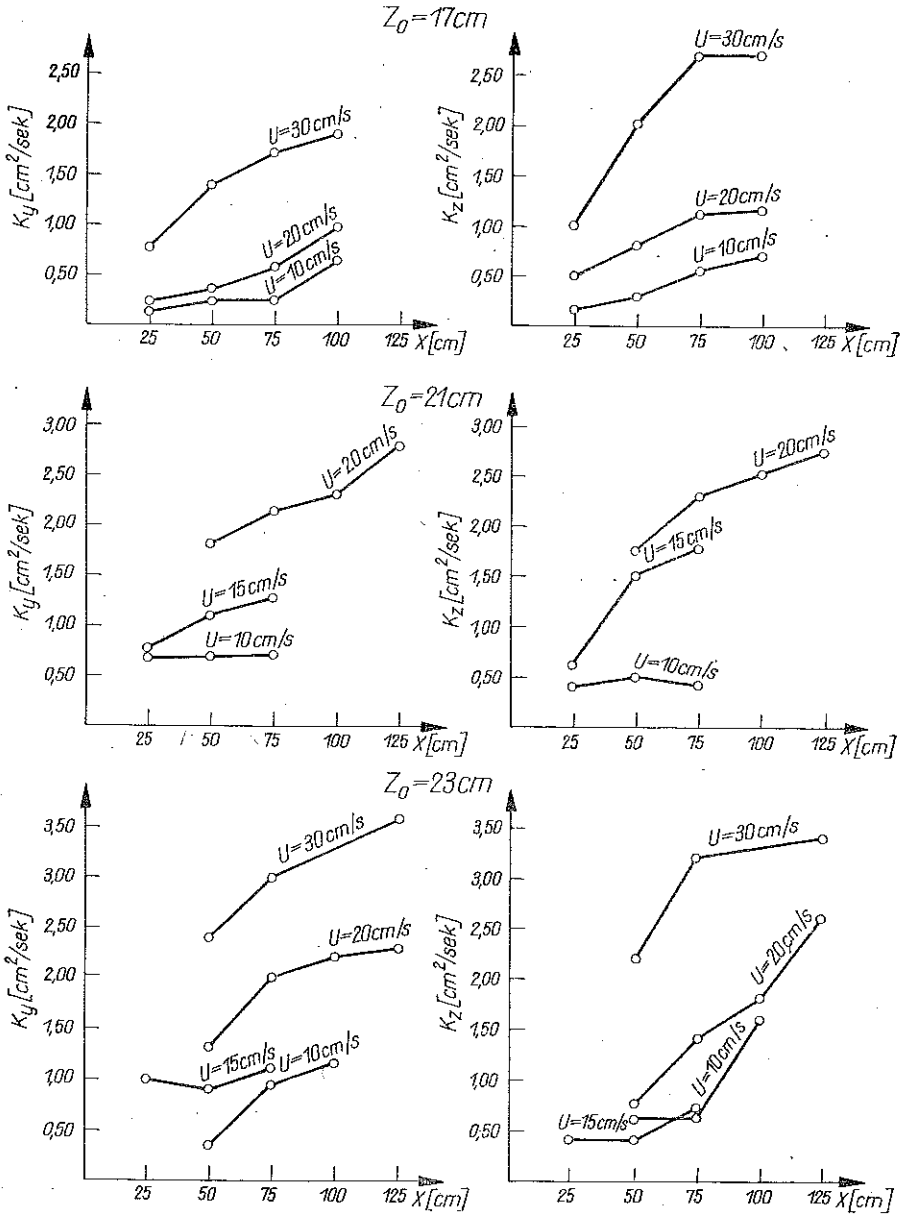
c. d. Tablicy 1

Lp.	$z_0$	$C_0$	$Q$	$d$	$U$	$H$	$x$	$C_{max}$	$Z_{max}$	$K_y$	$K_z$
	cm	mg/l	cm <sup>3</sup> /s	cm	cm/s	cm	cm	mg/l	cm	cm <sup>2</sup> /s	cm <sup>2</sup> /s
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	21,0	60	18,2	0,9	30,3	25,4	25	3,60	20,8	1,25	1,25
							50	1,54	21,3	1,30	1,44
							75	0,69	21,4	1,42	2,15
							100	0,50	22,4	1,65	2,32
13	23,0	70	18,1	0,9	29,6	25,3	25	2,80	23,0	1,00	2,80
							50	1,06	25,3	3,00	2,90
							75	0,62	25,3	4,20	2,90
							100	0,45	25,3	5,40	2,90
14	23,0	75	2,5	0,5	13,2	25,1	25	0,91	23,0	1,00	0,40
							50	0,56	23,1	0,90	0,40
							75	0,34	25,1	1,10	0,70
15	23,0	83	7,1	0,9	9,4	25,3	50	2,80	25,3	0,35	0,60
							75	1,26	25,3	0,95	0,65
							100	0,61	25,3	1,16	1,59
16	23,0	78	18,5	0,9	30,3	24,8	50	1,63	24,7	2,40	2,20
							75	0,86	24,7	3,00	3,20
							125	0,51	24,7	3,57	3,40
17	23,0	77	13,6	0,9	20,2	25,3	50	2,00	24,0	1,30	0,76
							75	0,96	25,3	2,00	1,40
							100	0,72	25,3	2,20	1,80
							125	0,51	25,3	2,30	2,60
18	23,0	78	3,0	0,9	8,8	25,6	25	0,90	24,0	1,20	0,80
							50	0,52	25,6	1,21	0,81
							75	0,27	25,6	1,67	1,48

nio z niego wynika wzrost współczynnika dyfuzji z odległością od źródła. Oczywiście wzór ten dotyczy dyfuzji swobodnej, a w przypadku kanału otwartego spotykamy pewne nieprawidłowości, jednak ogólna tendencja wzrostu współczynnika dyfuzji z odległością wyraźnie występuje. Drugi wniosek jest oczywisty i zgodny z teorią TAYLORA [17] i pomiarami podstawowych charakterystyk turbulencji wykonanych przez LAUFERA [11], które m.in. mówią o proporcjonalności intensywności turbulencji do średniej prędkości strumienia. Dane pomiarowe otrzymane z badań doświadczalnych potwierdzają te wnioski z drobnymi wyjątkami; wyniki tych badań przedstawiono na rys. 6. Interesującym parametrem rozkładu stężenia wskaźnika w przekroju poprzecznym kanału jest jego maksymalna wartość.

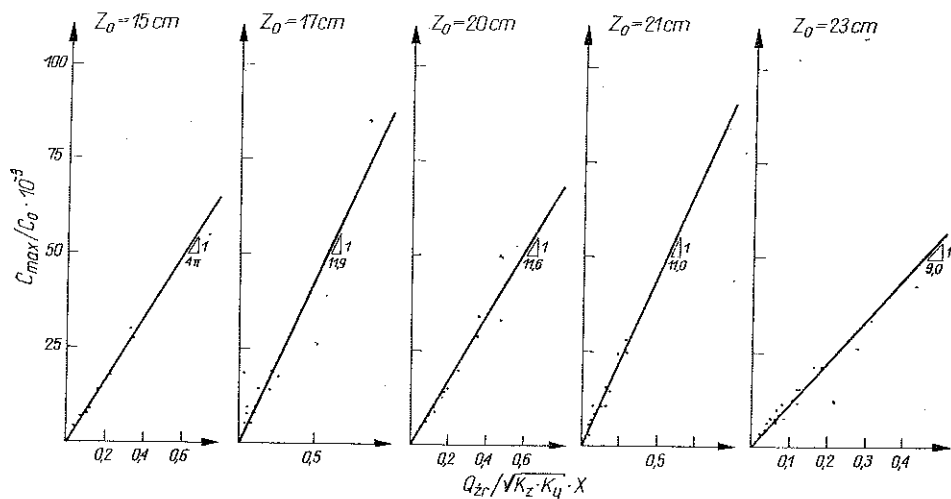
Badanie zmian maksymalnego stężenia wskaźnika względem wprowadzonych parametrów wykonano w układzie współrzędnych  $C_{max}/C_0, Q/\sqrt{K_y K_z} x$ . Zgodnie z naszymi rozważaniami teoretycznymi kąt nachylenia prostej będący wykresem

średnim punktów pomiarowych w tym układzie współrzędnych prostokątnych w przypadku dyfuzji swobodnej powinien wynosić  $1/4\pi$ ; natomiast w przypadku wpływu zwierciadła wody na proces dyfuzji kąt ten powinien być nieco większy. Wyniki badań doświadczalnych potwierdzają te przypuszczenia (rys. 7), co świadczy o adekwatności proponowanego modelu do rozpatrywanego przypadku rozprzestrzenienia się wskaźnika w turbulentnym przepływie wody w kanale otwartym.



Rys. 6. Zmiany wartości współczynników dyfuzji dla różnych położeń źródła i prędkości średniej





Rys. 7. Zmiany maksymalnego stężenia wskaźnika dla różnych położeń źródła

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, London 1959.
2. J. CRANCK, *The mathematics of diffusion*, London 1956.
3. W. CZERNUSZENKO, *Badanie dyfuzji strumienia w dwuwymiarowym kanale otwartym*, Wiad. Śl. Hydrol., 4, 3-4, 1968.
4. W. CZERNUSZENKO, *Badanie procesu mieszania w szerokim kanale prostokątnym*, Wiad. Śl. Hydrol., 7, 3, 1971.
5. J. W. ELDER, *The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow*, J. Fluid Mechanics, 5, 1959.
6. F. N. FRENKIEL, *Turbulent diffusion. Mean concentration distribution in a flow field of homogeneous turbulence*, Adv. Appl. Mech., 3, 1953.
7. J. O. HINZE, *Turbulence*, New York 1959.
8. Y. IWASA, H. IMAMOTO, *Some features of turbulent diffusion processes in open channel flows*, Memoirs of the faculty of Eng. Kyoto Univ., 28, p. 1, 1966.
9. ISO/TC30/SC1/GT4/ Francja 11. *Mierzenie natężenia przepływu metodą rozcieńczania. Zastosowanie rodaminu B*.
10. M. KRZYŻAŃSKI, *Równania różniczkowe cząstkowe*, t. II, Warszawa 1957.
11. J. LAUFER, *Investigation of turbulent in a two-dimensional channel*, NASA, rep. 1053, 1951.
12. A. С. МОНИН, А. М. ЯГЛАМ, *Статическая гидромеханика*, т. I, Москва 1965.
13. А. С. МОНИН, А. М. ЯГЛАМ, *Статическая гидромеханика*, т. II, Москва 1967.
14. Е. А. НОВИКОВ, *О турбулентной диффузии в потоке с поперечным градиентом скорости*, Прикладная мат. и мех., 22, 3, 1948.
15. П. Панчев, *Случайные функции и турбулентность*, Ленинград 1967.
16. D. W. FEUERSTEIN, R. E. SELLECK, *Fluorescent tracer for dispersion measurements*, J. Sanitary Eng. Div., SA4, 1963.
17. G. I. TAYLOR, *Diffusion by continuous movements*, Proc. London Math. Soc., 20, 1921.
18. G. I. TAYLOR, *The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe*, Proc. Royal Soc. London, 223, A, 1954.

## Резюме

## ДИФFUЗИЯ ИЗ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В ОТКРЫТОМ КАНАЛЕ

В работе дан анализ процесса переноса массы меченой примеси, вытекающей из точечного источника в открытом канале. Предполагается, что течение жидкости в канале является турбулентным, а ширина канала настолько велика, что боковые стенки не влияют на процесс переноса массы. Для описания этого процесса применено параболическое уравнение турбулентной диффузии, которое решается в предположении полного отражения диффундирующей массы от свободной поверхности воды. Произведен анализ решений для различных вариантов расположения источника в канале. Определено влияние свободной поверхности воды на явления переноса.

Полученные решения сравнены с опытными данными по распределению концентраций диффундирующей примеси, полученными для соответствующей физической модели, которой был бетонный канал с текущей водой. Диффундирующей примесью был водяной раствор родамина В, вводимого в течение в некоторой точке канала, со скоростью, соответствующей средней скорости течения воды. Величина концентрации родамина в определенной точке течения воды определялась путем флуориметрического анализа проб воды из этой точки.

Результаты проведенного анализа могут быть полезными при исследовании различных практических вопросов, связанных с распространением загрязняющих примесей, спускаемых в реки и каналы.

## SUMMARY

## DIFFUSION FROM A POINT SOURCE IN OPEN CHANNELS

The paper contains the analysis of the process of mass transport of the indicator flowing out from the point source placed in an open channel. The flow is turbulent and the channel is wide enough to disregard the influence of its walls on the transport process. Parabolic equation of turbulent diffusion is used and solved under the assumption of total reflection of the diffusing mass at the free water surface. The solution is discussed for various positions of the point source, the influence of free water surface on the transport process being considered. The results are verified by means of a physical model — a concrete channel with flowing water. The diffusing mass was represented by the water solution of B rhodamine introduced into the flow at a rate corresponding to the average velocity of water. Its concentration was measured by fluorimetric methods. Results of the investigations may found an application in various practical problems connected with water pollution.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 maja 1973 r.*

---