

ZGINANIE I DRGANIA RUSZTÓW KRATOWYCH

ROMUALD ŚWITKA (POZNAŃ)

1. WSTĘP

Lekkie przestrzenne konstrukcje prętowe, złożone z elementów powtarzalnych, zajmują ważne miejsce we współczesnym, uprzemysłowionym budownictwie stalowym. Spośród wielu zalet tych konstrukcji można wymienić: 1) możliwość przekrywania dużych rozpiętości, 2) możliwość fabrycznej produkcji elementów powtarzalnych, 3) łatwość montażu, 4) lekkość, 5) walory estetyczne.

Interesujący przegląd nowoczesnych przestrzennych konstrukcji prętowych podaje Z. S. MAKOWSKI w monografii [10]. Spośród wielu systemów przedstawionych tam konstrukcji na szczególną uwagę zasługują tzw. płyty kratowe (struktury kratowe), montowane z fabrycznie przygotowanych prętów o jednakowej długości, łączonych w węzłach o konstrukcji na ogół zastrzeżonej patentami. Jako przykład może służyć struktura systemu Unistrut, której autorem jest C. W. ATTWOOD (por. np. [2]).

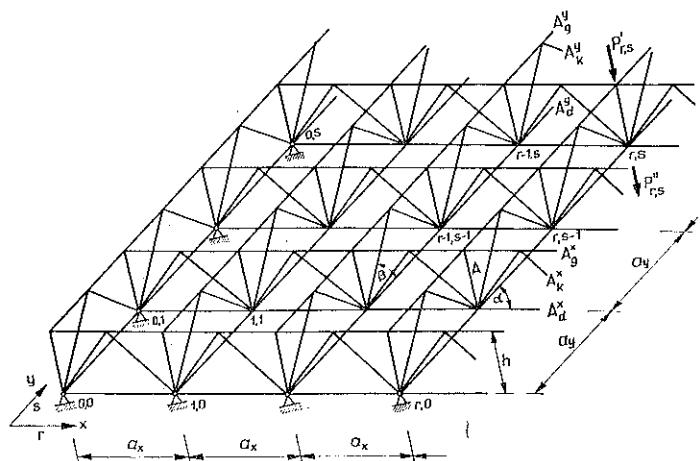
Projektowanie i szerokie stosowanie przestrzennych konstrukcji prętowych wymaga opracowania metod obliczeń. Problemy te były przedmiotem licznych prac W. GUTKOWSKIEGO, spośród których wymienimy dla przykładu publikacje [5 i 6].

Struktury kratowe można rozważać w kategoriach układów dyskretnych o budowie regularnej, opisywanych za pomocą równań różnicowych. Metodę obliczeń płyty kratowej, opartą na teorii równań różnicowych, opracował W. GUTKOWSKI [7], który otrzymał szczególnie proste równania dzięki wprowadzeniu hipotezy analogicznej do hipotezy Kirchhoffa znanej w teorii płyt. Dla płyty kratowej podpartej wzdłuż obwodu można wówczas otrzymać rozwiązania w postaci podwójnego, skończonego szeregu Fouriera [8].

W praktyce projektowej chętnie stosuje się obliczenia oparte na analogii do płyty. Uściślenie takiej metody zaproponowali A. GOMULIŃSKI i M. WITKOWSKI [3], którzy zastosowali analogię do płyty o średniej grubości. Podana przez nich metoda okazuje się jednak nader skomplikowana, a błąd obliczeń jest trudny do oszacowania.

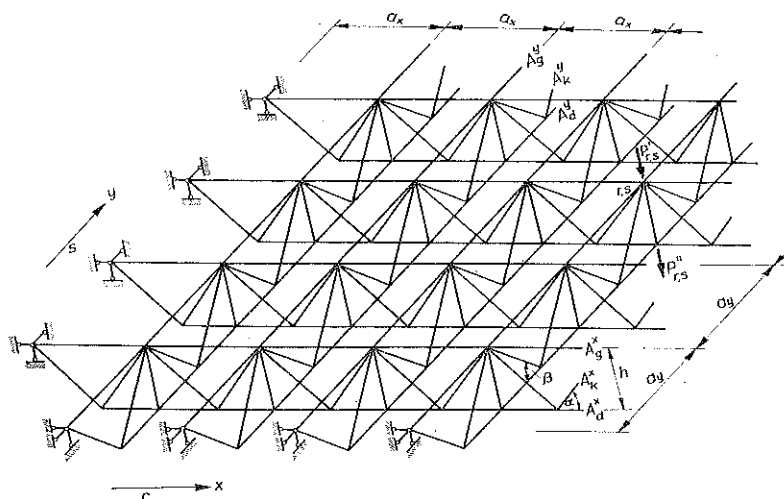
W niniejszej pracy zajmiemy się rusztami o regularnej siatce prostokątnej, których podłużnice i poprzecznice są kratownicami charakteryzującymi się również regularną budową. Ruszt kratowy reprezentuje typ konstrukcji zbliżony do płyty kratowej. Wydaje się, że może on znaleźć szerokie zastosowanie jako lekkie przekrycie prze-

strzenne o dużej rozpiętości. Zalety rusztu kratowego uwidoczniają się przy przekrywaniu pomieszczeń budowanych na planie prostokąta zbliżonego do kwadratu o boku od 20 do 40 metrów.



Rys. 1 Ruszt kratowy typu I-a

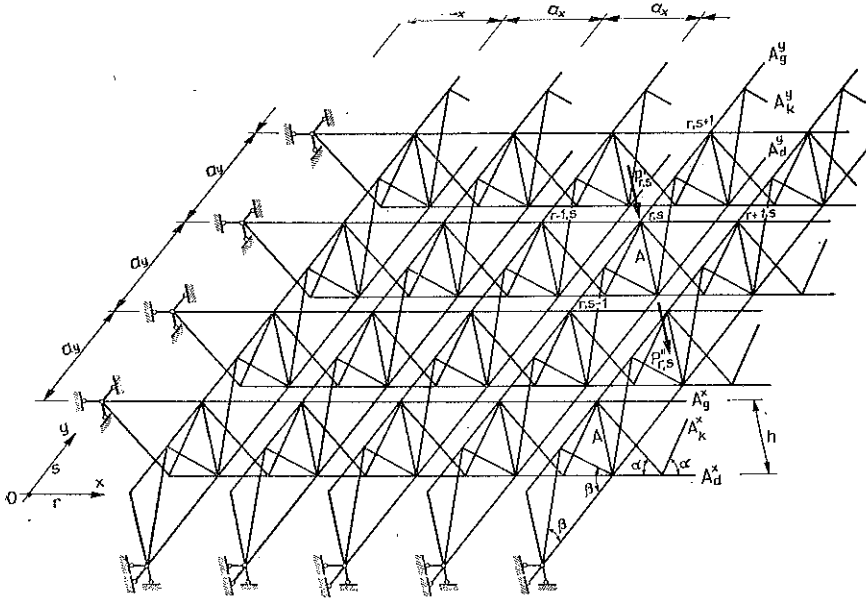
Na rys. 1, 2 i 3 przedstawiono trzy typy rusztów kratowych, które umownie oznaczymy symbolami I-a, I-b i II. Ruszt typu I-a (rys. 1) został zaczerpnięty z monografii Z. S. MAKOWSKIEGO [10] (str. 54). Na rys. 2 widoczna jest inna wersja tego rusztu, którą oznaczamy symbolem I-b.



Rys. 2 Ruszt kratowy typu I-b

Propozycję odmiennej konstrukcji przedstawia rys. 3. Ten typ rusztu kratowego oznaczymy umownym symbolem II. Szkic rozwiązania dla takiego układu był już omówiony w artykule [11].

Każda z przedstawionych konstrukcji składa się z dwóch rodzin kratownic o budowie regularnej, przenikających się w węzłach siatki rusztu. Przyjmujemy, że ruszty kratowe obciążone są pionowymi siłami skupionymi, przyłożonymi w górnych bądź dolnych węzłach siatki rusztu. Siły zewnętrzne, działające na górne węzły, pochodzą od ciężaru własnego konstrukcji, ciężaru pokrycia dachowego, śniegu itp. Na siły działające od dołu składa się część ciężaru własnego konstrukcji, ciężar podwieszonych itp.



Rys. 3 Ruszt kratowy typu II

W przypadku rusztu typu I-a siły przyłożone w węzłach górnych przenoszą się za pośrednictwem słupków na węzły dolne poszczególnych kratownic. Siły przyłożone od dołu obciążają te węzły bezpośrednio. Każdą z kratownic składowych rusztu można więc potraktować jako regularną kratownicę z pasami równoległymi, z prostym, powtarzalnym skratowaniem trójkątnym, obciążoną wyłącznie w węzłach pasa dolnego. W ruszcie typu I-b obciążone są wyłącznie węzły górne kratownic. Siły przyłożone od góry i reakcje podpór działają bezpośrednio na węzły górne, siły przyłożone od dołu przenoszą się na te węzły za pośrednictwem wieszaków.

W ruszcie typu II układ skratowań w kratownicach obu rodzin jest odwrotny. Kratownice jednego kierunku są połączone z kratownicami drugiego kierunku za pomocą słupków stanowiących więzy sprężyste. Kratownice kierunku x są obciążone wyłącznie w węzłach pasa dolnego siłami zewnętrznymi, przyłożonymi od dołu, oraz siłami osiowymi w słupkach. Siły w słupkach, stanowiąc wzajemne oddziaływanie belek, przenoszą się na węzły pasa górnego kratownic kierunku y i obciążają te węzły wraz z siłami zewnętrznymi przyłożonymi od góry.

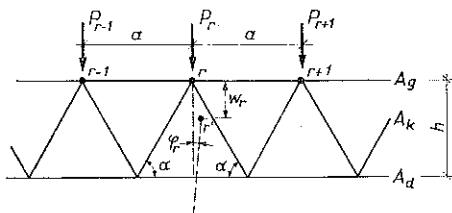
Omawiane ruszty kratowe będziemy konsekwentnie rozważać w kategoriach regularnych układów dyskretnych i do obliczeń zastosujemy metody oparte na teorii

równań różnicowych. Przyjmujemy, że rozważane ruszty spełniają wszystkie założenia teorii małych ugięć liniowo-sprężystych.

Jak już wspomniano, elementem składowym każdego z omawianych rusztów jest płaska kratownica o pasach równoległych z prostym skratowaniem trójkątnym, obciążona wyłącznie bądź w węzłach pasa górnego, bądź dolnego.

Zginanie kratownicy regularnej omawiano w pracy [12], w której wyprowadzono równanie różnicowe ugięć i drgań poprzecznych, omówiono też warunki brzegowe oraz rozwiązano kilka zadań dotyczących zginania, drgań własnych i wymuszonych. Zastosowaniem równań różnicowych w teorii kratownic regularnych zajmowali się również D. L. DEAN i S. TAUBER [1, 9].

Weźmy pod uwagę płaską kratownicę regularną, której fragment przedstawiono na rys. 4. Niech r będzie zmienną dyskretną, odpowiadającą numeracji węzłów



Rys. 4

pasa górnego $r=0, 1, 2, \dots, n$. Wprowadzamy następujące oznaczenia: a — długość przedziału, h — wysokość kratownicy, α — kąt nachylenia krzyżulców, A_g, A_d, A_k — pola przekrojów odpowiednio: pasa górnego, dolnego i krzyżulców, E — współczynnik sprężystości podłużnej, w_r — ugięcie węzła r , P_r — siła przyłożona do węzła r (przyjmu-

jemy, że siły zewnętrzne działają tylko w węzłach pasa górnego), M_r — moment statyczny sił zewnętrznych działających z lewej strony węzła r , obliczany względem tego węzła, φ_r — kąt obrotu prostej poprowadzonej przez węzeł r i przechodzącej przez środek przeciwległego boku trójkąta prętowego, Δ^2 i Δ^4 — operatory odpowiednio drugiej i czwartej różnicy centralnej.

Równanie różnicowe ugięć węzłów pasa górnego kratownicy ma postać [12]:

$$(1.1) \quad \Delta^4 w_r = \frac{a\kappa}{EA_d} (1 - \bar{\kappa} \Delta^2) P_r.$$

W równaniu (1.1) wprowadzono oznaczenia

$$\kappa = \frac{a^2}{h^2} \left(1 + \frac{A_d}{A_g} \right), \quad \bar{\kappa} = \frac{A_d}{4(A_g + A_d)} \left(\frac{A_g}{A_k \cos^3 \alpha} - 1 \right).$$

Moment statyczny wyraża się wzorem

$$(1.2) \quad M_r = -\frac{EA_d}{\kappa} \Delta^2 w_r - \bar{\kappa} a P_r,$$

a kąt obrotu φ_r oblicza się ze wzoru

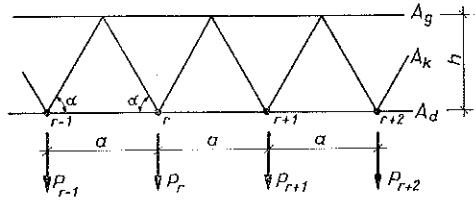
$$(1.3) \quad \varphi_r = \frac{1}{a} (w_{r+1} - w_r) + \frac{\kappa}{2aEA_d} [(1 + 2\bar{\kappa}) M_r - 2\bar{\kappa} M_{r+1}].$$

Wzory (1.2) i (1.3) pozwalają sformułować warunki brzegowe przy różnych sposobach podparcia kratownicy. Jeśli np. koniec $r=0$ kratownicy jest podparty

przegubowo, to $w_0=0$ i $M_0=0$. W przypadku końca swobodnego mamy $M_0=0$ i $M_{-1}=0$, a w przypadku utwierdzenia: $w_0=0$, $\varphi_0=0$.

Jeśli obliczamy ugięcia węzłów pasa dolnego kratownicy obciążonej w węzłach dolnych (rys. 5), to podane uprzednio wzory pozostają w mocy, należy tylko $\bar{\kappa}$ obliczać za pomocą wzoru:

$$\bar{\kappa} = \frac{A_g}{4(A_d + A_g)} \left(\frac{A_d}{A_k \cos^3 \alpha} - 1 \right).$$



Rys. 5

2. RUSZT TYPU I-a

2.1. Oznaczenia

Położenie węzłów rusztu kratowego określają dwie zmienne dyskretne: r, s ($r=0, 1, 2, \dots, n$; $s=0, 1, 2, \dots, m$). Wprowadzamy nadto następujące oznaczenia:

- $w_{r,s}$ ugięcie górnego węzła r, s ,
- $v_{r,s}$ ugięcie dolnego węzła r, s ,
- $X_{r,s}$ umowna siła wzajemnego oddziaływania kratownic rusztu (rys. 6),
- $P'_{r,s}$ siła obciążająca górny węzeł r, s ,
- $P''_{r,s}$ siła obciążająca dolny węzeł r, s ,
- $P_{r,s} = P'_{r,s} + P''_{r,s}$,
- $M_{r,s}^x$ moment statyczny sił zewnętrznych (czynnych i biernych) działających z lewej strony węzła r, s , obliczany względem tegoż węzła kratownicy ($o, s-n, s$) równoległej do osi x i wyodrębnionej myślowo z rusztu; podobnie określa się $M_{r,s}^y$.

$$M_{r,s}^x = -\frac{EA_d^x}{\kappa_x} A_r^2 v_{r,s} - \bar{\kappa}_x a_x (P'_{r,s} - X_{r,s}),$$

(2.1)

$$M_{r,s}^y = -\frac{EA_d^y}{\kappa_y} A_s^2 v_{r,s} - \bar{\kappa}_y a_y (P''_{r,s} + X_{r,s}),$$

$A_d^x, A_d^y, A_k^x (A_d^y, A_g^y, A_k^y)$ pola przekrojów odpowiednio: pasa dolnego, górnego i krzyżulców kratownic równoległych do osi x (do osi y),

a_x, a_y rozstawienie węzłów rusztu mierzone odpowiednio wzdłuż osi x oraz wzdłuż osi y ,

α, β kąty nachylenia krzyżulców kratownic równoległych do osi x bądź do osi y ,

\mathfrak{M}' masa skupiona w węzłach górnych rusztu,

\mathfrak{M}'' masa skupiona w węzłach dolnych rusztu.

Wskaźnik obniżony przy symbolu operatora różnicowego wskazuje, względem której zmiennej oblicza się różnicę cząstkową.

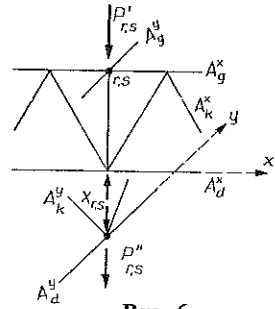
2.2. Zginanie rusztu

Biorąc pod uwagę równanie ugięć (1.1) oraz warunek zgodności przemieszczeń obu rodzin kratownic, otrzymujemy następujący układ równań różnicowych cząstkowych:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \Delta_r^4 v_{r,s} &= \frac{a_x \kappa_x}{EA_d^x} (1 - \bar{\kappa}_x \Delta_r^2) (P'_{r,s} - X_{r,s}), \\ \Delta_s^4 v_{r,s} &= \frac{a_y \kappa_y}{EA_d^y} (1 - \bar{\kappa}_y \Delta_s^2) (P''_{r,s} + X_{r,s}), \end{aligned}$$

w którym jako niewiadome występują ugięcia $v_{r,s}$ i siły wzajemnych oddziaływań $X_{r,s}$. Ponadto w równaniach (2.2) mamy

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \kappa_x &= \frac{a_x^2}{h^2} \left(1 + \frac{A_d^x}{A_g^x} \right), & \kappa_y &= \frac{a_y^2}{h^2} \left(1 + \frac{A_d^y}{A_g^y} \right), \\ \bar{\kappa}_x &= \frac{A_g^x}{4(A_g^x + A_d^x)} \left(\frac{A_d^x}{A_k^x \cos^3 \alpha} - 1 \right), \\ \bar{\kappa}_y &= \frac{A_g^y}{4(A_g^y + A_d^y)} \left(\frac{A_d^y}{A_k^y \cos^3 \beta} - 1 \right). \end{aligned}$$



Rys. 6

Poszukujemy rozwiązań dla rusztu prostokątnego, podpartego przegubowo wzdłuż całego obwodu. Warunki brzegowe są następujące:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \text{dla } r=0: & v_{0,s}=0 \text{ i } M_{0,s}^x=0 \text{ czyli } v_{-1,s}+v_{1,s}=0, \\ \text{dla } r=n: & v_{n,s}=0 \text{ i } M_{n,s}^x=0 \text{ czyli } v_{n-1,s}+v_{n+1,s}=0, \\ \text{dla } s=0: & v_{r,0}=0 \text{ i } M_{r,0}^y=0 \text{ czyli } v_{r,-1}+v_{r,1}=0, \\ \text{dla } s=m: & v_{r,m}=0 \text{ i } M_{r,m}^y=0 \text{ czyli } v_{r,m-1}+v_{r,m+1}=0. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe (2.4) będą spełnione przez rozwiązania w postaci podwójnego, skończonego szeregu Fouriera

$$(2.5) \quad v_{r,s} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \tilde{v}_{k,l} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}.$$

W podobne szeregi rozwijamy siły wzajemnych oddziaływań oraz obciążenia rusztu:

$$(2.6) \quad \{X_{r,s}, P_{r,s}\} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \{\tilde{X}_{k,l}, \tilde{P}_{k,l}\} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m},$$

przy czym

$$(2.7) \quad \tilde{P}_{k,l} = \frac{4}{nm} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{m-1} P_{r,s} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}.$$

Podstawiając (2.5) i (2.6) do (2.2) i uwzględniając, że

$$A_r^2 \sin \frac{kr\pi}{n} = -2 \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n} \right) \sin \frac{kr\pi}{n},$$

$$A_r^4 \sin \frac{kr\pi}{n} = 4 \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n} \right)^2 \sin \frac{kr\pi}{n},$$

otrzymujemy po przyrównaniu współczynników rozwinięć po obu stronach równań (2.2) następujące równania:

$$(2.8) \quad \tilde{v}_{k,l} = \frac{h\lambda_k}{EA} (\tilde{P}'_{k,l} - \tilde{X}_{k,l}), \quad \tilde{v}_{k,l} = \frac{h\mu_l}{EA} (\tilde{P}''_{k,l} + \tilde{X}_{k,l}).$$

W równaniach (2.8) wprowadzono oznaczenia

$$(2.9) \quad \lambda_k = \frac{\alpha_x \kappa_x}{4h} \frac{A}{A_d^x} \frac{1 + 2\bar{\kappa}_x \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n} \right)}{\left(1 - \cos \frac{k\pi}{n} \right)^2},$$

$$\mu_l = \frac{\alpha_y \kappa_y}{4h} \frac{A}{A_d^y} \frac{1 + 2\bar{\kappa}_y \left(1 - \cos \frac{l\pi}{m} \right)}{\left(1 - \cos \frac{l\pi}{m} \right)^2}.$$

We wzorach (2.9) A jest dowolnym porównawczym polem przekroju. Z równań (2.8) otrzymuje się

$$(2.10) \quad \tilde{v}_{k,l} = \frac{h}{EA} \frac{\lambda_k \mu_l}{\lambda_k + \mu_l} \tilde{P}_{k,l}, \quad \tilde{X}_{k,l} = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_l} \tilde{P}_{k,l} - \tilde{P}''_{k,l}.$$

Niech ruszt kratowy obciążają siły rozłożone równomiernie: $P_{r,s} = P = \text{const}$ ($P'_{r,s} = P'$, $P''_{r,s} = P''$). Wówczas sumę we wzorze (2.7) obliczamy korzystając z tablic [4]

$$(2.11) \quad \tilde{P}_{k,l} = \begin{cases} \frac{4P}{nm} \text{ctg} \frac{k\pi}{2n} \text{ctg} \frac{l\pi}{2m}, & \text{jeśli } k, l = 1, 3, \dots, \\ 0, & \text{jeśli } k \text{ lub } l \text{ jest liczbą parzystą} \end{cases}$$

i otrzymujemy następujące rozwiązanie:

$$(2.12) \quad v_{r,s} = \frac{4Ph}{nmEA} \sum_{k=1,3,\dots}^{k \leq n-1} \sum_{l=1,3,\dots}^{l \leq m-1} \frac{\lambda_k \mu_l}{\lambda_k + \mu_l} \text{ctg} \frac{k\pi}{2n} \text{ctg} \frac{l\pi}{2m} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m},$$

$$X_{r,s} = \frac{4P}{nm} \sum_{k=1,3,\dots}^{k \leq n-1} \sum_{l=1,3,\dots}^{l \leq m-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_l} \text{ctg} \frac{k\pi}{2n} \text{ctg} \frac{l\pi}{2m} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m} - P''.$$

W przypadku gdy ruszt obciążony jest siłami zmieniającymi się liniowo wzdłuż osi x

$$P'_{r,s} = P \frac{r}{n}, \quad P''_{r,s} = 0,$$

otrzymuje się na podstawie tablic [4]:

$$(2.13) \quad \tilde{P}'_{k,l} = \begin{cases} \frac{2P}{nm} (-1)^{k+1} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \operatorname{ctg} \frac{l\pi}{2m}, & \text{jeśli } l=1, 3, \dots, \\ 0, & \text{jeśli } l=2, 4, \dots \end{cases}$$

Rozwiązanie przyjmuje postać

$$(2.14) \quad \begin{aligned} v_{r,s} &= \frac{2Ph}{nmEA} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1,3,\dots}^{l \leq m-1} \frac{\lambda_k \mu_l}{\lambda_k + \mu_l} (-1)^{k+1} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \operatorname{ctg} \frac{l\pi}{2m} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}, \\ X_{r,s} &= \frac{2P}{nm} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1,3,\dots}^{l \leq m-1} \frac{(-1)^{k+1} \lambda_k}{\lambda_k + \mu_l} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \operatorname{ctg} \frac{l\pi}{2m} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}. \end{aligned}$$

Jeśli na ruszt działa siła skupiona tylko w jednym z węzłów, który określimy współrzędnymi (p, q) , tzn:

$$P_{r,s} = P \delta_{p,r} \delta_{q,s},$$

gdzie $\delta_{p,r}$ jest symbolem Kroneckera, to

$$(2.15) \quad \tilde{P}_{k,l} = \frac{4P}{nm} \sin \frac{kp\pi}{n} \sin \frac{lq\pi}{m}$$

i rozwiązanie przyjmuje postać

$$(2.16) \quad \begin{aligned} v_{r,s} &= \frac{4Ph}{nmEA} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\lambda_k \mu_l}{\lambda_k + \mu_l} \sin \frac{kp\pi}{n} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{lq\pi}{m} \sin \frac{ls\pi}{m}, \\ X_{r,s} &= \frac{4P}{nm} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_l} \sin \frac{kp\pi}{n} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{lq\pi}{m} \sin \frac{ls\pi}{m} - P'' \delta_{p,r} \delta_{q,s}. \end{aligned}$$

Znając siły wzajemnego oddziaływania kratownic rusztu, możemy myślowo wydzielić z rusztu poszczególne kratownice statycznie wyznaczalne, obciążone danymi siłami $P'_{r,s}$ bądź $P''_{r,s}$ oraz obliczonymi siłami $X_{r,s}$. Siły w prętach kratownic można obliczyć metodami elementarnymi.

2.3. Drgania własne rusztu

Równania drgań rusztu otrzymamy uwzględniając w równaniach (2.2) siły bezwładności $(-\mathfrak{M}' \ddot{w}_{r,s})$, działające na kratownice o kierunku x , oraz siły $(-\mathfrak{M}'' \ddot{v}_{r,s})$, działające na kratownice o kierunku y (rys. 7a). Trzecie brakujące równanie otrzy-

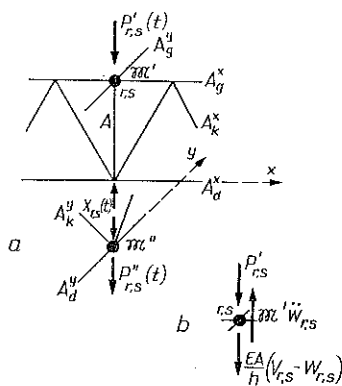
musimy stosując zasadę d'Alemberta do węzła górnego r, s (rys. 7b). W rezultacie otrzymujemy układ równań różnicowo-różniczkowych

$$(2.17) \quad \begin{aligned} A_r^4 v_{r,s}(t) &= \frac{a_x k_x}{EA_d^x} (1 - \bar{k}_x A_r^2) [P'_{r,s}(t) - \mathfrak{M}' \ddot{w}_{r,s}(t) - X_{r,s}(t)], \\ A_s^4 v_{r,s}(t) &= \frac{a_y k_y}{EA_d^y} (1 - \bar{k}_y A_s^2) [P''_{r,s}(t) - \mathfrak{M}'' \ddot{v}_{r,s}(t) + X_{r,s}(t)], \\ \frac{EA}{h} [w_{r,s}(t) - v_{r,s}(t)] + \mathfrak{M}' \ddot{w}_{r,s}(t) &= P'_{r,s}(t), \end{aligned}$$

w którym A jest polem przekroju słupka oraz $(\ddot{\cdot}) = d^2/dt^2$.

Rozważmy najpierw drgania własne. W równaniach (2.17) przyjmujemy $P'_{r,s}(t) = 0$ i $P''_{r,s}(t) = 0$, a rozwiązań szukamy w postaci:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} v_{r,s}(t) &= A_{k,l} e^{i\omega t} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}, \\ w_{r,s}(t) &= B_{k,l} e^{i\omega t} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}, \\ X_{r,s}(t) &= C_{k,l} e^{i\omega t} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}. \end{aligned}$$



Rys. 7

Podstawiając (2.18) do (2.17) otrzymujemy układ algebraicznych równań jednorodnych

$$(2.19) \quad \begin{aligned} A_{k,l} - \mathfrak{M}' \omega^2 \frac{h\lambda_k}{EA} B_{k,l} + \frac{h\lambda_k}{EA} C_{k,l} &= 0, \\ \left(1 - \mathfrak{M}'' \omega^2 \frac{h\mu_l}{EA}\right) A_{k,l} - \frac{h\mu_l}{EA} C_{k,l} &= 0, \\ -A_{k,l} + \left(1 - \mathfrak{M}' \omega^2 \frac{h}{EA}\right) B_{k,l} &= 0. \end{aligned}$$

Warunkiem istnienia rozwiązań różnych od zera jest znikanie wyznacznika układu równań (2.19), co prowadzi do równania dwukwadratowego

$$(2.20) \quad \omega^4 \mathfrak{M}' \left(\frac{h}{EA}\right)^2 - \omega^2 \frac{h}{EA} \left(\frac{1}{\lambda_k} + \frac{1}{\mu_l} + 1 + \frac{\mathfrak{M}''}{\mathfrak{M}'}\right) + \frac{1}{\mathfrak{M}'} \left(\frac{1}{\lambda_k} + \frac{1}{\mu_l}\right) = 0,$$

mającego rozwiązania następujące:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \omega_{k,l}^2 &= \frac{EA}{2h\mathfrak{M}'} \left[\frac{1}{\lambda_k} + \frac{1}{\mu_l} + 1 + \frac{\mathfrak{M}''}{\mathfrak{M}'} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_k} + \frac{1}{\mu_l} + 1 - \frac{\mathfrak{M}''}{\mathfrak{M}'}\right)^2 + 4 \frac{\mathfrak{M}''}{\mathfrak{M}'}} \right], \quad k=1, 2, \dots, n-1, \quad l=1, 2, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Liczby $\omega_{k,l}$ wyznaczają ciąg $2(n-1)(m-1)$ częstości kołowych drgań własnych układu. Wartości $\omega_{k,l}$ ze znakiem plus przed pierwiastkiem kwadratowym we wzorze (2.21) odpowiadają tym postaciom drgań własnych, przy których ruch węzłów górnych i dolnych ma kierunki przeciwne (węzły zbliżają się do siebie bądź oddalają), natomiast wartości $\omega_{k,l}$ ze znakiem minus odpowiadają postaciom drgań własnych, przy których ruch węzłów górnych i dolnych ma zwroty zgodne.

Wzór (2.21) jest poprawny dla przypadku $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}'' \neq 0$. Przypadek szczególnie $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'' = 0$ wymaga oddzielnych obliczeń. W rezultacie otrzymuje się

$$(2.22) \quad \omega_{k,l}^2 = \frac{\lambda_k + \mu_l}{\lambda_k + \lambda_k \mu_l + \mu_l} \frac{EA}{\mathfrak{M}h}, \quad k=1, 2, \dots, n-1, \quad l=1, 2, \dots, m-1.$$

2.4. Drgania wymuszone rusztu

Drgania wymuszone rusztu kratowego omówimy dla wspomnianego wyżej przypadku szczególnego: $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'' = 0$. Przyjmujemy, że $P'_{r,s} = P_{r,s}$ i $P''_{r,s} = 0$. Równania (2.17) przyjmują postać

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \Delta_r^4 v_{r,s}(t) + \frac{a_x \kappa_x}{EA_d^x} (1 - \bar{\kappa}_x \Delta_r^2) [\mathfrak{M} \ddot{w}_{r,s}(t) + X_{r,s}(t) - P_{r,s}(t)] &= 0, \\ \Delta_s^4 v_{r,s}(t) - \frac{a_y \kappa_y}{EA_d^y} (1 - \bar{\kappa}_y \Delta_s^2) X_{r,s}(t) &= 0, \\ w_{r,s}(t) - v_{r,s}(t) + \frac{\mathfrak{M}h}{EA} \ddot{w}_{r,s}(t) &= \frac{h}{EA} P_{r,s}(t). \end{aligned}$$

Niech będą dane następujące warunki początkowe:

$$(2.24) \quad w_{r,s}(+0) = G_{r,s}, \quad \dot{w}_{r,s}(+0) = g_{r,s}.$$

Warunki brzegowe dane są równaniami (2.4). Na równaniach (2.23) wykonajmy transformację Laplace'a określoną wzorem

$$\bar{y}(z) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-zt} dt, \quad y = v, w, X, P,$$

otrzymując

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \Delta_r^4 \bar{v}_{r,s}(z) + \frac{a_x \kappa_x}{EA_d^x} (1 - \bar{\kappa}_x \Delta_r^2) [\mathfrak{M} z^2 \bar{w}_{r,s}(z) - \mathfrak{M} z G_{r,s} - \mathfrak{M} g_{r,s} + \bar{X}_{r,s}(z) - \bar{P}_{r,s}(z)] &= 0, \\ \Delta_s^4 \bar{v}_{r,s}(z) - \frac{a_y \kappa_y}{EA_d^y} (1 - \bar{\kappa}_y \Delta_s^2) \bar{X}_{r,s}(z) &= 0, \\ \bar{w}_{r,s}(z) - \bar{v}_{r,s}(z) + \frac{\mathfrak{M}h}{EA} [z^2 \bar{w}_{r,s}(z) - z G_{r,s} - g_{r,s}] &= \frac{\bar{P}_{r,s}(z) h}{EA}. \end{aligned}$$

Rozwiązania układu równań różnicowych (2.25) szukamy w postaci

$$(2.26) \quad \{\bar{v}_{r,s}, \bar{w}_{r,s}, \bar{X}_{r,s}\} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \{\tilde{v}_{k,l}, \tilde{w}_{k,l}, \tilde{X}_{k,l}\} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m},$$

gwarantującej spełnienie warunków brzegowych (2.4). Po podstawieniu (2.26) do (2.25) otrzymujemy

$$(2.27) \quad \begin{aligned} \tilde{v}_{k,l}(z) + \frac{h\lambda_k}{EA} \mathfrak{M}z^2 \tilde{w}_{k,l}(z) + \frac{h\lambda_k}{EA} \tilde{X}_{k,l}(z) &= \frac{h\lambda_k}{EA} [\mathfrak{M}z \tilde{G}_{k,l} + \mathfrak{M}\tilde{g}_{k,l} + \tilde{P}_{k,l}(z)], \\ \tilde{v}_{k,l}(z) - \frac{h\mu_l}{EA} \tilde{X}_{k,l}(z) &= 0, \\ -\tilde{v}_{k,l}(z) + \left(1 + \frac{\mathfrak{M}h}{EA} z^2\right) \tilde{w}_{k,l}(z) &= \frac{h}{EA} [\mathfrak{M}z \tilde{G}_{k,l} + \mathfrak{M}\tilde{g}_{k,l} + \tilde{P}_{k,l}(z)]. \end{aligned}$$

W równaniach (2.27)

$$(2.28) \quad \{\tilde{G}_{k,l}, \tilde{g}_{k,l}\} = \frac{4}{nm} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{m-1} \{G_{r,s}, g_{r,s}\} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}$$

oraz

$$(2.28') \quad \tilde{P}_{k,l}(z) = \frac{4}{nm} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{m-1} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m} \int_0^{\infty} P_{r,s}(t) e^{-zt} dt$$

są wielkościami danymi. Po rozwiązaniu układu równań algebraicznych (2.27) otrzymujemy

$$(2.29) \quad \begin{aligned} \tilde{v}_{k,l}(z) &= \frac{\lambda_k \mu_l}{\lambda_k + \lambda_k \mu_l + \mu_l} \frac{1}{z^2 + \omega_{k,l}^2} \left[z \tilde{G}_{k,l} + \tilde{g}_{k,l} + \frac{\tilde{P}_{k,l}(z)}{\mathfrak{M}} \right], \\ \tilde{w}_{k,l}(z) &= \frac{1}{z^2 + \omega_{k,l}^2} \left[z \tilde{G}_{k,l} + \tilde{g}_{k,l} + \frac{\tilde{P}_{k,l}(z)}{\mathfrak{M}} \right], \\ \tilde{X}_{k,l}(z) &= \frac{EA}{h} \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_k \mu_l + \mu_l} \frac{1}{z^2 + \omega_{k,l}^2} \left[z \tilde{G}_{k,l} + \tilde{g}_{k,l} + \frac{\tilde{P}_{k,l}(z)}{\mathfrak{M}} \right]. \end{aligned}$$

Symbol $\omega_{k,l}^2$ we wzorach (2.29) oznacza kwadrat częstości kołowej drgań własnych rusztu kratowego obliczany za pomocą wzoru (2.22). Po wykonaniu transformacji odwrotnej otrzymuje się ostateczne wyniki w postaci następującej:

$$(2.30) \quad \begin{aligned} v_{r,s}(t) &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\lambda_k \mu_l}{\lambda_k + \lambda_k \mu_l + \mu_l} \left[\tilde{G}_{k,l} \cos \omega_{k,l} t + \frac{\tilde{g}_{k,l}}{\omega_{k,l}} \sin \omega_{k,l} t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mathfrak{M}\omega_{k,l}} \int_0^t \tilde{P}_{k,l}(\tau) \sin \omega_{k,l}(t-\tau) d\tau \right] \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}, \\ w_{r,s}(t) &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \left[\tilde{G}_{k,l} \cos \omega_{k,l} t + \frac{\tilde{g}_{k,l}}{\omega_{k,l}} \sin \omega_{k,l} t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mathfrak{M}\omega_{k,l}} \int_0^t \tilde{P}_{k,l}(\tau) \sin \omega_{k,l}(t-\tau) d\tau \right] \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}, \end{aligned}$$

$$(2.30) \quad X_{r,s}(t) = \frac{EA}{h} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_k \mu_l + \mu_l} \left[\tilde{G}_{k,l} \cos \omega_{k,l} t + \frac{\tilde{g}_{k,l}}{\omega_{k,l}} \sin \omega_{k,l} t + \frac{1}{\mathfrak{M}\omega_{k,l}} \int_0^t \tilde{P}_{k,l}(\tau) \sin \omega_{k,l}(t-\tau) d\tau \right] \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}.$$

Niech w węzle p, q działa siła harmonicznje zmienna

$$P_{r,s}(t) = P \delta_{p,r} \delta_{a,s} \sin \omega t.$$

Ponadto przyjmijmy, że w chwili $t=0$ ruszt jest nieodkształcony oraz pozostaje w spoczynku ($G_{r,s}=0$, $g_{r,s}=0$). Wówczas

$$\tilde{P}_{k,l}(\tau) = \frac{4P}{nm} \sin \omega \tau \sin \frac{kp\pi}{n} \sin \frac{lq\pi}{m}$$

i otrzymujemy następujące rozwiązanie

$$(2.31) \quad v_{r,s}(t) = \frac{4P}{nm\mathfrak{M}} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\lambda_k \mu_l}{\lambda_k + \lambda_k \mu_l + \mu_l} \frac{I_{k,l}(t)}{\omega_{k,l}} \times \sin \frac{kp\pi}{n} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{lq\pi}{m} \sin \frac{ls\pi}{m},$$

$$w_{r,s}(t) = \frac{4P}{nm\mathfrak{M}} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{I_{k,l}(t)}{\omega_{k,l}} \sin \frac{kp\pi}{n} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{lq\pi}{m} \sin \frac{ls\pi}{m},$$

$$X_{r,s}(t) = \frac{4PEA}{nm\mathfrak{M}h} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_k \mu_l + \mu_l} \frac{I_{k,l}(t)}{\omega_{k,l}} \times \sin \frac{kp\pi}{n} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{lq\pi}{m} \sin \frac{ls\pi}{m}.$$

We wzorach (2.31) $I_{k,l}(t)$ jest określone następująco:

$$(2.32) \quad I_{k,l}(t) = \int_0^t \sin \omega \tau \sin \omega_{k,l}(t-\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{\omega \sin \omega_{k,l} t - \omega_{k,l} \sin \omega t}{\omega^2 - \omega_{k,l}^2}, & \text{jeśli } \omega \neq \omega_{k,l}, \\ \frac{1}{2\omega_{k,l}} (\sin \omega_{k,l} t - \omega_{k,l} t \cos \omega_{k,l} t), & \text{jeśli } \omega = \omega_{k,l}, \quad k=1, 2, \dots, n, \\ & l=1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

Przypadek $\omega = \omega_{k,l}$ odpowiada rezonansowi układu. W rozwiązaniu pojawia się wówczas wyraz $\omega_{k,l} t \cos \omega_{k,l} t$ wzrastający nieograniczenie wraz z upływem czasu.

3. RUSZT TYPU I-b

Równania statyki i drgań rusztu typu I-b są analogiczne do równań (2.2) i (2.17). Konstrukcję I-b można otrzymać przez odwrócenie schematu I-a. Stąd w równaniach (2.2) $v_{r,s}$ należy zastąpić przez $w_{r,s}$, a wielkości $\bar{\kappa}_x$ i $\bar{\kappa}_y$ w odróżnieniu od wzorów (2.3)_{2,3} należy obliczać następująco:

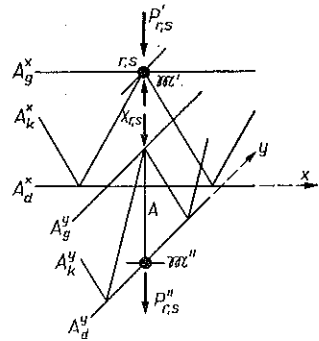
$$(3.1) \quad \bar{\kappa}_x = \frac{A_d^x}{4(A_d^x + A_g^x)} \left(\frac{A_g^x}{A_k^x \cos^3 \alpha} - 1 \right),$$

$$\bar{\kappa}_y = \frac{A_d^y}{4(A_d^y + A_g^y)} \left(\frac{A_g^y}{A_k^y \cos^3 \beta} - 1 \right).$$

Interpretację umownych sił wzajemnego oddziaływania kratownic rusztu $X_{r,s}$ wystarczająco ustala rys. 8.

Podobne zmiany wystąpią w równaniach drgań (2.17). Po lewych stronach tych równań $v_{r,s}$ należy zastąpić przez $w_{r,s}$ i odwrotnie. W ostatnim równaniu ponadto $\mathfrak{M}' \ddot{w}_{r,s}$ zastępujemy przez $\mathfrak{M}'' \ddot{v}_{r,s}$ i $P'_{r,s}$ przez $P''_{r,s}$.

Podobne zmiany wystąpią w rozwiązaniach. Na przykład we wzorze (2.21) na częstości kołowe drgań własnych rusztu, \mathfrak{M}'' zastępuje się przez \mathfrak{M}' oraz odwrotnie: \mathfrak{M}' przez \mathfrak{M}'' .



Rys. 8

4. RUSZT TYPU II

4.1. Zginanie rusztu

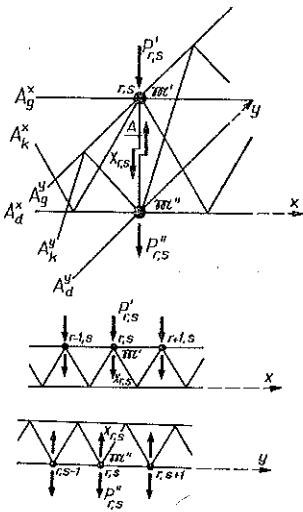
W ruszcie przedstawionym na rys. 3 siły $X_{r,s}$ będą siłami osiowymi w słupkach. Na rys. 9 pokazany jest schemat działania tych sił na kratownice obu rodzin w węzle r, s . Układ równań różnicowych ugięć rusztu jest następujący:

$$(4.1) \quad A_r^4 w_{r,s} = \frac{a_x \kappa_x}{EA_d^x} (1 - \bar{\kappa}_x A_r^2) (P'_{r,s} + X_{r,s}),$$

$$A_s^4 v_{r,s} = \frac{a_y \kappa_y}{EA_d^y} (1 - \bar{\kappa}_y A_s^2) (P''_{r,s} - X_{r,s}),$$

$$v_{r,s} - w_{r,s} = \frac{h}{EA} X_{r,s}.$$

Pierwsze dwa równania są odpowiednio równaniami ugięć kratownic o kierunkach x oraz y wyizolowanych myślowo z układu. Trzecie równanie wynika z warunku zgodności przemieszczeń węzłów dolnych i górnych z uwzględnieniem wydłużeń słupków (A jest polem przekroju słupka).



Rys. 9

W równaniach (4.1) κ_x i κ_y należy obliczać według wzorów (2.3)_{1,2}, $\bar{\kappa}_x$ obliczamy za pomocą wzoru (3.1)₁, $\bar{\kappa}_y$ zaś za pomocą wzoru (2.3)₄.

Rozpatrzmy ruszt podparty przegubowo na obwodzie. Ugięcia rusztu i obciążenia rozwijamy w podwójne, skończone szeregi Fouriera postaci (2.5), (2.6) i (2.7). Po przyrównaniu współczynników rozwinięć po obu stronach równań (4.1) otrzymujemy

$$\tilde{w}_{k,l} = \frac{h\lambda_k}{EA} (\tilde{P}'_{k,l} + \tilde{X}_{k,l}), \quad \tilde{v}_{k,l} = \frac{h\mu_l}{EA} (\tilde{P}''_{k,l} - \tilde{X}_{k,l}), \quad \tilde{v}_{k,l} - \tilde{w}_{k,l} = \frac{h}{EA} \tilde{X}_{k,l},$$

skąd obliczamy

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \tilde{w}_{k,l} &= \frac{h\lambda_k}{EA} \frac{\mu_l \tilde{P}'_{k,l} + \tilde{P}''_{k,l}}{1 + \lambda_k + \mu_l}, \\ \tilde{v}_{k,l} &= \frac{h\mu_l}{EA} \frac{\lambda_k \tilde{P}'_{k,l} + \tilde{P}''_{k,l}}{1 + \lambda_k + \mu_l}, \\ \tilde{X}_{k,l} &= -\frac{\lambda_k \tilde{P}'_{k,l} - \mu_l \tilde{P}''_{k,l}}{1 + \lambda_k + \mu_l}. \end{aligned}$$

We wzorach (4.2) λ_k i μ_l są określone wzorami (2.9).

Niech $P'_{r,s} = P' = \text{const}$, $P''_{r,s} = P'' = \text{const}$ ($P' + P'' = P$). Biorąc pod uwagę (2.11) otrzymujemy

$$(4.3) \quad \begin{aligned} w_{r,s} &= \frac{4Ph}{nmEA} \sum_{k=1,3,\dots}^{k \leq n-1} \sum_{l=1,3,\dots}^{l \leq m-1} \frac{\mu_l + \frac{P'}{P}}{1 + \lambda_k + \mu_l} \lambda_k \text{ctg} \frac{k\pi}{2n} \text{ctg} \frac{l\pi}{2m} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}, \\ v_{r,s} &= \frac{4Ph}{nmEA} \sum_{k=1,3,\dots}^{k \leq n-1} \sum_{l=1,3,\dots}^{l \leq m-1} \frac{\lambda_k + \frac{P''}{P}}{1 + \lambda_k + \mu_l} \mu_l \text{ctg} \frac{k\pi}{2n} \text{ctg} \frac{l\pi}{2m} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}, \\ X_{r,s} &= -\frac{4P}{nm} \sum_{k=1,3,\dots}^{k \leq n-1} \sum_{l=1,3,\dots}^{l \leq m-1} \frac{\lambda_k \frac{P'}{P} - \mu_l \frac{P''}{P}}{1 + \lambda_k + \mu_l} \text{ctg} \frac{k\pi}{2n} \text{ctg} \frac{l\pi}{2m} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}. \end{aligned}$$

Rozwiązania dla innych przypadków obciążeń można łatwo napisać opierając się na wzorach (2.13) i (2.15).

4.2. Drgania i funkcje własne

Równania drgań rusztu otrzymamy wprowadzając do równań (4.1) siły bezwładności:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \Delta_r^4 w_{r,s}(t) + \frac{a_x \kappa_x}{EA_d^x} (1 - \bar{\kappa}_x \Delta_r^2) [\mathfrak{W}' \ddot{w}_{r,s}(t) - X_{r,s}(t) - P'_{r,s}(t)] &= 0, \\ \Delta_s^4 v_{r,s}(t) + \frac{a_y \kappa_y}{EA_d^y} (1 - \bar{\kappa}_y \Delta_s^2) [\mathfrak{W}'' \ddot{v}_{r,s}(t) + X_{r,s}(t) - P''_{r,s}(t)] &= 0, \\ v_{r,s}(t) - w_{r,s}(t) &= \frac{h}{EA} X_{r,s}(t). \end{aligned}$$

Dla rusztu typu II zbadamy bardziej szczegółowo drgania i funkcje własne układu «dwuwarstwowego», to znaczy takiego układu, w którym masy skupione występują w warstwie węzłów dolnych oraz w warstwie węzłów górnych ($\mathfrak{M}'\mathfrak{M}'' \neq 0$).

Przyjmujemy w (4.4) $P'_{r,s} = 0$ oraz $P''_{r,s} = 0$ i rozważamy układ równań jednorodnych. Szukamy rozwiązań szczególnych w postaci

$$(4.5) \quad w_{r,s}(t) = W_{r,s}T(t), \quad v_{r,s}(t) = V_{r,s}T(t), \quad X_{r,s}(t) = Y_{r,s}T(t)$$

spełniających warunki brzegowe odpowiadające podparciu przegubowemu wzdłuż całego obwodu rusztu.

Po podstawieniu (4.5) do (4.4), rozdzieleniu zmiennych i przyrównaniu do stałej ω^2 dostajemy równanie różniczkowe $\ddot{T} + \omega^2 T = 0$ z rozwiązaniem $T(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ oraz układ równań różnicowych

$$(4.6) \quad \begin{aligned} A_r^4 W_{r,s} - \frac{a_x \kappa_x}{EA_d^x} (1 - \bar{\kappa}_x A_r^2) (\mathfrak{M}' \omega^2 W_{r,s} + Y_{r,s}) &= 0, \\ A_s^4 V_{r,s} - \frac{a_y \kappa_y}{EA_d^y} (1 - \bar{\kappa}_y A_s^2) (\mathfrak{M}'' \omega^2 V_{r,s} - Y_{r,s}) &= 0, \\ V_{r,s} - W_{r,s} &= \frac{h}{EA} Y_{r,s}. \end{aligned}$$

Rozwiązań równań (4.6) szukamy w postaci

$$(4.7) \quad \{W_{r,s}, V_{r,s}, Y_{r,s}\} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \{\tilde{W}_{k,l}, \tilde{V}_{k,l}, \tilde{Y}_{k,l}\} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m},$$

spełniającej dane warunki brzegowe. Podstawiając (4.7) do (4.6) po przekształceniach otrzymuje się układ algebraicznych równań jednorodnych

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \tilde{W}_{k,l} - \frac{h\lambda_k}{EA} (\mathfrak{M}' \omega^2 \tilde{W}_{k,l} + \tilde{Y}_{k,l}) &= 0, \\ \tilde{V}_{k,l} - \frac{h\mu_l}{EA} (\mathfrak{M}'' \omega^2 \tilde{V}_{k,l} - \tilde{Y}_{k,l}) &= 0, \\ \tilde{V}_{k,l} - \tilde{W}_{k,l} - \frac{h}{EA} \tilde{Y}_{k,l} &= 0 \end{aligned}$$

z niewiadomymi $\tilde{W}_{k,l}$, $\tilde{V}_{k,l}$ i $\tilde{Y}_{k,l}$. Warunek istnienia rozwiązań różnych od zera

$$D_{k,l}(\omega) = \begin{vmatrix} \left(1 - \mathfrak{M}' \omega^2 \frac{h\lambda_k}{EA}\right) & 0 & -\frac{h\lambda_k}{EA} \\ 0 & \left(1 - \mathfrak{M}'' \omega^2 \frac{h\mu_l}{EA}\right) & \frac{h\mu_l}{EA} \\ 1 & -1 & \frac{h}{EA} \end{vmatrix} = 0$$

proceedzi do równania dwukwadratowego, którego rozwiązanie daje wzór na częstości kołowe drgań własnych układu:

$$(4.9) \quad \omega_{k,l}^2 = \frac{EA}{2h\mathfrak{M}'} \left[\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} + \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}''} \frac{1+\mu_l}{\mu_l} \pm \sqrt{\left(\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} - \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}''} \frac{1+\mu_l}{\mu_l} \right)^2 + 4 \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}''}} \right].$$

Dla $\omega = \omega_{k,l}$ z (4.8) otrzymujemy

$$\tilde{V}_{k,l} = \left(\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} - \omega_{k,l}^2 \frac{\mathfrak{M}' h}{EA} \right) \tilde{W}_{k,l},$$

$$\tilde{Y}_{k,l} = \left(\frac{EA}{h\lambda_k} - \mathfrak{M}' \omega_{k,l}^2 \right) \tilde{W}_{k,l}.$$

Wynika stąd następująca postać funkcji własnych:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} W_{r,s}^{(k,l)} &= \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}, \\ V_{r,s}^{(k,l)} &= \left(\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} - \omega_{k,l}^2 \frac{\mathfrak{M}' h}{EA} \right) \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}, \\ Y_{r,s}^{(k,l)} &= \left(\frac{EA}{h\lambda_k} - \mathfrak{M}' \omega_{k,l}^2 \right) \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}. \end{aligned}$$

Oznaczając w dalszym ciągu

$$(4.11) \quad \omega_{k,l}^2 = \frac{EA}{2h\mathfrak{M}'} [\dots - \sqrt{\dots}], \quad \bar{\omega}_{k,l}^2 = \frac{EA}{2h\mathfrak{M}'} [\dots + \sqrt{\dots}]$$

(wyrazy w nawiasach wg wzoru (4.9)), zbadajmy przebieg poszczególnych postaci drgań własnych. Mamy

$$\begin{aligned} \left[\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} - \omega_{k,l}^2 \frac{\mathfrak{M}' h}{EA} \right] &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} - \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}''} \frac{1+\mu_l}{\mu_l} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\left(\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} - \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}''} \frac{1+\mu_l}{\mu_l} \right)^2 + 4 \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}''}} \right] > 0, \end{aligned}$$

ponieważ

$$\sqrt{\left(\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} - \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}''} \frac{1+\mu_l}{\mu_l} \right)^2 + 4 \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}''}} > \left| \frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} - \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}''} \frac{1+\mu_l}{\mu_l} \right|.$$

Podobnie można wykazać, że

$$\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} - \bar{\omega}_{k,l}^2 \frac{\mathfrak{M}' h}{EA} < 0.$$

Wynika stąd, że częstościom kołowym $\omega_{k,l}$ odpowiadają takie postacie drgań własnych, przy których ruch węzłów górnych i dolnych ma zwroty zgodne

($W_{r,s}^{(k,l)} > 0 \Rightarrow V_{r,s}^{(k,l)} > 0$), natomiast częstościom $\bar{\omega}_{k,l}$ odpowiadają postacie drgań własnych, dla których ruch węzłów górnych odbywa się ze zwrotem przeciwnym do ruchu węzłów dolnych ($W_{r,s}^{(k,l)} > 0 \Rightarrow V_{r,s}^{(k,l)} < 0$).

Rozwiązanie układu równań różnicowo-różniczkowych (4.4) (jednorodnych) jest następujące:

$$\begin{aligned}
 w_{r,s}(t) &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} (A_{k,l} \sin \omega_{k,l} t + B_{k,l} \cos \omega_{k,l} t + \bar{A}_{k,l} \sin \bar{\omega}_{k,l} t + \\
 &\quad + \bar{B}_{k,l} \cos \bar{\omega}_{k,l} t) \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}, \\
 (4.12) \quad v_{r,s}(t) &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \left[\left(\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} - \omega_{k,l}^2 \frac{\mathfrak{M}'h}{EA} \right) (A_{k,l} \sin \omega_{k,l} t + B_{k,l} \cos \omega_{k,l} t) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} - \bar{\omega}_{k,l}^2 \frac{\mathfrak{M}'h}{EA} \right) (\bar{A}_{k,l} \sin \bar{\omega}_{k,l} t + \bar{B}_{k,l} \cos \bar{\omega}_{k,l} t) \right] \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}, \\
 X_{r,s}(t) &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \left[\left(\frac{EA}{h\lambda_k} - \mathfrak{M}' \omega_{k,l}^2 \right) (A_{k,l} \sin \omega_{k,l} t + B_{k,l} \cos \omega_{k,l} t) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{EA}{h\lambda_k} - \mathfrak{M}' \bar{\omega}_{k,l}^2 \right) (\bar{A}_{k,l} \sin \bar{\omega}_{k,l} t + \bar{B}_{k,l} \cos \bar{\omega}_{k,l} t) \right] \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}.
 \end{aligned}$$

Niech będą dane warunki początkowe

$$\begin{aligned}
 (4.13) \quad v_{r,s}(+0) &= F_{r,s}, & \dot{v}_{r,s}(+0) &= f_{r,s}, \\
 w_{r,s}(+0) &= G_{r,s}, & \dot{w}_{r,s}(+0) &= g_{r,s}.
 \end{aligned}$$

Po rozwinięciu funkcji $F_{r,s}, f_{r,s}, G_{r,s}$ i $g_{r,s}$ w szeregi i po przyrównaniu współczynników w szeregach występujących po obu stronach równań (4.13) otrzymujemy układ równań:

$$\begin{aligned}
 \omega_{k,l} A_{k,l} + \bar{\omega}_{k,l} \bar{A}_{k,l} &= \tilde{g}_{k,l}, \\
 \left(\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} - \omega_{k,l}^2 \frac{\mathfrak{M}'h}{EA} \right) \omega_{k,l} A_{k,l} + \left(\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} - \bar{\omega}_{k,l}^2 \frac{\mathfrak{M}'h}{EA} \right) \bar{\omega}_{k,l} \bar{A}_{k,l} &= \tilde{f}_{k,l}, \\
 B_{k,l} + \bar{B}_{k,l} &= \tilde{G}_{k,l}, \\
 \left(\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} - \omega_{k,l}^2 \frac{\mathfrak{M}'h}{EA} \right) B_{k,l} + \left(\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} - \bar{\omega}_{k,l}^2 \frac{\mathfrak{M}'h}{EA} \right) \bar{B}_{k,l} &= \tilde{F}_{k,l},
 \end{aligned}$$

w którym

$$\{\tilde{F}_{k,l}, \tilde{f}_{k,l}, \tilde{G}_{k,l}, \tilde{g}_{k,l}\} = \frac{4}{nm} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{m-1} \{F_{r,s}, f_{r,s}, G_{r,s}, g_{r,s}\} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}.$$

Obliczamy stąd stałe całkowania:

$$\begin{aligned}
 A_{k,l} &= \frac{EA}{\mathfrak{M}'h} \frac{1}{\omega_{k,l}(\bar{\omega}_{k,l}^2 - \omega_{k,l}^2)} \left[\tilde{f}_{k,l} - \left(\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} - \frac{\bar{\omega}_{k,l}^2}{\omega_{k,l}^2} \frac{\mathfrak{M}'h}{EA} \right) \tilde{g}_{k,l} \right], \\
 \bar{A}_{k,l} &= \frac{EA}{\mathfrak{M}'h} \frac{1}{\bar{\omega}_{k,l}(\omega_{k,l}^2 - \bar{\omega}_{k,l}^2)} \left[\tilde{f}_{k,l} - \left(\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} - \frac{\omega_{k,l}^2}{\bar{\omega}_{k,l}^2} \frac{\mathfrak{M}'h}{EA} \right) \tilde{g}_{k,l} \right], \\
 B_{k,l} &= \frac{EA}{\mathfrak{M}'h} \frac{1}{\bar{\omega}_{k,l}^2 - \omega_{k,l}^2} \left[\tilde{F}_{k,l} - \left(\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} - \frac{\bar{\omega}_{k,l}^2}{\omega_{k,l}^2} \frac{\mathfrak{M}'h}{EA} \right) \tilde{G}_{k,l} \right], \\
 \bar{B}_{k,l} &= \frac{EA}{\mathfrak{M}'h} \frac{1}{\omega_{k,l}^2 - \bar{\omega}_{k,l}^2} \left[\tilde{F}_{k,l} - \left(\frac{1+\lambda_k}{\lambda_k} - \frac{\omega_{k,l}^2}{\bar{\omega}_{k,l}^2} \frac{\mathfrak{M}'h}{EA} \right) \tilde{G}_{k,l} \right].
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

4.3. Ustalone drgania harmoniczne

Rozważmy na zakończenie drgania wymuszone rusztu, skupiając uwagę na ustalonych drganiach harmonicznym. Przyjmujemy

$$P'_{r,s}(t) = P'_{r,s}{}^* e^{i\omega t}, \quad P''_{r,s}(t) = P''_{r,s}{}^* e^{i\omega t}.$$

Rozwiązań równań (4.4) poszukujemy w postaci

$$w_{r,s}(t) = w_{r,s}^* e^{i\omega t}, \quad v_{r,s}(t) = v_{r,s}^* e^{i\omega t}, \quad X_{r,s}(t) = X_{r,s}^* e^{i\omega t}.$$

Podstawiając (4.15) i (4.16) do (4.4) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 A_r^4 w_{r,s}^* - \frac{a_x \kappa_x}{EA_d^x} (1 - \bar{\kappa}_x A_r^2) (\mathfrak{M}' \omega^2 w_{r,s}^* + X_{r,s}^* + P'_{r,s}{}^*) &= 0, \\
 A_s^4 v_{r,s}^* - \frac{a_y \kappa_y}{EA_d^y} (1 - \bar{\kappa}_y A_s^2) (\mathfrak{M}'' \omega^2 v_{r,s}^* - X_{r,s}^* + P''_{r,s}{}^*) &= 0, \\
 v_{r,s}^* - w_{r,s}^* &= \frac{h}{EA} X_{r,s}^*.
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

Amplitudy drgań rozwijamy w podwójne, skończone szeregi Fouriera. Współczynniki rozwinięć obliczamy z układu równań

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \omega^2 \mathfrak{M}' \frac{h\lambda_k}{EA} \right) \tilde{w}_{k,l}^* - \frac{h\lambda_k}{EA} \tilde{X}_{k,l}^* &= \frac{h\lambda_k}{EA} \tilde{P}'_{k,l}{}^*, \\
 \left(1 - \omega^2 \mathfrak{M}'' \frac{h\mu_l}{EA} \right) \tilde{v}_{k,l}^* + \frac{h\mu_l}{EA} \tilde{X}_{k,l}^* &= \frac{h\mu_l}{EA} \tilde{P}''_{k,l}{}^*, \\
 \tilde{w}_{k,l}^* - \tilde{v}_{k,l}^* + \frac{h}{EA} \tilde{X}_{k,l}^* &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

i w rezultacie otrzymujemy

$$\tilde{w}_{k,l}^* = \frac{\tilde{P}'_{k,l}{}^* h}{EA D_{k,l}(\omega)} \left(\frac{1+\mu_l}{\mu_l} - \omega^2 \frac{\mathfrak{M}'' h}{EA} \right) + \frac{\tilde{P}''_{k,l}{}^* h}{EA D_{k,l}(\omega)},$$

$$(4.19) \quad \begin{aligned} \tilde{v}_{k,l}^* &= \frac{\tilde{P}_{k,l}^{'*} h}{EA D_{k,l}(\omega)} + \frac{\tilde{P}_{k,l}'' h}{EA D_{k,l}(\omega)} \left(\frac{1 + \lambda_k}{\lambda_k} - \omega^2 \frac{\mathfrak{M}' h}{EA} \right), \\ \tilde{X}_{k,l}^* &= - \left(\frac{1}{\mu_l} - \omega^2 \frac{\mathfrak{M}'' h}{EA} \right) \frac{\tilde{P}_{k,l}^{'*}}{D_{k,l}(\omega)} + \left(\frac{1}{\lambda_k} - \omega^2 \frac{\mathfrak{M}' h}{EA} \right) \frac{\tilde{P}_{k,l}''}{D_{k,l}(\omega)}. \end{aligned}$$

We wzorach (4.19) mamy

$$(4.20) \quad D_{k,l}(\omega) = \left(\frac{h}{EA} \right)^2 \mathfrak{M}' \mathfrak{M}'' \lambda_k \mu_l (\omega^2 - \omega_{k,l}^2) (\omega^2 - \bar{\omega}_{k,l}^2).$$

Rozwiązanie przyjmuje ostatecznie postać następującą:

$$(4.21) \quad \begin{aligned} w_{r,s}(t) &= \frac{EA e^{i\omega t}}{\mathfrak{M}' \mathfrak{M}'' h} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\left(\frac{1 + \mu_l}{\mu_l} - \omega^2 \frac{\mathfrak{M}'' h}{EA} \right) \tilde{P}_{k,l}^{'*} + \tilde{P}_{k,l}''}{\lambda_k \mu_l (\omega^2 - \omega_{k,l}^2) (\omega^2 - \bar{\omega}_{k,l}^2)} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}, \\ v_{r,s}(t) &= \frac{EA e^{i\omega t}}{\mathfrak{M}' \mathfrak{M}'' h} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\tilde{P}_{k,l}^{'*} + \left(\frac{1 + \lambda_k}{\lambda_k} - \omega^2 \frac{\mathfrak{M}' h}{EA} \right) \tilde{P}_{k,l}''}{\lambda_k \mu_l (\omega^2 - \omega_{k,l}^2) (\omega^2 - \bar{\omega}_{k,l}^2)} \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}, \\ X_{r,s}(t) &= - \frac{(EA)^2 e^{i\omega t}}{\mathfrak{M}' \mathfrak{M}'' h^2} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\left(\frac{1}{\mu_l} - \omega^2 \frac{\mathfrak{M}'' h}{EA} \right) \tilde{P}_{k,l}^{'*} - \left(\frac{1}{\lambda_k} - \omega^2 \frac{\mathfrak{M}' h}{EA} \right) \tilde{P}_{k,l}''}{\lambda_k \mu_l (\omega^2 - \omega_{k,l}^2) (\omega^2 - \bar{\omega}_{k,l}^2)} \times \\ &\quad \times \sin \frac{kr\pi}{n} \sin \frac{ls\pi}{m}. \end{aligned}$$

5. PRZYKŁAD

Wykonano obliczenia ugięć i sił wewnętrznych dla rusztu typu II o wymiarach w planie: 30,00 × 28,80 m. Do obliczeń przyjęto następujące dane wyjściowe:

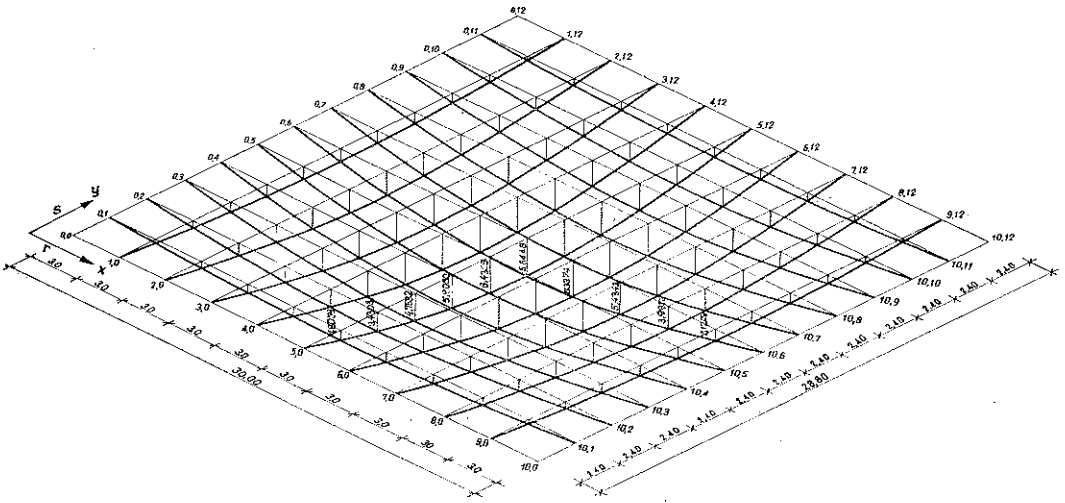
$$\begin{aligned} n &= 10, \quad m = 12; \\ a_x &= 3,00 \text{ m}, \quad a_y = 2,40 \text{ m}, \quad h = 1,50 \text{ m}; \\ A_g^x &= A_g^y = A_d^x = A_d^y = 4A, \quad A_k^x = A_k^y = 2,8A, \\ A &= 5,15 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Przyjęto, że siły są rozłożone równomiernie:

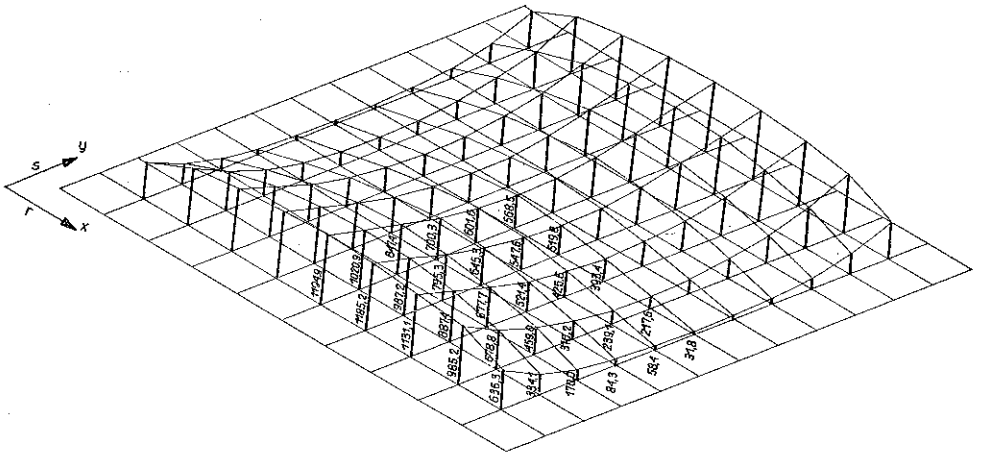
$P' = 1344 \text{ kG}$ (połowa ciężaru własnego konstrukcji, ciężar pokrycia i śniegu),
 $P'' = 136 \text{ kG}$ (połowa ciężaru własnego konstrukcji i ciężar projektowanych podwieszonych).

Obliczamy:

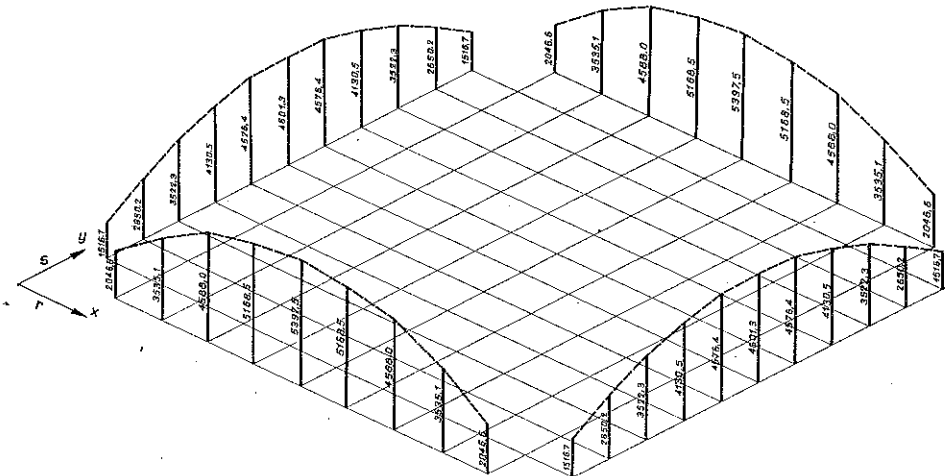
$$\begin{aligned} \cos \alpha &= 0,7071 \quad (\alpha = 45^\circ), \\ \cos \beta &= 0,6552 \quad (\beta = 51^\circ 18'), \\ \kappa_x &= 8,0000, \quad \kappa_y = 5,1200, \\ \bar{\kappa}_x &= 0,3801, \quad \bar{\kappa}_y = 0,6064. \end{aligned}$$



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

Nie przytaczając dalszych obliczeń podajemy wyniki. Na rys. 10 przedstawiono wykres ugięć rusztu. Rzędne na wykresie podane są w centymetrach. Wykres wartości sił w słupkach, podanych w kG, widoczny jest na rys. 11. Na rys. 12 podano wykresy przedstawiające rozkład reakcji podporowych w kG.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. D. L. DEAN, S. TAUBER, *Solutions for one-dimensional structural lattices*, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, **85**, 4, 1959.
2. G. GEIZENDORFER, L. LEGATSKI, *Unistruts space-frame system*, The University of Michigan Press, 1955.
3. A. GOMULIŃSKI, M. WITKOWSKI, *Obliczanie struktur kratowych*, XVI Konferencja Naukowa KIL PAN i KN PZITB, Krynica 1970.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Издат. „Наука”, Москва 1971.
5. W. GUTKOWSKI, *Geometria różnicowa powierzchniowej siatki punktów*, Mech. Teoret. i Stos., **3**, 2, 1965.
6. W. GUTKOWSKI, *Powierzchniowe konstrukcje prętowe*, Mech. Teoret. i Stos., **3**, 3, 1965.
7. W. GUTKOWSKI, *Płyty kratowe z elementów powtarzalnych*, Rozpr. Inżyn., **13**, 1, 1965.
8. W. GUTKOWSKI, *Przestrzenny ruszt kratowy*, X Konfer. Nauk. KN PZITB i KIL PAN, Streszczenia referatów, Krynica 1964.
9. P. JASTRZĘBSKI, R. SOLECKI, J. SZYMKIEWICZ, *Kratownice — obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1970.
10. Z. S. MAKOWSKI, *Räumliche Tragwerke aus Stahl*, Düsseldorf 1963.
11. R. ŚWITKA, *Zginanie i drgania harmoniczne pewnego typu rusztu kratowego*, Czasopismo Techniczne, z. 6-M, 1972.
12. R. ŚWITKA, *Metoda równań różnicowych w zagadnieniach zginania i drgań kratownic regularnych*, Inżynieria i Budownictwo, 9, 1972.

Резюме

ИЗГИБ И КОЛЕБАНИЯ РОСТВЕРКОВ

В работе рассмотрены три типа растрверков с регулярной прямоугольной сеткой, состоящих из ферм с параллельными полосами и регулярной решеткой. Ростверки описаны при помощи разностных уравнений в частных производных для случая изгиба и разностно-дифференциальных уравнений в случае колебаний. Для решеток шарнирно-опертых по всему периметру получены решения в виде двойных конечных рядов Фурье.

Для всех типов решеток даны решения прогибов при различных типах нагружения. Выведены формулы для частот собственных колебаний. Обсуждены вынужденные колебания, в частности гармонические колебания. Работа иллюстрируется численным примером.

SUMMARY

BENDING AND VIBRATION OF TRUSS GRIDWORKS

Three types of grids forming regular, rectangular lattices are discussed in the paper; the grids consist of trusses with parallel chords and regular lattices. The grid is described by partial difference equations (bending) and by difference-differential equations (vibration). For gridworks which are simply supported along the edges, the solutions have the form of double Fourier series.

The solution is given for each type of gridwork and gives its deflection for various load types and the corresponding formulae for free vibration frequencies. Forced vibration, harmonic in particular, is also discussed. A numerical example is given.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 sierpnia 1973 r.
