ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 22, 1, 3—19, 1974
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

DUALNE ASPEKTY ANALIZY UKŁADÓW PRĘTOWYCH

BOGDAN OLSZOWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

Datujący się zaledwie od kilku lat wzrost zainteresowania problemami dualnymi mechaniki wiąże się bezpośrednio z coraz powszechniejszym w tej dyscyplinie zastosowaniem metod programowania matematycznego. Rzecz polega na tym, że dwoistość sformułowań leży u samych podstaw zarówno mechaniki, jak również programowania matematycznego i może być interpretowana w sposób jednolity na gruncie transformacji Legendre'a [1 – 4]. Spostrzeżenie to zostało po raz pierwszy wyraźnie sprecyzowane przez Sewella [4] w roku 1969 i skłoniło go do przeprowadzenia próby stworzenia wspólnych podstaw obu dyscyplin.

Nieco wcześniej, począwszy od roku 1962, ukazał się cały szereg prac [5 – 11] na temat zastosowania metod teorii sieci elektrycznych w mechanice układów prętowych. Prace te opierały się na wykorzystaniu analogii istniejącej pomiędzy równaniami mechaniki tych układów a równaniami odpowiadających im sieci, wynikającymi z praw Kirchhoffa o charakterze typowo dwoistym. Dwoistość ta niestety nie została jednak należycie uwypuklona, co opóźniło sformułowanie wynikających z niej wniosków.

Statyczno-kinematyczna dwoistość zasad mechaniki, przejawiająca się w postaci twierdzeń Castigliano i Lagrange'a, pozwala w sposób konsekwentny wyróżnić dwa statyczne i kinematyczne podejścia, zupełnie od siebie niezależne i prowadzące do wyodrębnienia dwóch jakościowo różnych, ale wzajemnie się uzupełniających stanów tego samego układu. Zgodnie z istniejącą już tradycją [12 – 18] stany te można określić odpowiednio jako stan statyczny i kinematyczny układu.

Dualizm odpowiadających sobie pojęć i wielkości mechanicznych pozwala prowadzić rozważania równolegle dla obydwu aspektów zagadnienia, czego przykładem może być stwierdzenie, że treść pojęcia stanu statycznego (kinematycznego) «jest sumą» treści pojęć dwu stanów: obciążenia i naprężenia (przemieszczenia i odkształcenia). W takim ujęciu treść pojęcia stanu układu «jest sumą» treści pojęć czterech stanów: obciążenia, naprężenia, przemieszczenia i odkształcenia.

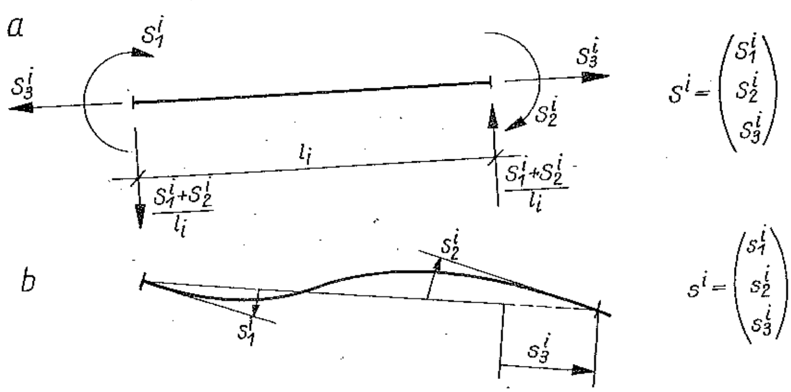
Specjalnego podkreślenia wymaga fakt, że w rozważaniach dotyczących problemu czysto statycznego (kinematycznego), korzysta się wyłącznie z warunków równowagi sił (zgodności przemieszczeń) występujących w danym układzie. W rozważaniach tych natomiast zupełnie nie zachodzi potrzeba wykorzystywania równań fizycznych tak długo, dopóki obydwa aspekty zagadnienia traktuje się jako niezależne od siebie. Dzięki temu problem fizycznej liniowości czy nieliniowości układu nie odgrywa tu żadnej roli.

Praca ma na celu przedstawienie i wyeksponowanie dwoistości odpowiadających sobie podstawowych pojęć i wielkości mechanicznych, występujących w analizie układów prętowych. O układach tych założono, że są kinematycznie liniowe, dzięki czemu można było wykorzystać aparat algebry liniowej, oraz przyjęto, że ich obciążeniami są wyłącznie siły skupione, działające węzłowo. Mimo że rozważania ilustrowane są przykładami układów płaskich o prętach prostoliniowych, pracujących głównie na zginanie i siły podłużne, to jednak odnoszą się one również do przypadków bardziej złożonych.

W pracy ograniczono się wyłącznie do omówienia czysto statycznych i kinematycznych aspektów analizy, nie wymagających żadnych założeń odnośnie do fizycznych własności rozważanych układów. Potrzeba takiego ujęcia wynika z faktu, że w dotychczasowej literaturze brak jest, jak się wydaje, pozycji traktującej zagadnienie w sposób konsekwentny od tej właśnie strony.

2. Jednostkowe stany statycznie i kinematycznie dopuszczalne

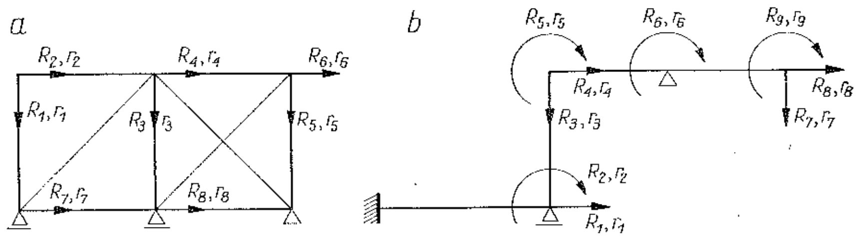
Oznaczmy przez S^i macierz jednokolumnową, której elementy S^i_α są uogólnionymi, liniowo niezależnymi siłami przekrojowymi, działającymi na oba końce i-tego pręta (rys. 1a) i określającymi w sposób jednoznaczny jego stan naprężenia przy założeniu, że na całej jego długości nie działają żadne obciążenia. Stan odkształ-



Rys. 1

cenia i-tego pręta można określić jednoznacznie również za pomocą jednokolumnowej macierzy s^i, której elementy s^i_α są uogólnionymi, liniowo niezależnymi przemieszczeniami, odpowiadającymi siłom S^i_α (rys. 1b). Stany naprężenia i odkształcenia układu złożonego z p prętów można w tej sytuacji opisać dwiema jednokolumnowymi quasi-macierzami S i s o elementach S^i i s^i $(i=1, 2, ..., p)$.

Wprowadźmy jeszcze oznaczenia R i r dla dwóch jednokolumnowych macierzy, których elementy R_β i r_β są odpowiadającymi sobie, uogólnionymi obciążeniami i przemieszczeniami wszystkich węzłów układu (rys. 2a i 2b), określającymi jednoznacznie jego stany obciążenia i przemieszczenia.



Rys. 2

Dowolny stan każdego układu prętowego, obciążonego węzłowo, można teraz opisać w sposób jednoznaczny za pomocą czterech jednokolumnowych macierzy S i s oraz R i r, określających odpowiednio stany naprężenia i odkształcenia oraz obciążenia i przemieszczenia układu. Jeżeli macierze te zostaną przyjęte zupełnie dowolnie i niezależnie od siebie, to na ogół będziemy mieć do czynienia z takim stanem, który jest równocześnie niedopuszczalny statycznie i kinematycznie.

Stan układu nazywać będziemy statycznie dopuszczalnym wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione będą warunki równowagi sił, tzn. gdy stany S i R spełniać będą tożsamościowo równanie

$$AS = R. \tag{2.1}$$

Podobnie, stanem kinematycznie dopuszczalnym układu nazwiemy taki jego stan, w którym spełnione będą warunki zgodności przemieszczeń, tzn. taki, w którym stany s i r spełniać będą tożsamościowo równanie

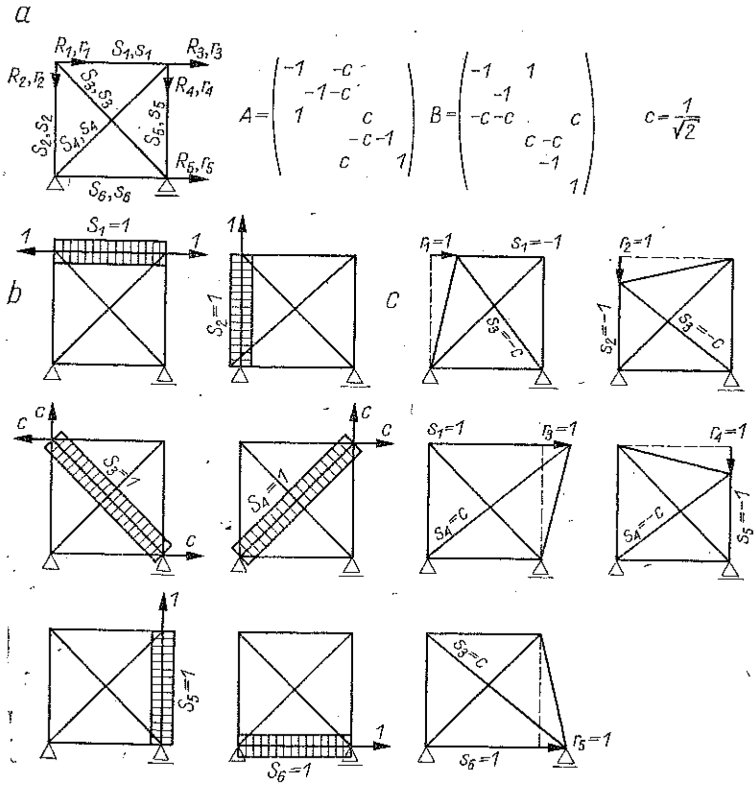
$$Br = s. \tag{2.2}$$

W dalszym ciągu stany statycznie dopuszczalne i niedopuszczalne oraz kinematycznie dopuszczalne i niedopuszczalne będziemy zapisywać w skrócie jako stany *SD* i *SND* oraz *KD* i *KND*.

Zgodnie z ich definicją elementy obydwu macierzy R i S (s i r) są siłami (przemieszczeniami), mimo to jednak macierz S (s) jest bezpośrednio związana ze stanem naprężenia (odkształcenia) układu. W interpretacji, którą będziemy się posługiwać, operuje się pojęciami wszystkich czterech stanów. W związku z tym dla uzyskania większej zwięzłości rozważań sformułowanie: «stan naprężenia (odkształcenia) układu określony siłami przekrojowymi S (przemieszczeniami s)» wygodnie jest zastępować sformułowaniem umownie skróconym: «stan naprężenia S (odkształcenia s)» lub nawet «naprężenie S (odkształcenie s)», co nie powinno prowadzić do żadnych nieporozumień.

Ponieważ równania (2.1) i (2.2) odgrywają zasadniczą rolę w dalszych rozważaniach, zajmiemy się teraz nimi bardziej szczegółowo.

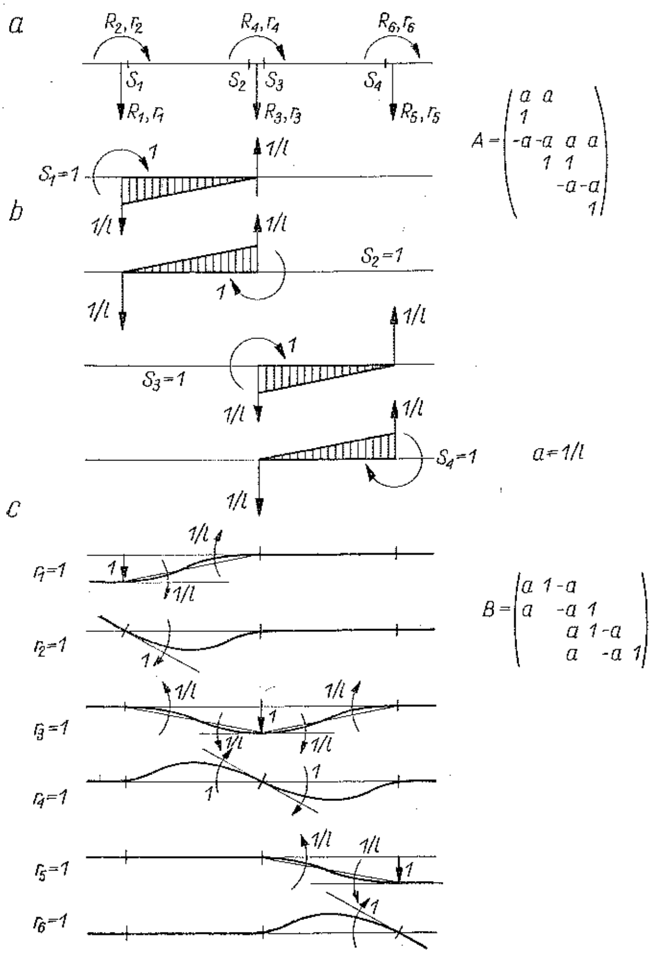
Wyobraźmy sobie taki stan naprężenia układu, który określony jest następująco: $S_\alpha=1$ dla $\alpha=j$, $S_\alpha=0$ dla $\alpha\neq j$ i nazwijmy go j-tym jednostkowym stanem naprężenia (rys. 3b i 4b). Stan taki można wywołać w rozważanym układzie takim obciążeniem R, które jest określone j-tą kolumną a_j macierzy A. Widzimy więc, że poszczególne kolumny tej macierzy można interpretować jako takie stany obciążenia, które wywołują w układzie odpowiednie jednostkowe stany naprężenia. Jednostkowy j-ty stan naprężenia wraz z odpowiadającym mu SD stanem obciążenia układu będziemy nazywać jego j-tym jednostkowym stanem SD.



Rys. 3

Rozważmy teraz taki stan przemieszczenia układu, który określony jest następująco: $r_\beta=1$ dla $\beta=k$, $r_\beta=0$ dla $\beta\neq k$ i nazwijmy go k-tym jednostkowym stanem przemieszczenia (rys. 3c i 4c). Stan ten wywołuje w rozważanym układzie taki stan odkształcenia s, który jest określony k-tą kolumną b_k macierzy B. Jak widać, poszczególne kolumny tej macierzy można więc interpretować jako takie stany odkształcenia, które wywołane są odpowiednimi jednostkowymi stanami przemieszczenia. Jednostkowy k-ty stan przemieszczenia wraz z odpowiadającym mu KD stanem odkształcenia układu będziemy nazywać jego k-tym jednostkowym stanem KD.

Jest rzeczą bardzo charakterystyczną, że posługując się powyższą interpretacją kolumn macierzy A (B) można macierz tę zbudować posługując się tylko i wyłącznie warunkami równowagi statycznej (zgodności kinematycznej).



Rys. 4

Ponieważ macierze A i B opisują odpowiednio statyczne i kinematyczne własności tego samego układu, można się więc spodziewać, że istnieje między nimi jakiś ogólny, ścisły związek. Dla ujawnienia tego związku możemy na przykład skorzystać z zasady przemieszczeń wirtualnych Lagrange'a i obliczyć pracę wirtualną sił R i S na KD przemieszczeniach r i s, tzn. spełniających tożsamość $Br \equiv s$:

$$r^T R - s^T S \equiv r^T R - r^T B^T S \equiv r^T (R - B^T S) = 0\,.$$

Wobec dowolności r otrzymujemy $B^T S = R$. Możemy jednak również skorzystać z zasady sił wirtualnych Castigliano i obliczyć dopełniającą pracę wirtualną, jaką na przemieszczeniach r i s wykonają SD siły R i S, tzn. spełniające tożsamość $AS\equiv R$:

$$R^T r - S^T s \equiv S^T A^T r - S^T s \equiv S^T (A^T r - s) = 0 .$$

Wobec dowolności S otrzymujemy $A^T r = s$.

W wyniku zastosowania zasad Lagrange'a i Castigliano otrzymaliśmy więc odpowiednio warunki równowagi sił: $B^T S = R$ i warunki zgodności przemieszczeń: $A^T r = s$. Z porównania otrzymanych wyników z równaniami (2.1) i (2.2) wynika, że poszukiwany związek pomiędzy macierzami A i B ma postać

$$B \equiv A^T, \tag{2.3}$$

dzięki czemu zamiast (2.1) i (2.2) możemy teraz napisać

$$AS = R, \quad A^T r = s. \tag{2.4}$$

Fakt, że w równaniach (2.4), określających odpowiednio SD stany S i R oraz KD stany r i s, występują macierze różniące się wzajemnie tylko transpozycją, świadczy o istnieniu pewnych zasadniczych związków pomiędzy strukturą rozważanego układu mechanicznego a strukturą związanej z nim macierzy A. Związki te muszą się przejawiać w dwu aspektach: statycznym i kinematycznym, odpowiadających dwom możliwościom potraktowania macierzy A: raz jako zbioru jej kolumn, a drugi raz — wierszy.

Z postaci równań (2.4) wynika, że algebraicznym odpowiednikiem czysto statycznego (kinematycznego) podejścia do zagadnienia jest przeprowadzanie rozważań i operacji tylko nad kolumnami (wierszami) macierzy A. Rozważania i operacje, w których biorą udział zarówno kolumny jak i wiersze tej samej macierzy A, odpowiadają takiemu podejściu, w którym występują równocześnie obydwa aspekty mechaniczne zagadnienia: statyczny i kinematyczny.

Zauważmy również, że rozwiązywanie równania $AS = R$ ($A^T r = s$) można interpretować w dwojaki sposób. Raz jako poszukiwanie współczynników S_α $\alpha = 1, 2, ..., n$ (r_β $\beta = 1, 2, ..., m$) kombinacji liniowej kolumn (wierszy) macierzy A, dającej w wyniku kolumnę R (s), drugi zaś raz jako poszukiwanie takiej macierzy S (r), która tworzy z kolejnymi wierszami (kolumnami) macierzy A iloczyny skalarne o odpowiednich wartościach liczbowych R_β $\beta = 1, 2, ..., m$ (s_α $\alpha = 1, 2, ..., n$). Pierwsza z tych interpretacji oddaje istotę statycznej (kinematycznej) dopuszczalności stanów S i R (r i s), druga natomiast wyraża zasadę przemieszczeń (sił) wirtualnych Lagrange'a (Castigliano).

3. Istnienie i jednoznaczność stanów SD i KD

Ogólną dyskusję istnienia i jednoznaczności stanów SD i KD można, zgodnie z ich określeniem, sprowadzić do dyskusji odpowiednich układów równań liniowych $AS = R$ i $A^T r = s$. Z tego też powodu za podstawę dalszych rozważań przyjmiemy następujące ogólne twierdzenie algebry liniowej [19].

TWIERDZENIE. *Niech będzie dany układ m równań liniowych $Qx=p$ z n niewiadomymi; istnieją trzy możliwości wykluczające się wzajemnie, z których jedna zawsze zachodzi (stanowią one więc warunki konieczne i wystarczające):*

1) $$rz(Q)=rz(Q,p)=n$$

układ ma dokładnie jedno rozwiązanie,

2) $$rz(Q)=rz(Q,p)=k<n$$

układ ma nieskończenie wiele rozwiązań,

3) $$rz(Q)<rz(Q,p)$$

układ jest sprzeczny.

W sformułowaniu tym oznaczono przez $rz(Q)$ rząd macierzy Q, a przez $rz(Q,p)$ rząd macierzy uzupełnionej przez dołączenie kolumny wyrazów wolnych p.

Przechodząc do analizy układu równań $AS=R$ ($A^T r=s$) możemy teraz ogólnie stwierdzić, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby dla danego obciążenia R (odkształcenia s) w danym układzie mechanicznym mógł wystąpić stan SD (KD), jest warunek, aby $rz(A)=rz(A,R)$ ($rz(A^T)=rz(A^T,s)$). Warunek ten oznacza, że SD (KD) są tylko takie stany obciążenia R (odkształcenia s), które mogą być przedstawione w postaci kombinacji liniowej kolumn macierzy A (A^T). Współczynnikami tej kombinacji są odpowiednie elementy macierzy S (r).

Układy równań $AS=R$ i $A^T r=s$ nie są od siebie niezależne ze względu na ich wzajemne powiązania przez macierze A i A^T. Bezpośrednią konsekwencją tych powiązań są pewne relacje natury ogólnej, zachodzące pomiędzy stanami SD i KD tego samego układu mechanicznego, będące przejawem jego określonych własności strukturalnych i nie mające żadnego związku z jego własnościami fizycznymi.

W zależności od typu macierzy A, głównie zaś jej struktury, wyróżnić można cztery charakterystyczne przypadki zestawione w tablicy 1; ich szczegółowym omówieniem zajmiemy się teraz.

3.1. *Przypadek* 1

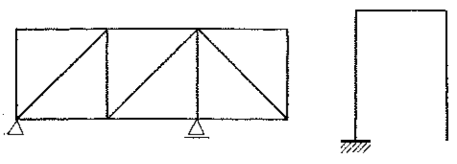
Jeżeli dla każdego dowolnego R spełniony jest warunek $rz(A)=rz(A,R)=n$, to wówczas A jest kwadratową nieosobliwą macierzą typu $n\times n$, przy czym mamy również $rz(A^T)=rz(A^T,s)=n$ dla każdego dowolnego s. Macierz A składa się wyłącznie z liniowo niezależnych kolumn i wierszy, co uwidocznimy i podkreślimy w zapisie wprowadzając dla niej nowe oznaczenie A_{00}, a dla macierzy poszczególnych stanów odpowiednie oznaczenia S_0, R_0, r_0 i s_0. Zamiast układów równań (2.4) otrzymujemy więc układy

$$A_{00}S_0=R_0\,,\qquad A_{00}^T r_0=s_0\,. \tag{3.1}$$

Dzięki nieosobliwości macierzy A_{00} i A_{00}^T układy równań (3.1) określają w sposób jednoznaczny odpowiednie stany SD naprężeń i KD przemieszczeń

$$S_0=A_{00}^{-1}R_0\,,\qquad r_0=(A_{00}^{-1})^T s_0\,, \tag{3.2}$$

wywołane dowolnymi obciążeniami R_0 i odkształceniami s_0. Jest rzeczą charakterystyczną, że w układach prętowych, których stany *SD* i *KD* opisywane są układami równań (3.1), zerowym stanom obciążeń R_0 i odkształceń s_0 odpowiadają tylko zerowe stany naprężeń S_0 i przemieszczeń r_0. Wynika to bezpośrednio z (3.2). Układy o takich własnościach będziemy nazywać podstawowymi układami wyznaczalnymi (rys. 5).



Rys. 5

3.2. *Przypadek* 2

W przypadku, gdy dla każdego dowolnego R zachodzi warunek $rz(A) = rz(A, R) = m < n$, A jest prostokątną macierzą typu $m \times n$, przy czym nie dla każdego s mamy $rz(A^T) = rz(A^T, s) = m < n$. Wszystkie wiersze macierzy A są liniowo niezależne, natomiast spośród jej n kolumn można wybrać co najmniej w jeden sposób, ale tylko co najwyżej m liniowo niezależnych. Załóżmy, że dokonaliśmy tego wyboru w pewien określony sposób i oznaczmy przez A_{00} blok utworzony z wybranych kolumn, które w dalszym ciągu będziemy nazywać bazowymi. Jeżeli wprowadzimy jeszcze oznaczenie A_{0*} dla bloku utworzonego z tych kolumn macierzy A, które nie należą do A_{00}, a więc nie są bazowymi, to po odpowiedniej zmianie numeracji elementów macierzy występujących w (2.4) będziemy mogli napisać

$$(A_{00}\ A_{0*})\begin{bmatrix} S_0 \\ S_* \end{bmatrix} = R_0\,, \qquad \begin{bmatrix} A_{00}^T \\ A_{0*}^T \end{bmatrix} r_0 = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_* \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

gdzie $\begin{bmatrix} S_0 \\ S_* \end{bmatrix} = S$, $\begin{bmatrix} s_0 \\ s_* \end{bmatrix} = s$, przy czym mechaniczny sens macierzy S_0, S_*, s_0 i s_* wynika z dalszych rozważań.

Wykorzystując nieosobliwość macierzy A_{00} i A_{00}^T możemy z (3.3) obliczyć

$$S_0 = A_{00}^{-1}(R_0 - A_{0*}S_*)\,, \qquad r_0 = (A_{00}^{-1})^T s_0\,, \qquad s_* = A_{0*}^T r_0 = (A_{00}^{-1}A_{0*})^T s_0\,. \tag{3.4}$$

Jak wynika z $(3.4)_1$, stan naprężenia S nie jest tym razem określony jednoznacznie dla danego obciążenia R_0. Dzieje się tak dlatego, że dla $R_0 = 0$ układ równań $(3.3)_1$ ma niezerowe rozwiązanie

$$S_0 = -A_{00}^{-1}A_{0*}S_*\,, \tag{3.5}$$

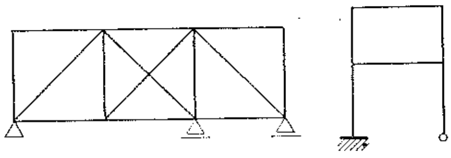
co oznacza, że w układach prętowych, których stany *SD* są określone układem równań $(3.3)_1$, możliwe jest występowanie niezerowych stanów naprężeń,

$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{00}^{-1}A_{0*} \\ E \end{bmatrix} S_*, \tag{3.6}$$

przy zerowych obciążeniach $R_0 = 0$. Układy o tej własności będziemy nazywać układami przesztywnionymi (rys. 6).

Ponieważ (3.5) określa macierz S_0 jako liniową funkcję macierzy S_* o $n-m$ dowolnych elementach, zatem mamy tu do czynienia z układem $n-m$ krotnie przesztywnionym, w którym może wystąpić $n-m$ liniowo niezależnych, bezobciążeniowych stanów naprężeń.

Podział sił przekrojowych na dwie grupy, oznaczone przez S_0 i S_*, jest konsekwencją wyboru bazowych kolumn macierzy A. Wybór ten jest równoznaczny z wyborem pewnego podstawowego układu wyznaczalnego, którego stan naprężenia określony jest jednoznacznie przez S_0. Możemy sobie wyobrazić, że układ ten powstaje z danego układu przesztywnionego przez usunięcie odpowiednich $n-m$ nadliczbowych prętów. Dowolność wyboru kolumn bazowych wiąże się więc z dowolnością wyboru podstawowego układu wyznaczalnego, przy czym rolę parametrów swobodnych S_* odgrywają siły przekrojowe w prętach przesztywniających układ.



Rys. 6

Fakt, że w rozważanym przypadku warunek $rz(A^T)=rz(A^T, s)=m<n$ nie może być spełniony dla każdego dowolnego s, lecz tylko dla takiego, że

$$s=\begin{bmatrix} s_0 \\ s_* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E \\ A_{0*}^T(A_{00}^{-1})^T \end{bmatrix} s_0, \tag{3.7}$$

wynika wprost ze związku $(3.4)_3$ określającego zależność s_* od s_0, warunkującą istnienie stanu KD.

Zarówno przemieszczenia węzłów r_0 wybranego podstawowego układu wyznaczalnego, jak również odkształcenia s_* prętów przesztywniających, określone odpowiednio przez $(3.4)_2$ i $(3.4)_3$, są liniowymi funkcjami dowolnych odkształceń s_0 prętów tego układu. Podział odkształceń na s_0 i s_* jest konsekwencją podziału sił przekrojowych na S_0 i S_*. Warto zauważyć, że odpowiadające sobie zmienne, a więc S_0 i s_0 oraz S_* i s_*, spełniają przeciwne role: S_0 i s_* są zmiennymi zależnymi, podczas gdy S_* i s_0 są zmiennymi niezależnymi, co bezpośrednio wynika z (3.4). W efekcie w zagadnieniu statycznym (kinematycznym) mamy tyle zmiennych niezależnych R_0 i S_* (s_0), ile zmiennych zależnych r_0 i s_* (S_0) występuje w zagadnieniu kinematycznym (statycznym).

3.3. *Przypadek* 3

Jeżeli dla każdego dowolnego s spełniony jest warunek $rz(A^T)=rz(A^T, s)=$ $=n<m$, to A jest prostokątną macierzą typu $m\times n$, przy czym nie dla każdego R mamy $rz(A)=rz(A, R)=n<m$. Wszystkie kolumny macierzy A są liniowo niezależne, natomiast spośród jej m wierszy można wybrać co najmniej w jeden sposób, ale tylko co najwyżej n takich, które są liniowo niezależne. Załóżmy, że dokonaliśmy tego wyboru w pewien określony sposób i oznaczmy przez A_{00} blok utworzony z wybranych wierszy, które w dalszym ciągu będziemy nazywać bazowymi. Jeżeli wprowadzimy jeszcze oznaczenie A_{*0} dla bloku utworzonego z tych wierszy ma-

cierzy A, które nie należą do A_{00}, a więc nie są bazowymi, to po odpowiedniej zmianie numeracji elementów macierzy występujących w (2.4) będziemy mogli napisać

$$(3.8)\qquad \begin{bmatrix} A_{00} \\ A_{*0} \end{bmatrix} S_0 = \begin{bmatrix} R_0 \\ R_* \end{bmatrix}, \qquad (A_{00}^T \;\; A_{*0}^T) \begin{bmatrix} r_0 \\ r_* \end{bmatrix} = s_0 ,$$

gdzie $\begin{bmatrix} R_0 \\ R_* \end{bmatrix} = R$, $\begin{bmatrix} r_0 \\ r_* \end{bmatrix} = r$, przy czym mechaniczny sens macierzy R_0, R_*, r_0 i r_* wynika z dalszych rozważań.

Wykorzystując nieosobliwość macierzy A_{00} i A_{00}^T możemy z (3.8) obliczyć

$$(3.9)\qquad S_0 = A_{00}^{-1} R_0 , \qquad R_* = A_{*0} S_0 = A_{*0} A_{00}^{-1} R_0 , \qquad r_0 = (A_{00}^{-1})^T (s_0 - A_{*0}^T r_*) .$$

Jak wynika z $(3.9)_3$, stan przemieszczenia r nie jest określony jednoznacznie dla danego odkształcenia s_0. Dzieje się tak dlatego, że dla $s_0 = 0$ układ równań $(3.8)_2$ ma niezerowe rozwiązanie

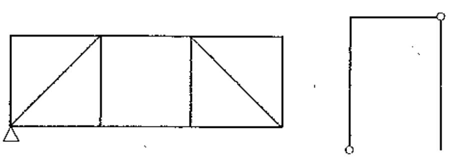
$$(3.10)\qquad r_0 = -(A_{*0} A_{00}^{-1})^T r_* ,$$

co oznacza, że w układach prętowych, których stany KD określone są układem równań $(3.8)_2$, możliwe jest występowanie niezerowych stanów przemieszczeń:

$$(3.11)\qquad r = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(A_{*0} A_{00}^{-1})^T \\ E \end{bmatrix} r_*$$

przy zerowych odkształceniach $s_0 = 0$. Układy o tej własności będziemy nazywać układami niedosztywnionymi (rys. 7).

Ponieważ (3.10) określa macierz r_0 jako liniową funkcję macierzy r_* o $m-n$ dowolnych elementach, przeto mamy tu do czynienia z układem $m-n$ krotnie niedosztywnionym, w którym może wystąpić $m-n$ liniowo niezależnych, bezodkształceniowych stanów przemieszczeń.



Rys. 7

Podział przemieszczeń węzłowych na dwie grupy oznaczone przez r_0 i r_* jest konsekwencją wyboru bazowych wierszy macierzy A. Wybór ten jest równoznaczny z wyborem pewnego podstawowego układu wyznaczalnego, którego stan przemieszczenia określony jest jednoznacznie przez r_0. Możemy sobie wyobrazić, że układ ten powstaje z danego układu niedosztywnionego przez wprowadzenie odpowiednich $m-n$ dodatkowych więzów, zapewniających kinematyczną niezmienność układu. Dowolność wyboru wierszy bazowych wiąże się więc z dowolnością wyboru podstawowego układu wyznaczalnego, przy czym rolę parametrów swobodnych r_* odgrywają przemieszczenia odpowiadające dodatkowo wprowadzonym więzom.

Fakt, że w rozważanym przypadku warunek $rz(A) = rz(A, R) = n < m$ nie może być spełniony dla każdego dowolnego R, lecz tylko dla takiego, że

$$(3.12)\qquad R = \begin{bmatrix} R_0 \\ R_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ A_{*0} A_{00}^{-1} \end{bmatrix} R_0 ,$$

wynika wprost ze wzoru $(3.9)_2$ określającego zależność R_* od R_0, warunkującą istnienie stanu SD.

Zarówno siły przekrojowe S_0 w wybranym podstawowym układzie wyznaczalnym, jak również obciążenia R_* jego węzłów, będące reakcjami dodatkowo wprowadzonych więzów a określone odpowiednio przez $(3.9)_1$ i $(3.9)_2$, są liniowymi funkcjami dowolnych obciążeń R_0 węzłów tego układu. Podział obciążeń na R_0 i R_* jest konsekwencją podziału przemieszczeń węzłowych na r_0 i r_*. Warto zauważyć, że odpowiadające sobie zmienne, a więc r_0 i R_0 oraz r_* i R_*, spełniają przeciwne role: r_0 i R_* są zmiennymi zależnymi, podczas gdy r_* i R_0 są zmiennymi niezależnymi, co bezpośrednio wynika z (3.9). W efekcie w zagadnieniu statycznym (kinematycznym) mamy tyle zmiennych niezależnych R_0 (s_0 i r_*), ile zmiennych zależnych r_0 (S_0 i R_*) występuje w zagadnieniu kinematycznym (statycznym).

Podsumowując rozważania nad przypadkami 2 i 3 należy zauważyć, że celowo posłużono się w nich analogicznymi sformułowaniami dla podkreślenia dwoistości występujących w nich pojęć i wielkości.

3.4. *Przypadek* 4

Rozważymy teraz przypadek, w którym macierz A jest typu $m \times n$, a jej rząd $rz(A) = k < \min(m, n)$, przy czym może być $m \lesseqgtr n$. Tym razem żaden z warunków $rz(A) = rz(A, R) = k$ i $rz(A^T) = rz(A^T, s) = k$, nie może być spełniony dla zupełnie dowolnie przyjętych R i s. Ponieważ $rz(A) = k < \min(m, n)$, przeto z macierzy A można wybrać co najmniej w jeden sposób, ale tylko co najwyżej k liniowo niezależnych kolumn i tyle samo wierszy. Załóżmy znowu, że dokonaliśmy tego wyboru w pewien określony sposób i oznaczmy przez A_0 i B_0^T odpowiednie macierze utworzone z wybranych kolumn i wierszy, które w dalszym ciągu będziemy nazywać bazowymi. Jeżeli wprowadzimy jeszcze oznaczenia A_* i B_*^T dla macierzy utworzonych z tych kolumn i wierszy macierzy A, które nie należą do A_0 i B_0^T, a więc nie są bazowymi, to po odpowiedniej zmianie numeracji elementów macierzy występujących w (2.4) będziemy mogli napisać

$$(A_0 \; A_*) S = R, \qquad (B_0 \; B_*) r = s. \tag{3.13}$$

Z określenia macierzy A_* i B_* wynika, że są one utworzone z tych kolumn macierzy A i A^T, które są liniowo zależne od kolumn bazowych tworzących macierze A_0 i B_0.

Wyróżnienie bazowych kolumn i wierszy macierzy A pociąga za sobą istotne konsekwencje. Ze względu bowiem na związek (2.3) wprowadzony podział kolumn i wierszy macierzy A jest równoznaczny z podziałem tej macierzy na odpowiednie cztery bloki, dzięki czemu zamiast (3.13) otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{0*} \\ A_{*0} & A_{**} \end{bmatrix} S = R, \qquad \begin{bmatrix} A_{00}^T & A_{*0}^T \\ A_{0*}^T & A_{**}^T \end{bmatrix} r = s, \tag{3.14}$$

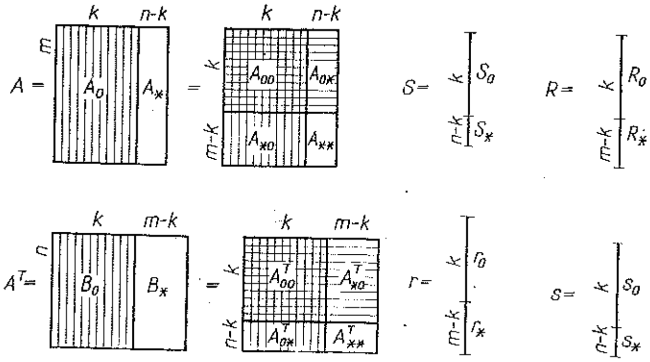
gdzie

$$\begin{bmatrix} A_{00} \\ A_{*0} \end{bmatrix} = A_0, \qquad \begin{bmatrix} A_{0*} \\ A_{**} \end{bmatrix} = A_*, \qquad \begin{bmatrix} A_{00}^T \\ A_{0*}^T \end{bmatrix} = B_0, \qquad \begin{bmatrix} A_{*0}^T \\ A_{**}^T \end{bmatrix} = B_*.$$

Zauważmy jednak, że już z samego zapisu równań (3.14) bezpośrednio wynika potrzeba wprowadzenia odpowiedniego podziału macierzy S, r, R i s na części bazowe S_0, r_0, R_0 i s_0 oraz niebazowe S_*, r_*, R_* i s_*. Podział ten pozwala nam zapisać równania (2.4) w najogólniejszej postaci blokowej:

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{0*} \\ A_{*0} & A_{**} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 \\ R_* \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} A_{00}^T & A_{*0}^T \\ A_{0*}^T & A_{**}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_* \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Macierz A_{00} jest kwadratową nieosobliwą macierzą rzędu $k<\min(m, n)$, utworzoną z elementów macierzy A leżących na przecięciu się wybranych z niej k liniowo niezależnych kolumn i wierszy. Przypadek ten ilustruje rys. 8, na którym pokazano liczbę kolumn i wierszy w poszczególnych blokach występujących w równaniach (3.15).



Rys. 8

Wykorzystując tak samo jak w przypadkach poprzednich nieosobliwość macierzy A_{00} i A_{00}^T, możemy z równań (3.15) obliczyć

$$\begin{aligned} S_0 &= A_{00}^{-1}(R_0 - A_{0*}S_*), \qquad & R_* &= A_{*0}A_{00}^{-1}R_0, \\ r_0 &= (A_{00}^{-1})^T(s_0 - A_{*0}^T r_*), \qquad & s_* &= (A_{00}^{-1}A_{0*})^T s_0, \end{aligned} \tag{3.16}$$

przy czym dodatkowo stwierdzamy, że

$$A_{**} - A_{*0}A_{00}^{-1}A_{0*} = (A_{**} - A_{*0}A_{00}^{-1}A_{0*})^T = 0.$$

Wzory (3.16) można przedstawić w sposób bardziej zwarty:

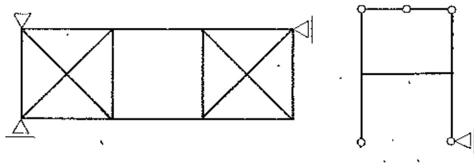
$$\begin{bmatrix} S_0 \\ R_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{00} & -H_{0*} \\ H_{*0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 \\ S_* \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} r_0 \\ s_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{00}^T & -H_{*0}^T \\ H_{0*}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ r_* \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

po wprowadzeniu oznaczeń

$$H_{00} = A_{00}^{-1}, \qquad H_{0*} = A_{00}^{-1}A_{0*}, \qquad H_{*0} = A_{*0}A_{00}^{-1}. \tag{3.18}$$

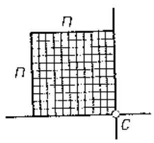
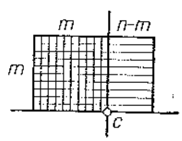
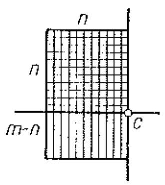
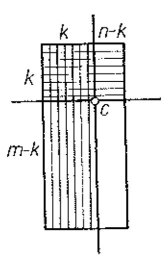
Stany naprężenia S i przemieszczenia r w rozważanym przypadku nie są określone jednoznacznie dla danych stanów obciążenia R_0 i odkształcenia s_0, bowiem z $(3.16)_1$

i $(3.16)_3$ dla $R_0 = s_0 = 0$ otrzymujemy te same zależności (3.5) i (3.10), które charakteryzowały omawiane poprzednio przypadki układów przesztywnionych i niedosztywnionych. Oznacza to, że w układach prętowych, których stany *SD* i *KD* określane są układami równań (3.15), możliwe jest równoczesne występowanie niezerowych stanów naprężeń (3.6) i niezerowych stanów przemieszczeń (3.11) przy zerowych obciążeniach i odkształceniach $R_0 = s_0 = 0$. Układy takie są więc równocześnie $n-k$ krotnie przesztywnione i $m-k$ krotnie niedosztywnione (rys. 9).



Rys. 9

Tablica 1

	Typ macierzy A	*SD* i *KD* wyrazy wolne: R	*SD* i *KD* wyrazy wolne: s	Rozwiązanie: S_0	Rozwiązanie: r_0	Typ układu
1		dowolne	dowolne	jednoznaczne wg $(3.2)_1$	jednoznaczne wg $(3.2)_2$	podstawowy wyznaczalny (rys. 5)
2		dowolne	tylko wg (3.7)	wieloznaczne ze wzgl. na S_* wg $(3.4)_1$	jednoznaczne wg $(3.4)_2$	przesztywniony $n-m$ krotnie (rys. 6)
3		tylko wg (3.12)	dowolne	jednoznaczne wg $(3.9)_1$	wieloznaczne ze wzgl. na r_* wg $(3.9)_3$	niedosztywniony $m-n$ krotnie (rys. 7)
4		tylko wg $(3.19)_1$	tylko wg $(3.19)_2$	wieloznaczne ze wzgl. na S_* wg $(3.16)_1$	wieloznaczne ze wzgl. na r_* wg $(3.16)_3$	przesztywniony $m-k$ krotnie i niedosztywniony $n-k$ krotnie (rys. 9)

Fakt, że w rozważanym przypadku warunki $rz(A)=rz(A, R)=k$ i $rz(A^T)=$ $=rz(A^T, s)=k$ nie mogą być spełnione dla dowolnych R i s, tylko dla takich, że

$$R=\begin{bmatrix} R_0 \\ R_* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E \\ H_{*0} \end{bmatrix} R_0, \quad s=\begin{bmatrix} s_0 \\ s_* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E \\ H_{0*}^T \end{bmatrix} s_0, \tag{3.19}$$

wynika wprost ze wzorów $(3.16)_2$ i $(3.16)_4$, warunkujących istnienie stanów *SD* i *KD*.

Rozwiązaniami układów równań (3.14) o kolumnach wyrazów wolnych (3.19) są macierze

$$S=\begin{bmatrix} S_0 \\ S_* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H_{00} & -H_{0*} \\ 0 & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_0 \\ S_* \end{bmatrix}, \quad r=\begin{bmatrix} r_0 \\ r_* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H_{00}^T & -H_{*0}^T \\ 0 & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_0 \\ r_* \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Jak łatwo sprawdzić, macierze S i R (r i s), określone powyższymi wzorami przy dowolnych R_0 i S_* (s_0 i r_*), spełniają tożsamościowo równanie $AS=R$ ($A^T r=s$). Oznacza to, że macierze S i R (r i s) opisują *SD* (*KD*) stan rozważanego układu prętowego.

Z postaci wzorów (3.17) wynika, że przy statycznym (kinematycznym) podejściu do zagadnienia rolę zmiennych niezależnych odgrywają R_0 i S_* (s_0 i r_*), rolę zaś zmiennych zależnych — S_0 i R_* (r_0 i s_*). Podział zmiennych na zależne i niezależne wiąże się z wyborem k liniowo niezależnych kolumn i wierszy macierzy A i dlatego na ogół może być dokonany na różne sposoby.

Oprócz podziału zmiennych na zależne i niezależne można wprowadzić również jeszcze inny, bardzo istotny podział tych zmiennych, mianowicie na takie, które odgrywają analogiczne role w statycznym i kinematycznym sformułowaniu problemu, a które w naszych rozważaniach są wzajemnie zupełnie od siebie niezależne. Zmienne takie nazywać będziemy zmiennymi wzajemnie dualnymi. Jak to najwyraźniej wynika z (3.15) zmiennymi tymi są: S_0 i r_0, S_* i r_*, R_0 i s_0 oraz R_* i s_* lub ogólnie S i r oraz R i s.

4. Zakończenie

We wszystkich dotychczas przeprowadzanych rozważaniach zajmowaliśmy się wyłącznie statycznymi lub kinematycznymi aspektami analizy układów prętowych, nie wymagającymi żadnych założeń o fizycznych własnościach tych układów. Na zakończenie jednak wypada wspomnieć, w jakim stosunku pozostają tego rodzaju rozważania do celu, jaki stanowi obliczanie układów o konkretnych własnościach fizycznych.

Ograniczanie się wyłącznie do statycznych lub kinematycznych aspektów zagadnienia ma na celu określenie dwu zbiorów stanów badanego układu, mianowicie zbioru stanów *SD* i *KD*. Wspólne elementy tych zbiorów odpowiadają rzeczywistym stanom układu, przy czym w zależności od jego własności fizycznych oraz od wartości działających obciążeń zbiór elementów wspólnych może być jedno lub wieloelementowy, co wiąże się z jedno lub wieloznacznością rozwiązania problemu. Poszukiwanie stanów rzeczywistych wymaga uwzględnienia fizycznych własności układu i sprowadza się do poszukiwania ekstremów odpowiedniego funkcjonału energetycznego w odpowiednim zbiorze stanów dopuszczalnych [15]. Dlatego też rozważania prowadzone na gruncie wyłącznie statycznym lub kinematycznym stanowią podstawę metod wariacyjnych i optymalizacyjnych.

Przedstawione w pracy dwoiste ujęcie podstaw analizy układów prętowych opiera się na spostrzeżeniu, że stan statyczny dowolnego układu może być rozważany zupełnie niezależnie od jego stanu kinematycznego. Takie rozdwojenie stanów tego samego układu stwarza dogodną podstawę dla właściwej interpretacji metod stosowanych nie tylko w analizie, ale również i syntezie układów optymalnych. Powoduje ono w konsekwencji, że statyczno-kinematyczny problem obliczenia układu zostaje rozdwojony na podproblemy, z których każdy dotyczy innego aspektu tego samego zagadnienia. Tym dwom różnym aspektom odpowiadają dwa podejścia wariacyjne: Castigliano i Lagrange'a będące przejawami dwoistości tej samej transformacji Legendre'a. Pierwsze (drugie) z tych podejść polega na poszukiwaniu takich stanów SD (*KD*), którym odpowiada spełnienie warunków zgodności przemieszczeń (równowagi sił). Warto również podkreślić, że niezależne operowanie dwoma rodzajami stanów tego samego układu zezwala na posługiwanie się jego stanami niedopuszczalnymi, których pojawianie się w rozważaniach nad rzeczywistym stanem układu jest typowe dla zagadnień wariacyjnych [19].

W pracy poruszono tylko podstawowe aspekty dualne analizy układów prętowych, stanowiące punkt wyjścia do dalszych rozważań. Omówienie problemów wzmiankowanych powyżej wykracza poza ramy niniejszej pracy i będzie tematem oddzielnego opracowania.

Literatura cytowana w tekście

1. P. Funk, *Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik*, Springer-Verlag, Berlin 1962.
2. А. И. Лурье, *Аналитическая механика*, Физматгиз, Москва 1961.
3. С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева, *Линейное в выпуклое протраммирование*, Изг. Наука, Москва 1967.
4. M. J. Sewell, *On dual approximation principles and optimization in continuum mechanics*, Phil. Trans. of the Royal Society of London, Series (A), Math. Phys. Sci., 1162, **265**, 319–351, 1969.
5. W. R. Spillers, *Network analogy for the truss problem*, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, **EM6**, 33–40, 1962.
6. W. R. Spillers, *Network analogy for linear structures*, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, **EM4**, 21–29, 1963.
7. W. R. Spillers, *Applications of topology in structural analysis*, J. Struct. Div., Proc. ASCE, **ST4**, 301–313, 1963.
8. W. R. Spillers, *Graph theory, switching theory and structural design*, AMR, **24**, 5, 1971.

9. N. C. Lind, *Analysis of structures by system theory*, J. Struct. Div., Proc. ASCE, **ST2**, 1–22, 1962.
10. S. J. Fenves, F. H. Branin, *Network-topological formulation of structural analysis*, J. Struct. Div., Proc. ASCE, **ST4**, 483–514, 1963.
11. S. P. Mauch, S. J. Fenves, *Releases and constraints in structural networks*, J. Struct. Div., Proc. ASCE, **ST5**, 401–417, 1967.
12. А. А. Чирас, *Методы линейного программирования при расчете упруго-пластических систем*, Стройиздат, Ленинград 1969.
13. А. А. Чирас, *Теория оптимизации в предельном анализе твердого деформируемого тела*, Изг. „Минтис", Вильнюс 1971.
14. А. П. Филин, *Матрицы в статике стержневых систем*, Стройиздат, Ленинград 1966.
15. B. Olszowski, *Obliczanie konstrukcji niewyznaczalnych metodą programowania dynamicznego*, Arch. Inż. Ląd., **17**, 2, 285–313, 1971.
16. J. H. Argyris, *Recent advances in matrix methods of structural analysis*, Pergamon Press, Oxford 1964.
17. S. Răutu, *Considerations on the analysis of statically indeterminate structures*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **12**, 6, 1317–1331, 1967.
18. M. Simonnard, *Programmation linéaire*, Dunod, Paris 1962.
19. C. Lanczos, *The variational principles of mechanics*, University of Toronto Press, Toronto 1962.

Резюме

ДУАЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ АНАЛИЗА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В работе обсуждены те основные аспекты анализа, которые могут быть рассмотрены в полном отрыве от физических свойств исследуемой системы. Итак, ограничиваемся исключительно чисто статическими и кинематическими аспектами, независящими друг от друга и приводящими к выделению двух качественно разных, но взаимно дополняющихся статических и кинематических состояний этой же самой системы. Определение и выделение статически и кинематически допустимых состояний позволило сформулировать и проанализировать проблемы существования и однозначности этих состояний, опираясь на известные теоремы линейной алгебры. При этом предполагалось, что обсуждаемые системы кинематически линейны и нагружены сосредоточенными силами, действующими в узлах.

Благодаря введению понятий единичных статически и кинематически допустимых состояний определены взаимные соотношения между структурой исследуемой системы и структурой связанной с ней матрицы, которая выступает в уравнениях равновесия сил и совместности перемещений. Среди переменных, определяющих статическое и кинематическое состояния исследуемой системы, установлены взаимные соотношения, связанные с ролями, какие эти переменные играют в данной проблеме. Самым важным из этих соотношений является дуальное соотношение между переменными, которые играют аналогичные роли в статическом и кинематическом подходах к этой самой проблеме.

Из-за двойственности отвечающих друг другу понятий и механичасских величин рассуждения проведены параллельно для обоих аспектов проблемы, что позволило дополнительно подчеркнуть взаимные дуальные соотношения.

Summary

DUAL ASPECTS OF THE ANALYSIS OF ROD SYSTEMS

In the paper presented are these fundamental aspects of analysis which may be considered independently of the actual physical properties of the system considered. The discussion is thus confined to exclusively static and kinematic aspects which are independent and lead to two qualitatively different states (though complementing each other) of the same system. Determination of the statically and kinematically admissible states enables to formulate and analyze the problems of existence and uniqueness of those states by means of the known theorems of linear algebra. The systems were considered to be kinematically linear and loaded by forces applied to the nodes.

Using the suitably introduced notions of statically and kinematically admissible states, determined are the mutual relations between the structure of the system considered and the structure of the corresponding matrix which appears in the equations of equilibrium and displacement compatibility. Mutual correspondence of the variables determining the statical and kinematical states is established, according to the role they play in the problem. The crucial one is the correspondence occuring between the variables which play analogous roles in the static and kinematic approaches to the same problem.

In view of the dual character of corresponding notions and mechanical quantities, parallel lines of reasoning are presented which make it possible to stress their mutual, dual character.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 sierpnia 1972 r.