

WYBOCZENIE PŁYTOWE RUSZTÓW SIATKOWYCH

JAN LEWIŃSKI (WARSZAWA)

Przedmiotem pracy jest teoria n -tego przybliżenia wybożenia płytowego dowolnych rusztów siatkowych. Stanowi ona rozwinięcie teorii pierwszego przybliżenia podanej w pracy [2] przez H. FRĄCKIEWICZA. Pozwala ona rozwiązać problem wybożenia rusztów z dowolną dokładnością. W pracy omówiony jest matematyczny model rusztu, będący podstawą tej teorii. Model ten pozwala opisać zagadnienie wybożenia za pomocą stosunkowo prostych równań algebraicznych. Praca ilustrowana jest przykładami rusztów biegunowych, dla których określono siły krytyczne oraz postacie wybożenia.

1. WSTĘP

Przedmiotem pracy jest ogólna przybliżona teoria n -tego przybliżenia wybożenia płytowego rusztów siatkowych. Praca stanowi kontynuację pracy [2] H. FRĄCKIEWICZA, w której omówiono teorię tzw. pierwszego przybliżenia wybożenia płytowego rusztów. Teoria n -tego przybliżenia pozwala określić z dowolną dokładnością obciążenie krytyczne rusztów i stanowi kryterium stosowania teorii przybliżenia pierwszego.

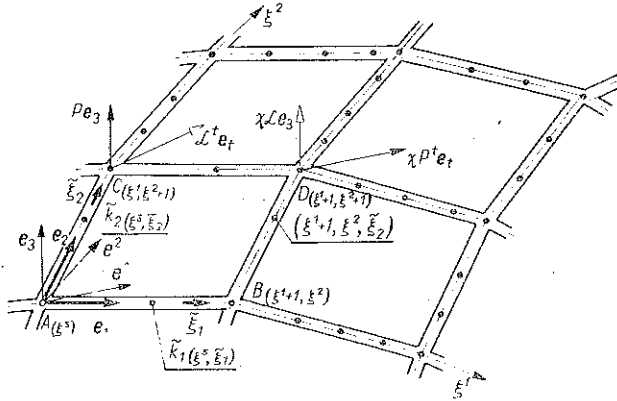
W pracy przedstawia się matematyczny model rusztu, będący podstawą wspomnianej teorii wybożenia. Model ten pozwala opisać zagadnienie wybożenia rusztów siatkowych za pomocą układu liniowych równań algebraicznych. Podstawą tych równań są równania statycznego zginania płyty siatkowej, obciążonej zarówno w węzłach jak i między węzłami. Równania takie zostały szczegółowo opisane w pracach [3 i 4]. W dalszej kolejności w pracy omówiony zostanie sposób określania obciążenia płytowego, będącego pewną pochodną tarczowego stanu napięcia rusztu oraz stanu przemieszczenia, wywołującego jego wygięcie, oraz przedstawione zostaną równania wybożeniowe rusztu wraz z omówieniem sposobu ich rozwiązywania.

Praca zakończona jest przykładem szczególnym rusztu biegunowego obciążonego równomiernie na brzegu zewnętrznym.

2. PODSTAWY ZAGADNIENIA

Podstawą rozważań jest ruszt siatkowy, będący płaską siatką sprężystą zbudowaną z prostych prętów w węzłach połączonych ze sobą po cztery (rys. 1). Geometria takiej siatki opisana została między innymi w pracy [1]. Zgodnie z tym opisem, do siatki wprowadza się krzywoliniowy układ współrzędnych ξ^s ($s=1, 2$) oraz lokalną bazę wektorową e_t, e_s, e^r ($t, r=1, 2$). Geometria siatki określona jest składowymi obiektu podstawowego g_{st} oraz odpowiadającymi im współczynnikami

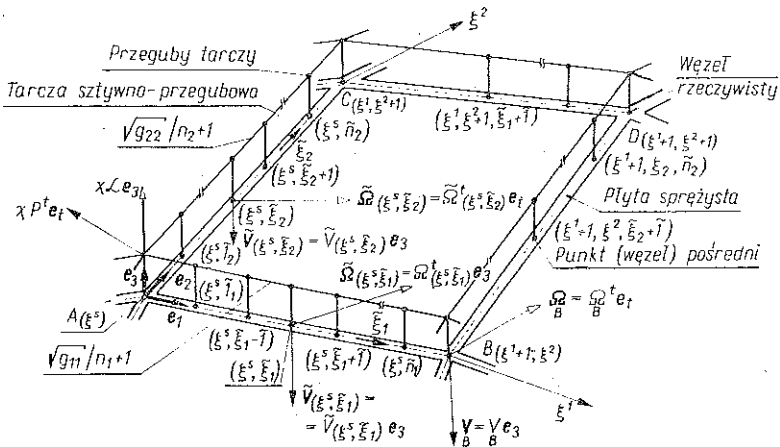
konekcji Γ_{st}^r . W zależności od obciążenia zagadnienie siatki (przy założeniu, że jest ściśle płaska) stanowi zagadnienie tarczy lub płyty siatkowej. Na rys. 1 obciążenie tarczowe siatki stanowią siły $\chi P^t e_t$ i moment $\chi L e_3$ (χ jest tutaj parametrem), a obciążenie płytowe — siła $P e_3$ oraz momenty $L^t e_t$. W pracy [3] omówiono



Rys. 1

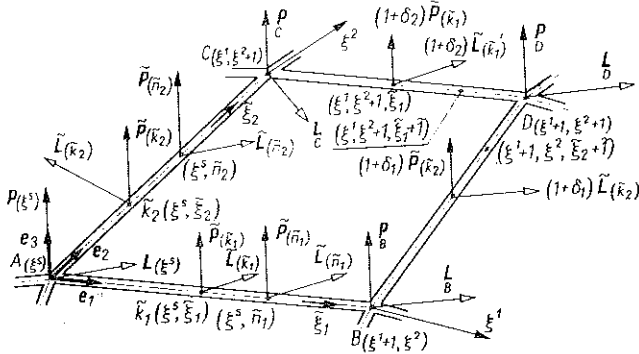
zagadnienie płyty siatkowej w przypadku, gdy obciążenie płytowe zaczepione jest w węzłach siatki (np. w punkcie A) i w punktach pośrednich między węzłami (np. w punkcie A na rys. 1). Dla określenia położenia tych punktów w stosunku np. do węzła A wprowadzono w pracy [3] lokalną współrzędną ξ_A ($A=1, 2$; A oznacza numer linii parametrycznej). Przyjęto, że ilość punktów pośrednich na dowolnym łączniku siatki wynosi n_A i że dzielą one łącznik na równe części o długości $\sqrt{g_{AA}}/n_{A+1}$ ($\sqrt{g_{AA}}$ oznacza długość łącznika leżącego na A-tej linii parametrycznej siatki).

Rozpatrując zagadnienie wybożenia takich siatek przyjęto dla nich model matematyczny przedstawiony na rys. 2. Nad siatką sprężystą (rusztem) rozpina



Rys. 2

się siatkę przegubową zbudowaną ze sztywnych elementów. Siatka przegubowa połączona jest ze sprężystym rusztem przegubowo zarówno w węzłach rzeczywistych tego rusztu jak i dowolnej liczbie n_A punktów pośrednich na jego łącznikach. Siatka sztywno-przegubowa obciążona jest dowolnym jednoparametrowym konserwatywnym obciążeniem tarczowym. Układ połączeń między sobą elementów tej siatki jest taki, że umożliwia istnienie w niej pełnego tarczowego stanu napięcia wewnętrznego. W ten sposób powstał układ składający się ze sztywno-przegubowej tarczy i sprężystej płyty siatkowej połączonych ze sobą. Przy zmianie konfiguracji tego układu przez nadanie zarówno węzłom rzeczywistym jak i punktom pośrednim siatki przemieszczeń typu płytowego pręty siatki pozostaną proste, a wygną się łączniki rusztu. Obciążenie tarczowe siatki, utrzymujące układ w tej postaci w równowadze, będzie dla tego układu obciążeniem krytycznym. Miarą tego obciążenia będzie parameter χ . W procesie zmiany konfiguracji układu na poszczególne węzły tarczy sztywno-przegubowej oprócz znanych sił tarczowych zaczynają działać siły, które nie mogą być zrównoważone w obrębie tarczowego stanu napięcia. Siły te o charakterze płytowym stanowią obciążenie połączonej z tarczą płyty siatkowej. Obciążony tego typu siłami fragment płyty przedstawia rys. 3. Siły te są liniową



Rys. 3

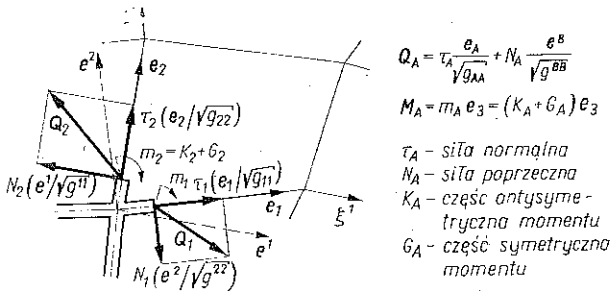
funkcją tarczowego stanu napięcia, istniejącego i znanego w tarczy, oraz płytowego stanu przemieszczenia, wywołującego zmianę konfiguracji układu. Rozwiązanie problemu wybooczenia rozpatrywanych siatek sprężystych sprowadza się ostatecznie do rozwiązania zagadnienia płyty siatkowej, obciążonej siłami liniowo zależnymi od jej ugięcia. W przypadku rozpatrzonym w pracy [2] przyjęto, że obciążenie to działa wyłącznie na węzły rzeczywiste płyty. Wyznacza to dokładność otrzymanych w ten sposób rozwiązań, która w istotny sposób zależy od ilości tych węzłów. Metodę opartą na takim schemacie obciążenia można nazwać metodą pierwszego przybliżenia. W konsekwencji metodę, którą omawia się w niniejszej pracy, można nazwać metodą n -tego przybliżenia. Na jej podstawie można ocenić dokładność metody poprzedniej.

Dla tak postawionego problemu równaniami wybooczeniowymi stają się równania statycznego zginania płyt siatkowych, w których zamiast dowolnego obciążenia

zenia zewnętrznego należy przyjąć szczególne, omówione wyżej. Dla przypadku rozpatrywanego w niniejszej pracy obciążenie to jest analogiczne do obciążenia zewnętrznego płyty rozpatrzonej w pracy [3]. Tak więc podstawą wyoboczeniowych równań metody n -tego przybliżenia będą równania statycznego zginania wyrowadzone i opisane w pracy [3], tzn. równania dotyczące przypadku, kiedy obciążenie płyty zaczepione jest w węzłach jak i między węzłami. Równania te nie będą ponownie omawiane. Poniżej opisany zostanie sposób określania szczególnego obciążenia płytowego w metodzie n -tego przybliżenia. Szczegółowo problem ten przedstawiono w pracy [4].

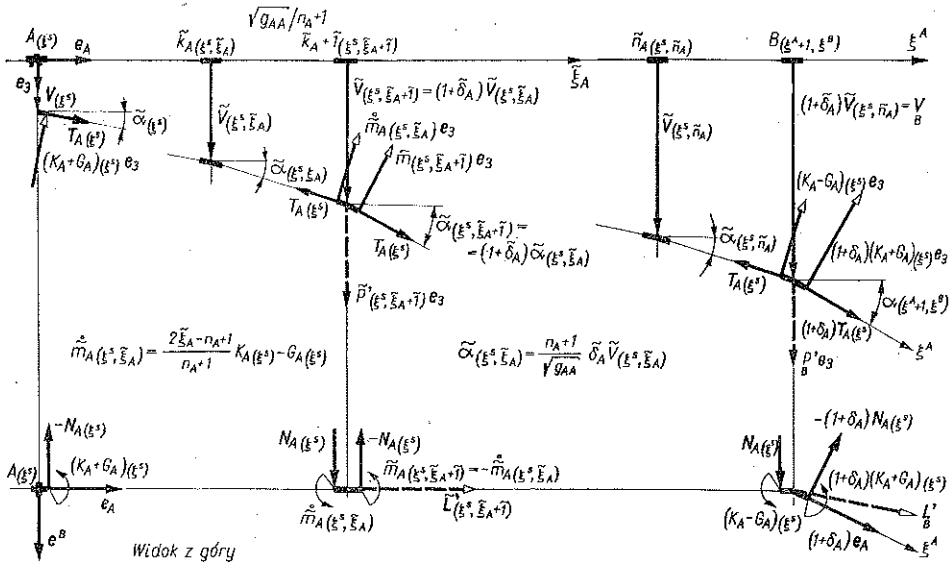
3. OBCIĄŻENIE PŁYTOWE WYWOŁANE TARCZOWYM STANEM NAPIĘCIA I ZMIANĄ KONFIGURACJI UKŁADU

Przy obliczaniu tego obciążenia zakłada się, że znany jest pełny stan napięcia tarczowego rusztu (zgodnie z modelem obliczeniowym zagadnienia przedstawionego na rys. 2 stan ten powstaje w tarczy sztywno-przegubowej). Rysunek 4 przed-

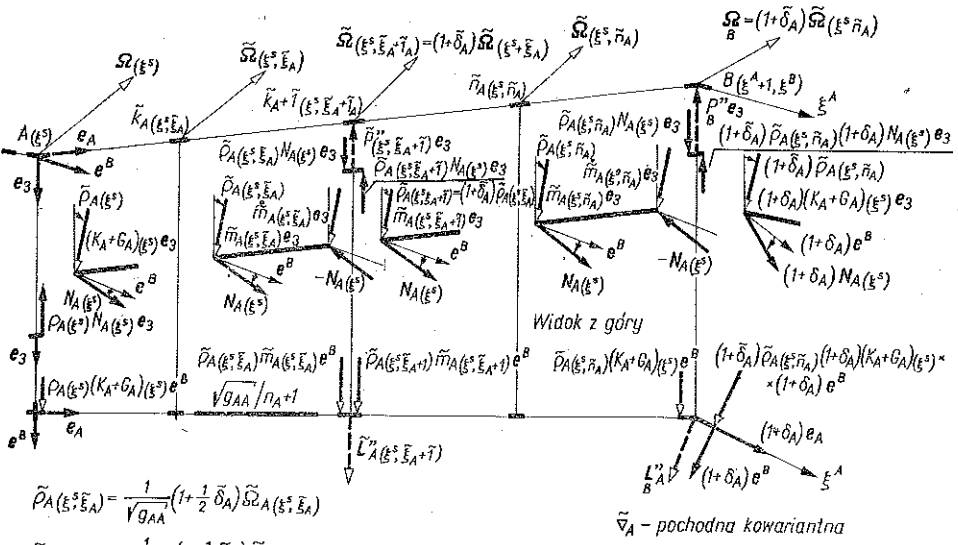


Rys. 4

stawia dowolny węzeł rusztu z zaznaczeniem składowych tarczowego stanu napięcia. Rysunek wyjaśnia sens fizyczny poszczególnych składowych. Nakładając na układ sztywno-przegubowo-sprężysty (rys. 2) płytowe pole przemieszczeń powoduje się zmianę konfiguracji tego układu. Pole to określone jest wektorami przesunięcia węzłów rzeczywistych układu $V_{(\xi^s)}$ i punktów pośrednich $\tilde{V}_{(\xi^s, \xi_A)}$ oraz wektorami obrotów $\Omega_{(\xi^s)}$ i $\tilde{\Omega}_{(\xi^s, \xi_A)}$ odpowiednio węzłów rzeczywistych i punktów pośrednich układu. Rysunek 5 przedstawia schemat zmiany konfiguracji układu, wywołanej przesunięciami $V_{(\xi^s)}$ i $\tilde{V}_{(\xi^s, \xi_A)}$, a rys. 6 przedstawia schemat zmiany konfiguracji układu wywołanej obrotami $\Omega_{(\xi^s)}$ i $\tilde{\Omega}_{(\xi^s, \xi_A)}$ węzłów rzeczywistych A i B i punktów pośrednich. Rozważany jest łącznik leżący na A -tej linii parametrycznej. Jak zaznaczono poprzednio punkty pośrednie dzielą łącznik na równe odcinki o długości $\sqrt{g_{AA}}/n_A + 1$. Układy sił tarczowych działających na dowolny punkt pośredni $(\xi^s, \xi_A + 1)$ i węzeł rzeczywisty $(\xi^A + 1)$ widoczne są na rysunkach. Założony stan przemieszczeń układu powoduje zmianę kierunku działania poszczególnych sił tych układów. W efekcie dają one składowe, które nie mogą być zrównoważone w obrębie tarczowego stanu napięcia. Składowe te o charakterze płytowym



Rys. 5



Rys. 6

stanowią obciążenie połączonej z tarczą sprężystej płyty siatkowej. Po obliczeniach (szczegóły podano w pracy [4]) uzyskuje się obciążenie punktu pośredniego $(\xi^A, \xi^B + 1, \xi^A + 1)$ siłą

$$(3.1) \quad \tilde{P}_{(\xi^A, \xi^B + 1, \xi^A + 1)} = \chi [\tilde{E}_{tA} \tilde{Q}_{(\xi^A, \xi^A)}^t + \tilde{E}_A \tilde{V}_{(\xi^A, \xi^A)}],$$

gdzie

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \tilde{E}_{tA} &= -(1 + \delta_B) N_{A(\xi^A)} \frac{g_{tA}}{\sqrt{g_{AA}}} \delta_A \left(1 + \frac{1}{2} \delta_A\right), \\ \tilde{E}_A &= (1 + \delta_B) T_{A(\xi^A)} \frac{n_A + 1}{\sqrt{g_{AA}}} \delta_A \delta_A \end{aligned}$$

oraz momentem

$$(3.3) \quad \tilde{L}_{(\xi^A, \xi^B + 1, \xi^A + 1)} = \chi [\tilde{L}_t \tilde{Q}_{(\xi^A, \xi^A)}^t + \tilde{L} \tilde{V}_{(\xi^A, \xi^A)}],$$

gdzie

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \tilde{L}_t &= (1 + \delta_B) \left(\frac{n_A - 2\xi^A - 1}{n_A + 1} K_{A(\xi^A)} + G_{A(\xi^A)} \right) \frac{g_{tA} e^B}{\sqrt{g_{AA} g^{BB}}} \delta_A \left(1 + \frac{1}{2} \delta_A\right), \\ \tilde{L} &= (n_A + 1) (1 + \delta_B) \left(\frac{n_A - 2\xi^A - 1}{n_A + 1} K_{A(\xi^A)} + G_{A(\xi^A)} \right) \frac{e_A}{g_{AA}} \delta_A \delta_A; \end{aligned}$$

obciążenie węzła rzeczywistego $D (\xi^1 + 1, \xi^2 + 1)$ (rys. 3) siłą

$$(3.5) \quad P_{(\xi^1 + 1, \xi^2 + 1)} = \chi \sum_{A=1}^2 [\hat{E}_{At} \hat{Q}_{(\xi^A, \tilde{n}_A)}^t + \hat{E}_A \hat{V}_{(\xi^A, \tilde{n}_A)}],$$

gdzie

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \hat{E}_{At} &= -(1 + \delta_B) \left\{ \delta_A N_{A(\xi^A)} \frac{g_{rA}}{\sqrt{g_{AA}}} \left[g_t^r \left(1 + \frac{1}{2} \delta_A\right) + \frac{1}{2} g_0^{n_A} \Gamma_{At}^r (1 + \delta_A) \right] + \right. \\ &\quad \left. + N_{A(\xi^A)} \cdot \frac{1}{2} \frac{g_{rA}}{\sqrt{g_{AA}}} \Gamma_{At}^r (g_0^{n_A} - 1) (1 + \delta_A) \right\}, \\ \hat{E}_A &= (1 + \delta_B) \delta_A T_{A(\xi^A)} \frac{n_A + 1}{\sqrt{g_{AA}}} \delta_A \end{aligned}$$

oraz momentem

$$(3.7) \quad L_{(\xi^1 + 1, \xi^2 + 1)} = \chi \sum_{A=1}^2 [L_t \hat{Q}_{(\xi^A, \tilde{n}_A)}^t + L \hat{V}_{(\xi^A, \tilde{n}_A)}]$$

gdzie

$$(3.8) \quad \begin{aligned} L_t &= (1 + \delta_B) \left\{ (1 + \delta_A) (K_A + G_A)_{(\xi^A)} \frac{g_{rA}}{\sqrt{g_{AA}}} \left[g_t^r \left(1 + \frac{1}{2} \delta_A\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} g_0^{n_A} \Gamma_{At}^r (1 + \delta_A) \right] + (K_A - G_A)_{(\xi^A)} \frac{g_{rA}}{\sqrt{g_{AA}}} \left[g_t^r \left(1 + \frac{1}{2} \delta_A\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \Gamma_{At}^r (1 + \delta_A) \right] \right\} \frac{e^B}{\sqrt{g^{BB}}}, \\ L &= (n_A + 1) (1 + \delta_B) [(2 + \delta_A) K_{A(\xi^A)} + G_{A(\xi^A)}] \frac{e_A}{g_{AA}} \delta_A. \end{aligned}$$

4. RÓWNANIA WYBOCZENIOWE W TEORII n -TEGO PRZYBLIŻENIA

Jak już napisano poprzednio równaniami tymi w omawianym przypadku stają się równania statycznego zginania płyty obciążonej w węzłach i między węzłami, przedstawione w pracy [3], w których zamiast dowolnego obciążenia zewnętrznego należy przyjąć obciążenie szczególne, omówione wyżej. Po odpowiednich przekształceniach równania te przyjmują następującą postać operatorową:

dla dowolnego punktu pośredniego (ξ^A, ξ^B+1, ξ_A+1)

$$(4.1) \quad \begin{aligned} (\tilde{E}_{tA} - \chi \hat{\tilde{E}}_{tA}) \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)}^t + (\tilde{E}_A - \chi \hat{\tilde{E}}_A) \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} &= 0, \\ (\tilde{E}_{tA}^1 - \chi \hat{\tilde{E}}_{tA}^1) \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)}^t + (\tilde{E}_A^1 - \chi \hat{\tilde{E}}_A^1) \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} &= 0, \\ (\tilde{E}_{tA}^2 - \chi \hat{\tilde{E}}_{tA}^2) \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)}^t + (\tilde{E}_A^2 - \chi \hat{\tilde{E}}_A^2) \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \tilde{E}_{tA} &= -12 D_A (n_A + 1)^2 (1 + \delta_B) \frac{\varepsilon_{AB3}}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} g_t^B \left(1 + \frac{1}{2} \tilde{\delta}_A \right) \tilde{\delta}_A, \\ \tilde{E}_A &= -12 D_A (n_A + 1)^3 (1 + \delta_B) \frac{1}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} \tilde{\delta}_A \tilde{\delta}_A, \\ \tilde{E}_{tA}^T &= D_A (n_A + 1) (g_r^T + \Gamma_{Br}^T) (1 + \delta_B) \left[\frac{g g^{Br}}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} g_t^B (12 + 12 \tilde{\delta}_A + 2 \tilde{\delta}_A \tilde{\delta}_A) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{D_{0A}}{D_A} \frac{g_{At}}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} g_A^r \tilde{\delta}_A \tilde{\delta}_A \right], \\ \tilde{E}_A^T &= 6 D_A (n_A + 1)^2 (g_r^T + \Gamma_{Br}^T) (1 + \delta_B) \frac{\varepsilon_{AB3} g^{Br}}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} (2 + \tilde{\delta}_A) \tilde{\delta}_A, \\ \hat{\tilde{E}}_{tA}^T &= \tilde{\mathbf{L}}_t \cdot \mathbf{e}^T, \quad \hat{\tilde{E}}_A^T = \tilde{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{e}^T; \end{aligned}$$

dla dowolnego węzła rzeczywistego (ξ^1+1, ξ^2+1)

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \sum_{A=1}^2 (E_{At} - \chi \hat{E}_{At}) \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)}^t + \sum_{A=1}^2 (E_A - \chi \hat{E}_A) \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)} &= 0, \\ \sum_{A=1}^2 (E_{At}^1 - \chi \hat{E}_{At}^1) \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)}^t + \sum_{A=1}^2 (E_A^1 - \chi \hat{E}_A^1) \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)} &= 0, \\ \sum_{A=1}^2 (E_{At}^2 - \chi \hat{E}_{At}^2) \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)}^t + \sum_{A=1}^2 (E_A^2 - \chi \hat{E}_A^2) \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.4) \quad E_{At} = -6 D_A (n_A + 1)^2 (1 + \delta_B) \left\{ \tilde{\delta}_A \frac{\varepsilon_{AB3}}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} g_t^B (2 + \tilde{\delta}_A) + [g_{0A}^n (1 + \tilde{\delta}_A) - 1] \times \right. \\ \left. \times \frac{\varepsilon_{AB3}}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} (1 + \tilde{\delta}_A) \right\},$$

$$\begin{aligned}
 (4.4) \quad E_A &= -12D_A(n_A+1)^3(1+\delta_B)\delta_A \frac{1}{g_{AA}\sqrt{g_{AA}}}\delta_A, \\
 [c.d.] \quad E_{At}^T &= D_A(n_A+1)(g_t^T + \Gamma_{Bt}^T)(1+\delta_B) \left\{ (g_s^t + \Gamma_{As}^t)(1+\delta_A) \frac{1}{g_{AA}\sqrt{g_{AA}}} \times \right. \\
 &\quad \times \left\{ 6gg^{Bs}g_t^B + (2gg^{Bs}g_k^B - \frac{D_{0A}}{D_A}g_{Ak}g_A^s) [g_t^k\delta_A + g_0^{nA}\Gamma_{At}^k(1+\delta_A)] \right\} - \\
 &\quad - \frac{g_s^t}{g_{AA}\sqrt{g_{AA}}} \left\{ 6gg^{Bs}g_t^B + \left(2gg^{Bs}g_k^B - \frac{D_{0A}}{D_A}g_A^s g_{Ak} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \left. \times [g_t^k\delta_A + \Gamma_{At}^k(1+\delta_A)] \right\} + \frac{6gg^{Bt}}{g_{AA}\sqrt{g_{AA}}} [g_t^B(2+\delta_A) + \Gamma_{At}^B(1+\delta_A)] \right\}, \\
 E_A^T &= 6D_A(n_A+1)^2(g_l^T + \Gamma_{Bl}^T)(1+\delta_B) [g^{Bl} + (g_s^l + \\
 &\quad + \Gamma_{sA}^l)(1+\delta_A)g^{Bs}] \frac{\varepsilon_{AB3}}{g_{AA}\sqrt{g_{AA}}}\delta_A,
 \end{aligned}$$

$$\hat{E}_{At}^T = L_t \cdot e^T, \quad \hat{E}_A^T = L \cdot e^T.$$

We wzorach tych przyjęto następujące oznaczenia: $A, B, T=1, 2$ ($A \neq B$), $k, l, r, s, t=1, 2$, $g_{st} = \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_t$, $g^{rk} = \mathbf{e}^r \cdot \mathbf{e}^k$, $g_l^k = \mathbf{e}^l \cdot \mathbf{e}_k$, $g = \det g_{st}$, $\varepsilon_{AB3} = \pm \sqrt{g}$, $g_0^{nA} = \begin{cases} n_A = 0 \\ n_A \neq 0 \end{cases}$, D_A oznacza sztywność giętą łącznika, D_{0A} sztywność skrętną łącznika, δ_A operator określający przyrost składowych stanu przemieszczenia między sąsiednimi punktami pośrednimi [we wzorach (4.4) dodatkowo $\delta_A \equiv \delta_{\Delta}$, gdy operator ten działa na inne wielkości] oraz δ_A operator, określający przyrost dowolnej wielkości między sąsiednimi liniami parametrycznymi.

Równania powyższe wyprowadzono przy założeniu niezmienności własności sprężystych łączników rusztu wzdłuż poszczególnych linii parametrycznych. Są one spełnione przy założeniu małych odkształceń i przemieszczeń ośrodka oraz przy liniowości związków fizycznych. Stanowią układ jednorodnych równań różnicowych w ogólnym przypadku o zmiennych współczynnikach. Układ ten różni się od analogicznego układu równań opisującego zagadnienie wyboczenia w pierwszym przybliżeniu [2] z tym zastrzeżeniem, że zawiera dodatkowe równania równowagi punktów pośrednich na łącznikach. Jako niewiadome układ zawiera trzy funkcje składowych stanu przemieszczenia $\tilde{V}_{(\xi_A)}$, $\tilde{\Omega}_{(\xi_A)}^1$, $\tilde{\Omega}_{(\xi_A)}^2$ oraz parametr χ . Warunkiem istnienia niezerowych wartości tych składowych (czyli istnienia postaci równowagi danej siatki po odkształceniu) jest zerowanie się wyznacznika charakterystycznego tego układu równań:

$$(4.5) \quad |A - \chi B| = 0,$$

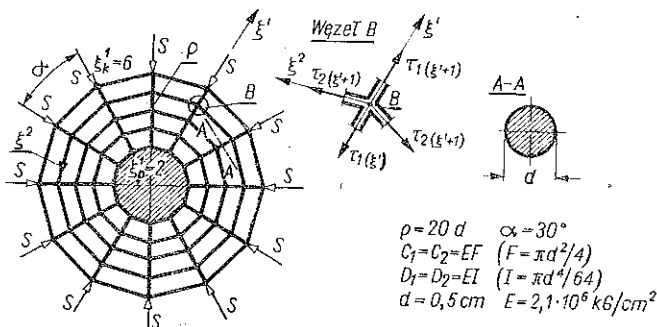
gdzie $A - \chi B$ jest macierzą kwadratową współczynników rozpatrywanego układu równań (macierz B nie jest macierzą jednostkową). Postać tej macierzy zależy od funkcji określających kształt wygiętej siatki z dokładnością do pewnych stałych. Najczęściej funkcje te są nieznanne i należy kształt wygiętej siatki określać numerycz-

nie, znajdując wartości przemieszczeń w węzłach i punktach pośrednich siatki. W tym celu równania różnicowe (4.1) i (4.3) należy przekształcić na algebraiczne (zamieniając przyrosty na różnice) i napisać je dla wszystkich węzłów rzeczywistych i wprowadzonych do układu modelowego punktów pośrednich oraz uzupełnić płytowymi warunkami brzegowymi. Wówczas wspomniana wyżej macierz będzie macierzą tak otrzymanego układu równań, a jej wyznacznik będzie wielomianem m -tego stopnia względem parametru χ . Stopień ten będzie równy liczbie stopni swobody węzłów i punktów pośrednich. Dla danych warunków brzegowych i danej ilości węzłów stopień ten będzie wzrastał ze wzrostem ilości punktów pośrednich wprowadzonych do układu modelowego (wzrastać będzie wówczas liczba równań równowagi punktów pośrednich). Miejsca zerowe tego wielomianu określają m krytycznych wartości parametru χ . Z punktu widzenia technicznego najbardziej interesująca jest minimalna wartość tego parametru χ_0 , określa ona bowiem najmniejsze tarczowe obciążenie zewnętrzne utrzymujące ruszt w równowadze w postaci wygiętej. Wartość χ_0 dla danego rusztu będzie zależna od liczby punktów pośrednich wprowadzonych do układu modelowego. Zwiększając liczbę tych punktów otrzymuje się malejący szereg zbieżny wartości parametru χ_0 do rozwiązania ścisłego. Rozwiązanie takie można by otrzymać, traktując łącznik jako belkę zamocowaną sprężysto na końcach i obciążoną obciążeniem ciągłym liniowo zależnym od jej ugięcia. Otrzymanie rozwiązania ścisłego jest jednak kłopotliwe ze względów rachunkowych [5]. W praktyce wystarczy określić taką wartość parametru χ_0 , która różni się będzie od poprzedniej (określonej dla mniejszej liczby punktów pośrednich) o małą wartość. Oznacza to możliwość oszacowania krytycznych wartości tarczowego obciążenia zewnętrznego rusztu z dowolną dokładnością.

5. WYBOCZENIE PŁYTOWE RUSZTÓW BIEGUNOWYCH

5.1. Rozwiązanie na podstawie teorii pierwszego przybliżenia

Poprzednio przedstawiona teoria zostanie zastosowana do rozwiązania problemu wyboczenia rusztów biegunowych, obciążonych równomiernie na brzegu zewnętrznym stałymi siłami S (rys. 7). Przyjmujemy, że własności sprężyste elementów rusztu są biegunowo-symetryczne (nie zależą od współrzędnej obwodowej ξ^2).



Rys. 7

Zakładamy ponadto, że geometria rusztu jest znana oraz że znany jest tarczowy stan napięcia wewnętrznego rusztu (rys. 7), wywołany siłami zewnętrznymi S . Założymy, że po utracie stateczności ruszt wygnie się w ten sposób, że jego kształt będzie również biegunowo-symetryczny. W tym punkcie pracy przyjmujemy, że powstające w procesie zmiany konfiguracji rusztu szczególnie obciążenie płytowe działać będzie jedynie na węzły rzeczywiste rusztu (tzn. liczba punktów pośrednich w układzie modelowym rozpatrywanego rusztu równa się zero). Taki przypadek odpowiada właśnie teorii pierwszego przybliżenia [2]. Obciążenie to przy przyjętych założeniach będzie niezależne od współrzędnej obwodowej ξ^2 . Ostatecznie taki przypadek wyoboczenia będzie określony równaniami

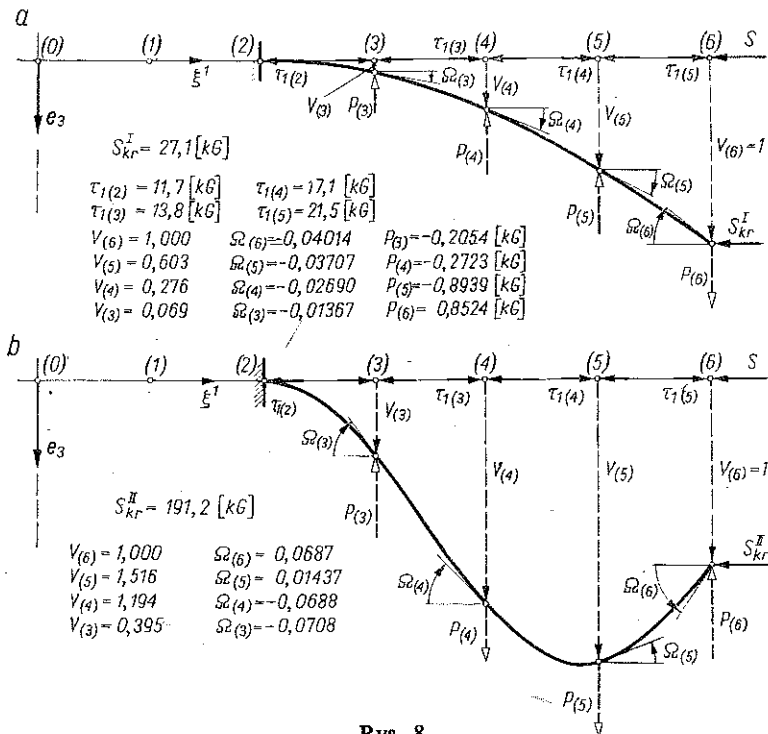
$$(5.1) \quad 3(v_{(\xi^1+2)} - v_{(\xi^1)}) + \rho \Omega_{(\xi^1+2)} + \rho \left(4 + \beta \frac{\sin \alpha/2}{1 + \xi^1} \right) \Omega_{(\xi^1+1)} + \rho \Omega_{(\xi^1)} = 0,$$

$$(\lambda + T_1_{(\xi^1+1)}) v_{(\xi^1+2)} - [2\lambda + (T_1_{(\xi^1+1)} + T_1_{(\xi^1)})] v_{(\xi^1+1)} + (\lambda + T_1_{(\xi^1)}) v_{(\xi^1)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \rho \lambda (\Omega_{(\xi^1+2)} - \Omega_{(\xi^1)}) = 0,$$

$$\beta = D_2/D_1, \quad \lambda = 12D_1/\rho^2.$$

W tych równaniach v oznacza płytowe przesunięcie węzłów (składowa fizyczna) oraz Ω obrót węzłów wokół osi prostopadłej do współrzędnej promieniowej ξ^1 siatki (składowa fizyczna). Zgodnie z przyjętą metodą, pisząc te równania dla wszystkich węzłów leżących na dowolnie wybranym promieniu siatki oraz uzupełniając



Rys. 8

równaniami brzegowymi (rozpatruje się przypadek rusztu utwierdzonego na brzegu wewnętrznym $\xi_p^I = 2$ oraz swobodnego na brzegu zewnętrznym), otrzymuje się układ równań ze względu na przemieszczenia węzłów. W celu obliczenia wyznacznika macierzy utworzonej ze współczynników tak otrzymanego układu posłużono się metodą przedstawioną w pracy [6]. W tym przypadku powyższy wyznacznik jest wielomianem czwartego stopnia ze względu na S (rozpatrywana siatka posiada cztery stopnie swobody). Jego wartości zerowe wyznaczają następujące krytyczne wartości siły S :

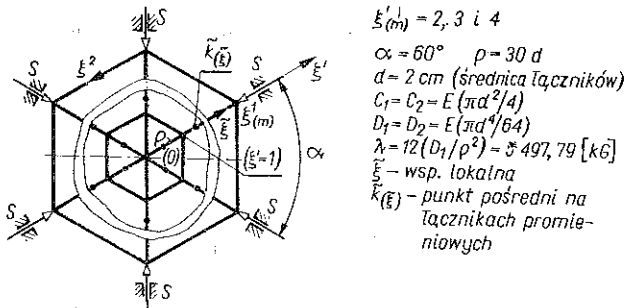
$$S_{kr}^I = 27,1 \text{ [kG]}, \quad S_{kr}^{II} = 191,2 \text{ [kG]},$$

$$S_{kr}^{III} = 599,5 \text{ [kG]}, \quad S_{kr}^{IV} = 1460,1 \text{ [kG]}.$$

Z technicznego punktu widzenia najbardziej istotne znaczenie ma siła S_{kr}^I jako najmniejsza. Każdej z obliczonych sił odpowiada inna kolejna postać wyboczenia rozpatrywanego rusztu. Postacie te określono przyjmując za znaną wartość przesunięcia zewnętrznego węzła brzegowego i równą $v_{(6)} = 1$ i obliczając pozostałe przemieszczenia węzłów siatki jako funkcje $v_{(6)}$. Rysunek 8 przedstawia kształty wybozonego rusztu, odpowiadające dwóm pierwszym siłom krytycznym. Kształty te są ilustrowane postacią wygięcia dowolnego promienia siatki, co przy założeniu biegunowej symetrii wygięcia określa całkowicie kształt wyboczenia całego rusztu.

5.2. Rozwiązanie na podstawie teorii n -tego przybliżenia

W tym punkcie pracy rozpatrzony zostanie szereg rusztów biegunowych bez otworu, obciążonych na brzegu zewnętrznym stałymi siłami S (rys. 9). Ruszty te różnią się od siebie liczbą obwodów węzłów rzeczywistych, położonych na pro-



Rys. 9

mieniach (od dwóch do czterech obwodów). Zasadnicze parametry geometryczne i fizyczne poszczególnych rusztów są takie same. Pozwoli to określić wpływ liczby obwodów siatki na wartość sił krytycznych. We wszystkich przypadkach ruszty w zagadnieniu płytowym są na brzegu zewnętrznym utwierdzone. Zagadnienie zostanie rozwiązane na podstawie teorii n -tego przybliżenia, tzn. przyjmiemy, że powstające w procesie zmiany konfiguracji szczególne obciążenie płytowe działa nie tylko na węzły rzeczywiste, ale i na szereg punktów pośrednich, leżących na

łącznikach promieniowych rusztów. Przyjmując, że po wygięciu kształt rusztów będzie biegunowo-symetryczny, otrzymuje się dla takiego przypadku następujące równania wybozczeniowe:

dla punktu pośredniego o współrzędnych $(\xi^1, \xi^2 + 1)$ na łącznikach promieniowych

$$(5.2) \quad \begin{aligned} & 3(n+1)(\tilde{v}_{(\xi^1, \xi^2+2)} - \tilde{v}_{(\xi^1, \xi^2)}) + \rho(\tilde{Q}_{(\xi^1, \xi^2+2)} + 4\tilde{Q}_{(\xi^1, \xi^2+1)} + \tilde{Q}_{(\xi^1, \xi^2)}) = 0, \\ & 2[\lambda(n+1)^2 + T_{1(\xi^1)}](\tilde{v}_{(\xi^1, \xi^2+2)} - 2\tilde{v}_{(\xi^1, \xi^2+1)} + \tilde{v}_{(\xi^1, \xi^2)}) + \\ & \quad + \rho\lambda(n+1)(\tilde{Q}_{(\xi^1, \xi^2+2)} - \tilde{Q}_{(\xi^1, \xi^2)}) = 0; \end{aligned}$$

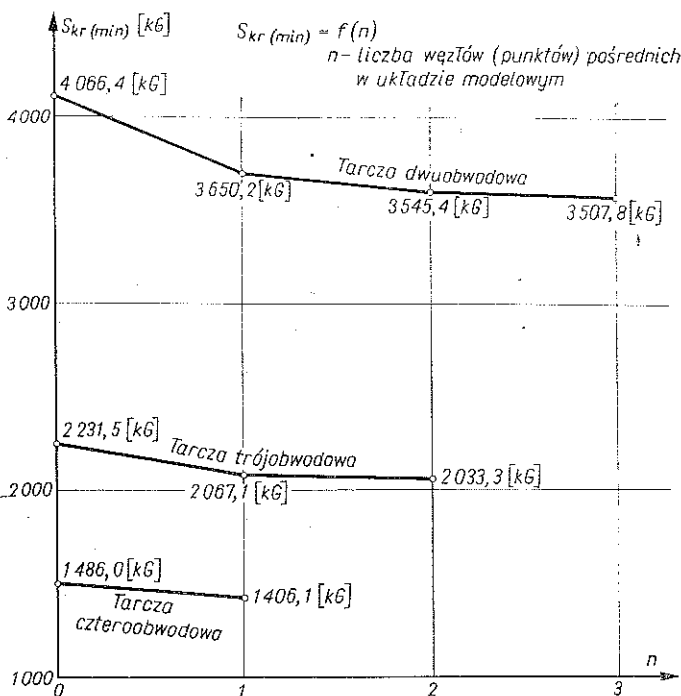
dla węzła rzeczywistego o współrzędnej $(\xi^1 + 1)$

$$(5.3) \quad \begin{aligned} & 3(n+1)(\tilde{v}_{(\xi^1+1, \tilde{n})} - \tilde{v}_{(\xi^1, \tilde{n})}) + \rho\tilde{Q}_{(\xi^1+1, \tilde{n})} + \\ & \quad + \rho\left(4 + \frac{\beta}{n+1} \frac{\sin \alpha/2}{1 + \xi^1}\right)\tilde{Q}_{(\xi^1+1)} + \rho\tilde{Q}_{(\xi^1, \tilde{n})} = 0, \\ & 2[\lambda(n+1)^2 + T_{1(\xi^1+1)}]\tilde{v}_{(\xi^1+1, \tilde{n})} - 2[2\lambda(n+1)^2 + (T_{1(\xi^1+1)} + \\ & \quad + T_{1(\xi^1)})]\tilde{v}_{(\xi^1+1)} + 2[\lambda(n+1)^2 + T_{1(\xi^1)}]\tilde{v}_{(\xi^1, \tilde{n})} + \\ & \quad + \rho\lambda(n+1)(\tilde{Q}_{(\xi^1+1, \tilde{n})} - \tilde{Q}_{(\xi^1, \tilde{n})}) = 0. \end{aligned}$$

W tych równaniach ξ^2 oznacza współrzędną lokalną na łącznikach promieniowych, n ilość punktów pośrednich na tych łącznikach wprowadzonych do układu modelowego rusztu. Składowe stanu przemieszczenia, występujące w tych równaniach, są składowymi fizycznymi. W celu otrzymania rozwiązania należy powyższe równania napisać dla wszystkich punktów pośrednich i węzłów rzeczywistych, leżących na dowolnym promieniu, i uzupełnić płytowymi warunkami brzegowymi. Ze względu na to, że liczba wprowadzonych do układu modelowego punktów pośrednich może być dowolna, otrzymany we wskazany wyżej sposób układ równań może być dla danej siatki dowolny. W rezultacie różne będą wartości sił krytycznych. W przypadku siatki dwuobwodowej rozwiązano następujące warianty, różniące się od siebie liczbą wprowadzonych do układu modelowego punktów pośrednich: $n=0$, $n=1$, $n=2$ i $n=3$. Najmniejsze wartości sił krytycznych, uzyskane dla poszczególnych wariantów, przedstawiono na wykresie (rys. 10). Dla trójobwodowej siatki rozwiązano następujące warianty: $n=0$, $n=1$ i $n=2$, a dla siatki czteroobwodowej warianty $n=0$ i $n=1$. Wartości najmniejszych sił krytycznych przedstawiono jak i wyżej na wykresie (rys. 10).

Z podanych rozwiązań widać, że wartości sił krytycznych S_{kr} dla danej siatki istotnie maleją wraz ze wzrostem ilości wprowadzonych do układu modelowego punktów pośrednich dążąc asymptotycznie do rozwiązania ścisłego. Bez szukania tego rozwiązania z podanego wykresu można z pewną dokładnością oszacować wartość sił krytycznych dla poszczególnych siatek. Jak widać (rys. 10) w przypadku siatki dwuobwodowej ostatni uzyskany wynik (dla $n=3$) różni się od poprzedniego (dla $n=2$) w przybliżeniu o 1%. Z tą dokładnością można przyjąć, że dla siatki dwuobwodowej (o podanych parametrach fizycznych i geometrycznych) siła krytyczna S wynosi $S_{kr}^2 = 3507,8$ [kG].

Z wykresu widać, że zastosowanie do obliczenia tej wartości teorii n -tego przybliżenia było niezbędne, wartość bowiem siły krytycznej, uzyskana dla tej siatki przy $n=0$ (tzn. przy zastosowaniu tylko teorii pierwszego przybliżenia), jest w przybliżeniu aż o 16% wyższa od wyniku podanego wyżej. Dla siatki trójobwodowej



Rys. 10

różnica między ostatnimi wynikami, tj. dla $n=2$ i $n=1$ wynosi w przybliżeniu 1,7%. Z taką więc dokładnością można przyjąć, że siła krytyczna dla tej siatki wynosi $S_{kr}^3 = 2033,3$ [kG].

W tym przypadku rozwiązanie uzyskane na podstawie teorii pierwszego przybliżenia ($n=0$) jest znacznie dokładniejsze niż dla siatki poprzedniej. Różni się bowiem od wartości przyjętej za siłę krytyczną w przybliżeniu o 10%. Oznacza to, że dokładność pierwszego przybliżenia rośnie wraz ze wzrostem liczby węzłów rzeczywistych siatki. Dla siatki czteroobwodowej różnica między podanymi wynikami jest rzędu 5%. Przyjmując, że dokładność rzędu 5% jest wystarczającą dokładnością techniczną, można dla tej siatki za siłę krytyczną przyjąć wartość $S_{kr}^4 = 1406,1$ [kG]. Przyjęcie dla tej siatki większej liczby punktów pośrednich w układzie modelowym pozwoliłoby uzyskać większą dokładność. Przypadku takiego jednak nie rozpatrzono ze względu na ograniczone możliwości maszyny cyfrowej, na której dokonywano obliczeń.

Z przedstawionych rezultatów wynika, że dla siatek o danej liczbie węzłów można z dowolną dokładnością oszacować wartość siły krytycznej przez dobór

odpowiedniego modelu (wprowadzenie odpowiedniej ilości punktów pośrednich). Dla siatek o małej liczbie węzłów rzeczywistych wyniki oparte jedynie na teorii pierwszego przybliżenia są stosunkowo mało dokładne. Dla zwiększenia dokładności rozwiązań należy wówczas stosować teorię n -tego przybliżenia. Ponadto podane wyniki wskazują, co już podkreślono poprzednio, wzrost dokładności pierwszego przybliżenia wraz ze wzrostem liczby węzłów rzeczywistych. Na podstawie powyższej analizy można stwierdzić, że dokładność wyników podanych w poprzednim punkcie pracy jest rzędu 5%.

6. WNIOSKI

Przedstawiona w pracy teoria jest teorią ogólną, pozwalającą rozwiązać w sposób przybliżony, ale dostatecznie dokładny, zagadnienie wyboczenia dowolnego rusztu siatkowego. Podany sposób uzyskania wyboczeniowych równań teorii n -tego przybliżenia nie jest sposobem jedynym. Można by je uzyskać przez odpowiednią modyfikację równań teorii pierwszego przybliżenia. W ogólnym przypadku przedstawione równania stanowią dość złożony układ równań. Upraszcza się on znacznie dla takich siatek jak biegunowe czy prostokątne. Jak widać z zamieszczonego przykładu konsekwentne stosowanie teorii n -tego przybliżenia pozwala określać wartość sił krytycznych z dowolną dokładnością. Podane wyniki pozwalają również wnioskować, że teoria ta może służyć jako podstawa do oceny dokładności teorii pierwszego przybliżenia.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. FRĄCKIEWICZ, *Mechanika ośrodków siatkowych*, PWN, Warszawa 1970.
2. H. FRĄCKIEWICZ, *Buckling of lattice plates*, Arch. Mech. Stos., 23, 4, 1971.
3. J. LEWIŃSKI, *Zagadnienie płyty siatkowej obciążonej w węzłach i między węzłami*, Rozpr. Inżyn., 22, 2, 1974.
4. J. LEWIŃSKI, *Stateczność rusztów siatkowych*, Rozpr. dokt., PW, 1972.
5. J. BAUER, W. GUTKOWSKI, *Stateczność regularnych konstrukcji prętowych*, Arch. Inż. Łąd., 1, 1973.
6. R. KOSSOWSKI, *O pewnej metodzie rozwiązywania równań ze współczynnikami w postaci wielomianowej i jej zastosowaniach w technice*, Rozpr. dokt., PW, 1972.

Резюме

ПЛИТОЧНЫЙ ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ РЕШЕТЧАТЫХ РОСТВЕРКОВ

Предметом работы является теория n -того приближения плиточного продольного изгиба произвольных решетчатых ростверков. Составляет она развитие теории первого приближения приведенной в работе [2] Г. Фронцкевичом. Она позволяет решить задачу продольного изгиба растверков с произвольной точностью. В работе обсуждается математическая

модель рoстверка, будучая основой этой теории. Эта модель позволяет описать задачу продольного изгиба при помощи сравнительно простых алгебраических уравнений. Работа иллюстрирована примерами полных рoстверков, для которых определены значения критических сил и виды продольного изгиба.

SUMMARY

PLATE BUCKLING OF GRIDS

The paper deals with the n -th approximation plate buckling theory of arbitrary shape of grids. It is an extension of first approximation theory given by FRĄCKIEWICZ [2] and permits to solve the grid buckling problem with an arbitrary accuracy. The mathematical model of the grid—the basis of this theory—is discussed in detail. By use of this model the buckling problem may be reduced to relatively simple algebraic equations. For illustration of the theory the examples for polar grid are presented. The values of critical forces and forms of buckling are evaluated.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 marca 1974 r