

DRGANIA SAMOWZBUDNE SZCZOTKI W UKŁADZIE SZCZOTKA-KOMUTATOR

ANDRZEJ ŁOPATA (KRAKÓW)

W pracy rozpatrzono możliwość powstawania drgań samowzbudnych szczotki na skutek zmieniającego się współczynnika tarcia. W oparciu o analizę równania ruchu szczotki podano warunki asymptotycznej stateczności zanikania drgań oraz, w przypadku gdy ruch szczotki jest okresowy, określono warunki, przy których amplituda drgań jest najmniejsza.

Prawidłowa praca maszyn elektrycznych komutatorowych zależy od wielu procesów zachodzących w czasie pracy tych maszyn. Jednym z podstawowych procesów jest proces komutacji. Zagadnienie komutacji może być rozpatrywane z punktu widzenia elektrotechniki, technologii i mechaniki. Z punktu widzenia mechaniki bardzo ważną rolę odgrywają dynamiczne własności układu szczotka-komutator.

W analizie własności dynamicznych istotny jest problem stabilności pracy szczotek. Przy niestabilnej pracy szczotki i szczotkotrzymacze wykonują drgania, które pogarszają komutację, a także powodują szybkie zużywanie się szczotek. Przeprowadzając analizę dynamiczną szczotki należy uwzględnić własności sprężysto-tarciowe układu szczotka-komutator. Wiąże się to z możliwością powstawania drgań samowzbudnych w takim układzie. Przyczyną drgań tego typu jest zmienna siła tarcia. Siła ta zależy m.in. od prędkości obrotowej komutatora, docisku, gęstości prądu, czasu pracy szczotek. Najbardziej istotna jest tu zależność siły tarcia od prędkości.

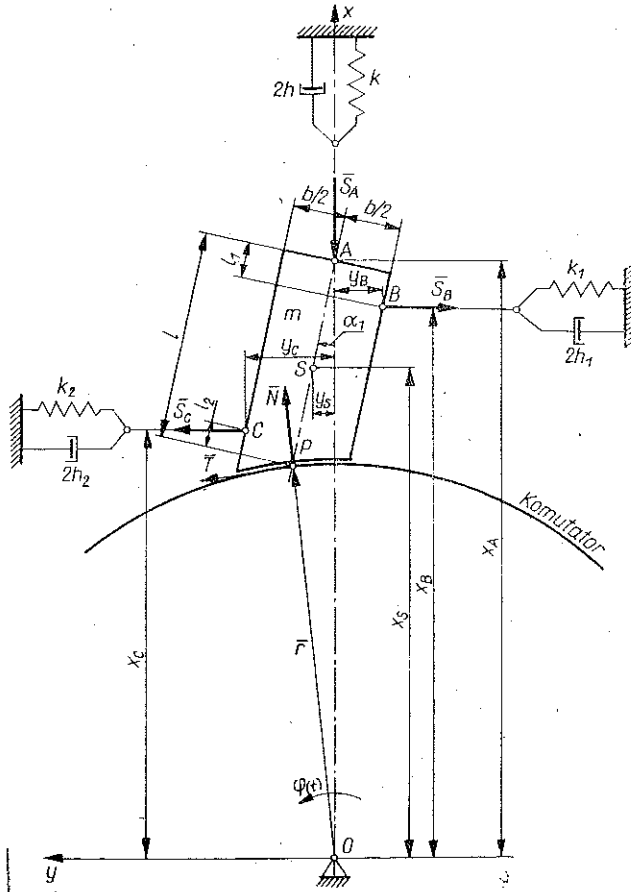
Tematem niniejszej pracy jest analiza układu tarciowego szczotka-komutator ze względu na możliwość występowania w takim układzie drgań samowzbudnych. Celem jest określenie takich parametrów układu, ażeby drgania szczotki były jak najmniejsze.

1. RÓWNANIE RUCHU SZCZOTKI

Układ szczotka-komutator opisano modelem matematycznym, w którym, ze względu na więzy narzucone na ruch szczotki, przyjęto jeden stopień swobody.

W modelu przedstawionym na rys. 1 uwzględniono siły sprężyste o współczynnikach sprężystości k_1 i k_2 występujące w zamocowaniu szczotki w szczotkotrzymaczu oraz tłumienie wiskotyczne o współczynnikach $2h_1$ i $2h_2$. Docisk szczotki do komutatora realizowany jest przez sprężynę o współczynniku sprężystości k , a tłumienie — tłumikiem wiskotycznym o współczynniku $2h$. Charakterystyki sił sprężystości i tłumienia przyjęto jako liniowe.

Podczas drgań szczotki powierzchnia styku szczotki z komutatorem zmienia się i obszary styku zmieniają swoje położenie. Ma to istotny wpływ na przebieg komutacji. Zmiana wielkości powierzchni styku na skutek drgań ma wpływ na przewodnictwo prądu. Likwidacja drgań mechanicznych poprawia w dużym stopniu pracę szczotki i w związku z tym jakość komutacji.



Rys. 1

W analizie drgań mechanicznych przyjęto uproszczenie odnośnie wielkości powierzchni styku. Założono, że szczotka styka się z komutatorem wzdłuż prostej tworzącej komutatora. Ślad linii styku oznaczono na rys. 1 punktem 'P', leżącym w połowie szerokości szczotki. Siłę reakcji pochodzącą od komutatora rozłożono na dwie składowe: siłę normalną \bar{N} i siłę tarcia \bar{T} . Ponadto oznaczono przez \bar{r} promień komutatora.

Równanie ruchu szczotki wyprowadzono na podstawie równań Lagrange'a drugiego rodzaju, przyjmując za współzrzedną uogólnioną kąt α_1 obrotu szczotki wokół osi przechodzącej przez punkt A, przy czym

$$(1.1) \quad \alpha_1 = \alpha_0 + \alpha,$$

gdzie α_0 jest kątem określającym położenie równowagi, wokół którego odbywają się drgania szczotki, opisane kątem α (rys. 2). Energia kinetyczna w ruchu płaskim szczotki o masie m wyraża się wzorem:

$$(1.2) \quad E = \frac{1}{2} m (\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2) + \frac{1}{2} I_s \dot{\alpha}^2,$$

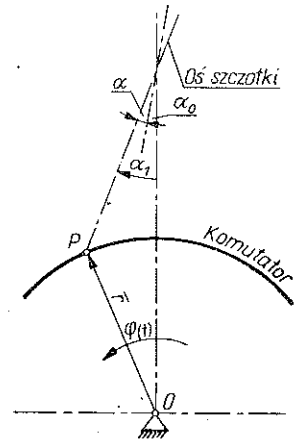
w którym I_s jest momentem bezwładności szczotki względem osi przechodzącej przez środek masy i prostopadłej do płaszczyzny ruchu komutatora.

Współrzędne środka masy szczotki są określone wzorami:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} x_s &= \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_1} + \frac{1}{2} l \cos \alpha_1, \\ y_s &= \frac{1}{2} l \sin \alpha_1, \end{aligned}$$

natomiast współrzędne punktów przyłożenia sił \bar{S}_A , \bar{S}_B , \bar{S}_C , \bar{T} i \bar{N} wzorami:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} x_A &= \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_1} + l \cos \alpha_1, \\ y_B &= - \left(\frac{b}{2} \cos \alpha_1 - l_1 \sin \alpha_1 \right), \\ y_C &= (l - l_2) \sin \alpha_1 + \frac{b}{2} \cos \alpha_1, \\ x_p &= \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_1}, \quad y_p = l \sin \alpha_1. \end{aligned}$$



Rys. 2

Równanie ruchu szczotki podajemy bez wyprowadzenia; ma ono postać

$$(1.5) \quad \left[I_s + \frac{1}{4} m l^2 + m l^3 \sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1 \left(l \frac{\cos \alpha_1}{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_1} + \frac{1}{\sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_1}} \right) \right] \ddot{\alpha}_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} m l^3 \frac{\sin \alpha_1}{(r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_1)^2} \left\{ \cos^2 \alpha_1 [2r^2 (l \cos \alpha_1 + \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_1}) - \right.$$

$$- l^2 \sin^2 \alpha_1 \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_1}] + \sin^2 \alpha_1 [l^2 \sin^2 \alpha_1 (2l \cos \alpha_1 +$$

$$+ \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_1}) - r^2 (3l \cos \alpha_1 + 2 \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_1})] \left. \right\} \dot{\alpha}_1^2 +$$

$$+ \left\{ 2h \left(\frac{l^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_1}} + l \sin \alpha_1 \right) + 2h_1 \left(\frac{b}{2} \sin \alpha_1 + l_1 \cos \alpha_1 \right) + \right.$$

$$+ 2h_2 \left[(l - l_2) \cos \alpha_1 - \frac{b}{2} \sin \alpha_1 \right]^2 \left. \right\} \dot{\alpha}_1 + k \left(a_0 - \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_1} - \right.$$

$$- l \cos \alpha_1 \left) \left(\frac{l^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_1}} + l \sin \alpha_1 \right) + k_1 \left(l_1 \sin \alpha_1 - \frac{b}{2} \cos \alpha_1 - b_0 \right) \times$$

$$\times \left(\frac{b}{2} \sin \alpha_1 - l_1 \cos \alpha_1 \right) + k_2 \left[(l - l_2) \sin \alpha_1 + \frac{b}{2} \cos \alpha_1 - c_0 \right] \left[(l - l_2) \cos \alpha_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{b}{2} \sin \alpha_1 \right] - \left(\frac{l^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_1}} + l \sin \alpha_1 \right) S_0 - r l T \frac{\cos \alpha_1}{\sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_1}} = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_0 &= \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_0} + l \cos \alpha_0, \\ b_0 &= -\left(\frac{b}{2} \cos \alpha_0 - l_1 \sin \alpha_0\right), \\ c_0 &= (l - l_2) \sin \alpha_0 + \frac{b}{2} \cos \alpha_0 \end{aligned}$$

oraz gdzie S_0 oznacza wstępny docisk sprężyny, l, l_1, l_2, b wymiary szczotki.

Analiza otrzymanego równania nastęrcza duże trudności. Trudności tych można uniknąć upraszczając równanie ruchu przy założeniu małych drgań szczotki wokół położenia określonego kątem α_0 . Drgania wokół tego położenia opisuje kąt α . W związku z tym zlinearyzowano funkcje (1.3) i (1.4) w otoczeniu α_0 otrzymując następujące zależności na współrzędne środka masy i współrzędne punktów przyłożenia sił:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} x_s &= a_1 - a_2 \alpha, & y_s &= a_3 + a_4 \alpha, \\ x_A &= a_0 - (a_2 + a_3) \alpha, & y_B &= b_0 + a_5 \alpha, & y_C &= c_0 + a_6 \alpha, \\ x_p &= a_1 - a_4 - 2(a_2 - a_3) \alpha, & y_p &= 2a_3 + 2a_4 \alpha, \end{aligned}$$

gdzie

$$(1.7) \quad \begin{aligned} a_1 &= \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_0} + \frac{1}{2} l \cos \alpha_0, & a_4 &= \frac{1}{2} l \cos \alpha_0, \\ a_2 &= \frac{1}{2} l^2 \frac{\sin 2\alpha_0}{\sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_0}} + \frac{1}{2} l \sin \alpha_0, & a_5 &= \frac{1}{2} b \sin \alpha_0 + l_1 \cos \alpha_0, \\ a_3 &= \frac{1}{2} l \sin \alpha_0, & a_6 &= (l - l_2) \cos \alpha_0 - \frac{1}{2} b \sin \alpha_0. \end{aligned}$$

Energia kinetyczna szczotki wyrazi się teraz wzorem

$$(1.8) \quad E = \frac{1}{2} [I_s + m(a_2^2 + a_4^2)] \dot{\alpha}^2.$$

Siła tarcia występująca między szczotką a komutatorem może się zmieniać na skutek: 1) zmiennego współczynnika tarcia, 2) zmiennego docisku szczotki do komutatora.

Rozważmy tu przypadek pierwszy. Przypadek drugi jest rozpatrzony w pracy[3].

Siłę tarcia przedstawimy wzorem

$$(1.9) \quad T = N\psi(u),$$

gdzie $\psi(u)$ jest charakterystyką tarcia zależną od prędkości względnej u a $N = \text{const}$. Rzutując siły T i N na osie układu odniesienia, otrzymujemy

$$(1.10) \quad \begin{aligned} F_x &= T_x + N_x = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_1} N - \frac{l}{r} T \sin \alpha_1, \\ F_y &= T_y + N_y = \frac{l}{r} N \sin \alpha_1 + \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_1} T. \end{aligned}$$

Funkcje (1.10) zlinearyzowano, rozwijając je w szereg potęgowy w otoczeniu punktu α_0 . Prędkość względna w tym punkcie wynosi u_0 . Pomijając wyrazy stopnia wyższego od jeden znajdziemy wzory na siły F_x i F_y w postaci

$$(1.11) \quad \begin{aligned} F_x &= \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_0} N - \frac{l}{r} N \mu_0 \sin \alpha_0 - \frac{l}{r} N \psi'_0 (\sin \alpha_0) (u - u_0), \\ F_y &= \frac{l}{r} N \sin \alpha_0 + \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_0} N \mu_0 + \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2 \alpha_0} N \psi'_0 (u - u_0), \end{aligned}$$

gdzie

$$\mu_0 = |\psi(u_0)|, \quad \psi'_0 = \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0).$$

Prędkość względna wyraża się wzorem

$$(1.12) \quad u = \omega r - l \dot{\alpha},$$

przy czym ω oznacza prędkość kątową komutatora o promieniu r , $\dot{\alpha}$ bezwzględną prędkość kątową szczotki wokół punktu A oraz l długość szczotki.

Dla położenia określonego kątem α_0 (w położeniu tym prędkość $\dot{\alpha}_0 = 0$) prędkość względna $u_0 = \omega r$ i $u - u_0 = -l \dot{\alpha}$.

Po podstawieniu (1.7) i (1.12) otrzymamy

$$(1.13) \quad \begin{aligned} F_x &= \frac{1}{r} (a_1 - a_4) N - \frac{2}{r} a_3 N \mu_0 + \frac{2}{r} a_3 l N \psi'_0 \dot{\alpha}, \\ F_y &= \frac{2}{r} a_3 N + \frac{1}{r} (a_1 - a_4) N \mu_0 - \frac{l}{r} (a_1 - a_4) N \psi'_0 \dot{\alpha}. \end{aligned}$$

Uwzględniając teraz pozostałe siły przyłożone do szczotki obliczono siłę uogólnioną i przyjmując oznaczenia

$$(1.14) \quad \begin{aligned} b_1 &= \frac{2h(a_2 + a_3)^2 + 2h_1 a_5^2 + 2h_2 a_6^2 + \frac{1}{r} [4a_3(a_2 - a_3) + 2a_4(a_1 - a_4)] l N \psi'_0}{I_s + m(a_2^2 + a_4^2)}, \\ b_2 &= \frac{k(a_2 + a_3)^2 + k_1 a_5^2 + k_2 a_6^2}{I_s + m(a_2^2 + a_4^2)}, \\ b_3 &= - \frac{[4a_3 a_4 - 2(a_2 - a_3)(a_1 - a_4)] N + [4a_3(a_2 - a_3) + 2a_4(a_1 - a_4)] \mu_0 N + S_0(a_2 + a_3) r}{[I_s + m(a_2^2 + a_4^2)] r} \end{aligned}$$

oraz podstawiając

$$(1.15) \quad \alpha = z + \frac{b_3}{b_2}, \quad \dot{\alpha} = \dot{z}, \quad \ddot{\alpha} = \ddot{z},$$

z równań Lagrange'a drugiego rodzaju otrzymano równanie ruchu szczotki w postaci

$$(1.16) \quad \ddot{z} + b_1 \dot{z} + b_2 z = 0.$$

Otrzymane równanie ruchu jest przedmiotem dalszej analizy.

2. STATECZNOŚĆ POŁOŻENIA RÓWNOWAGI SZCZOTKI

Zajmiemy się z kolei określeniem warunków stateczności położenia równowagi szczotki. Położenie równowagi odpowiada na płaszczyźnie fazowej punktowi osobliwemu. W celu określenia stateczności tego punktu wystarczy ograniczyć się do badania części liniowych równań różniczkowych ruchu.

Korzystając z kryterium Routha-Hurwitza, otrzymamy następujące warunki asymptotycznej stateczności:

$$(2.1) \quad b_1 > 0, \quad b_2 > 0,$$

gdzie b_1 i b_2 są określone za pomocą wzoru (1.14).

W dalszych rozważaniach celowe jest rozpatrzenie trzech przypadków: $\psi'_0 = 0$, $\psi'_0 > 0$ i $\psi'_0 < 0$. Przypadki te odpowiadają odpowiednio charakterystykom $\psi(u)$: stałej, rosnącej i malejącej.

1. Jeżeli $\psi(u) = \text{const}$, to $\psi'_0 = 0$ i znajdziemy

$$(2.2) \quad b_1 = \frac{2h(a_2 + a_3)^2 + 2h_1 a_5^2 + 2h_2 a_6^2}{I_s + m(a_2^2 + a_4^2)},$$

$$b_2 = \frac{k(a_2 + a_3)^2 + k_1 a_5^2 + k_2 a_6^2}{I_s + m(a_2^2 + a_4^2)}.$$

Z warunku (2.1) wynika, że

$$(2.3) \quad 2h(a_2 + a_3)^2 + 2h_1 a_5^2 + 2h_2 a_6^2 > 0,$$

$$k(a_2 + a_3)^2 + k_1 a_5^2 + k_2 a_6^2 > 0,$$

gdzie

$$h > 0, \quad h_1 > 0, \quad h_2 > 0, \quad k > 0, \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0.$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$(2.4) \quad A = 2h(a_2 + a_3)^2 + 2h_1 a_5^2 + 2h_2 a_6^2 > 0,$$

$$C = k(a_2 + a_3)^2 + k_1 a_5^2 + k_2 a_6^2 > 0.$$

Ponieważ nierówności (2.4) są zawsze spełnione, przeto punkt osobliwy jest w przypadku pierwszym asymptotycznie stateczny.

2. Jeżeli charakterystyka tarcia $\psi(u)$ jest funkcją rosnącą, to $\psi'_0 > 0$ oraz

$$(2.5) \quad b_1 = \frac{2h(a_2 + a_3)^2 + 2h_1 a_5^2 + 2h_2 a_6^2 + \frac{1}{r} [4a_3(a_2 - a_3) + 2a_4(a_1 - a_4)] IN \psi'_0}{I_s + m(a_2^2 + a_4^2)},$$

$$b_2 = \frac{k(a_2 + a_3)^2 + k_1 a_5^2 + k_2 a_6^2}{I_s + m(a_2^2 + a_4^2)}.$$

Z warunku (2.1) wynika, że

$$(2.6) \quad 2h(a_2 + a_3)^2 + 2h_1 a_5^2 + 2h_2 a_6^2 + \frac{1}{r} [4a_3(a_2 - a_3) + 2a_4(a_1 - a_4)] IN \psi'_0 > 0,$$

$$k(a_2 + a_3)^2 + k_1 a_5^2 + k_2 a_6^2 > 0,$$

gdzie $N = \text{const} > 0$.

Wprowadźmy oznaczenie

$$(2.7) \quad B = \frac{1}{r} [4a_3(a_2 - a_3) + 2a_4(a_1 - a_4)] IN > 0.$$

Ponieważ nierówności (2.4) i (2.7) są zawsze spełnione oraz $\psi'_0 > 0$, przeto punkt osobliwy w przypadku drugim jest również asymptotycznie stateczny.

3. Jeżeli charakterystyka tarcia $\psi(u)$ jest funkcją malejącą, to $\psi'_0 < 0$ oraz b_1 i b_2 określone są wzorem (2.5). Korzystając z wcześniej określonych stałych A , B i C , otrzymujemy z warunku (2.1) następujące nierówności:

$$(2.8) \quad A + B\psi'_0 > 0, \quad C > 0.$$

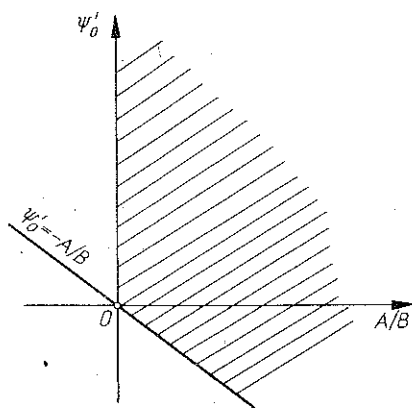
Nierówność (2.8)₂ jest spełniona zawsze, natomiast z (2.8)₁ otrzymujemy

$$(2.9) \quad \psi'_0 > -\frac{A}{B},$$

gdzie $\psi'_0 < 0$.

Nierówność ta jest spełniona również dla przypadków, gdy $\psi'_0 = 0$ oraz $\psi'_0 > 0$. Stąd wniosek, że wyznacza ona obszar asymptotycznej stateczności punktu osobliwego.

Wykreślmy w układzie odniesienia $(\psi'_0, A/B)$ krzywą $\psi'_0 = -A/B$ (rys. 3). Obszar zakreskowany odpowiada asymptotycznej stateczności punktu osobliwego. Stała ($\psi'_0 = 0$) lub rosnąca ($\psi'_0 > 0$) charakterystyka tarcia $\psi(u)$ zapewnia zawsze asymptotyczną stateczność punktu osobliwego. Przy malejącej charakterystyce tarcia ($\psi'_0 < 0$) punkt osobliwy jest asymptotycznie stateczny tylko przy odpowiednim doborze stałych A , B i C , tzn. przy odpowiednim doborze parametrów układu takich, jak tłumienie, sprężystość, promień komutatora i wymiary szczotek. W praktyce prawidłowy dobór szczotek zależy od wielu czynników, z których istotne znaczenie mają czynniki następujące: prędkość obwodowa komutatora, gęstość prądu przepływającego przez szczotki (w szczególności udary prądowe), temperatura komutatora, charakter obciążenia układu elektromechanicznego oraz środowisko, w którym pracują szczotki. Z tych względów bardzo ważne jest ściśle przestrzeganie technologii podczas produkcji szczotek oraz dokładne sprawdzanie surowców materiału szczotkowego.



Rys. 3

Spełnienie powyższych wymagań z równoczesnym uzyskaniem charakterystyk tarcia odpowiadających nierówności (2.9) napotyka w praktyce na duże trudności. W związku z tym trudno jest zapewnić takie warunki pracy, ażeby szczotka nie wykonywała drgań. Można jednak dobrać parametry układu w taki sposób, żeby drgania były ograniczone.

Rozważmy przypadek, gdy nierówność (2.9) nie jest spełniona. Następuje wówczas wzrost amplitudy drgań. Narastające drgania ustalają się dążąc do cyklu granicznego, który na płaszczyźnie fazowej odpowiada rozwiązaniu okresowemu równania różniczkowego ruchu.

Chcąc przeanalizować proces narastania i ustalania się drgań, nie można ograniczać się do liniowego przybliżenia charakterystyki tarcia $\psi(u)$. W związku z tym funkcje (1.10), określające rzuty sił tarcia i nacisku, rozwinięto w szereg potęgowy Taylora w otoczeniu punktu określonego kątem α_0 . Pomijając wyrazy wyższe od trzeciego stopnia, otrzymano równanie różniczkowe ruchu szczotki w postaci

$$(2.10) \quad A_0 \ddot{z} + (A + B\psi'_0) \dot{z} - \frac{1}{2} l B\psi''_0 \dot{z}^2 + \frac{1}{6} l^2 B\psi'''_0 \dot{z}^3 + Cz = 0,$$

gdzie

$$A_0 = I_s + m(a_2^2 + a_4^2) > 0,$$

$$A = 2h(a_2 + a_3)^2 + 2h_1 a_5^2 + 2h_2 a_6^2 > 0,$$

$$B = \frac{1}{r} [4a_3(a_2 - a_3) + 2a_4(a_1 - a_4)] l N > 0, \quad N = \text{const} > 0,$$

$$C = k(a_2 + a_3)^2 + k_1 a_5^2 + k_2 a_6^2 > 0,$$

$$h > 0, \quad h_1 > 0, \quad h_2 > 0, \quad k > 0, \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0,$$

$$\psi'_0 = \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0), \quad \psi''_0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}(u_0), \quad \psi'''_0 = \frac{\partial^3 \psi}{\partial u^3}(u_0).$$

Jeżeli w równaniu (2.10) współczynniki przy \dot{z} i \dot{z}^3 są dodatnie, to rozwiązanie tego równania dąży do zera przy $t \rightarrow \infty$ [4]. Znak współczynnika przy \dot{z}^2 nie ma wpływu na wynik analizy.

Z kolei rozpatrzmy przypadek, gdy nie są spełnione warunki asymptotycznej stateczności punktu osobliwego, a więc przyjmujemy, że $\psi'_0 < 0$ i $A + B\psi'_0 < 0$. Pochodna ψ'''_0 może być dodatnia lub ujemna. Rozważania przeprowadzimy przy założeniu, że $\psi'''_0 > 0$.

Rozpatrzmy proces narastania i ustalania się drgań szczotki, analizując równanie różniczkowe ruchu (2.10). Dla otrzymania przybliżonego rozwiązania okresowego tego równania zastosowano metodę uśredniania VAN DER POLA.

Równanie (2.10) można napisać w postaci

$$(2.11) \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = f(\dot{z}),$$

gdzie

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{A_0}}, \quad f(z) = -\frac{A_1^*}{A_0} z - \frac{A_2^*}{A_0} z^2 - \frac{A_3^*}{A_0} z^3,$$

$$A_1^* = A + B\psi'_0 < 0, \quad A_2^* = -\frac{1}{2} l B\psi''_0, \quad A_3^* = \frac{1}{6} l^2 B\psi'''_0 > 0.$$

Szukamy rozwiązania okresowego w postaci

$$(2.12) \quad z = a(t) \cos \varphi, \quad \varphi = \omega_0 t - \xi(t).$$

Po obliczeniu amplitudy drgań $a(t)$ i kąta przesunięcia fazowego $\xi(t)$, przy warunkach początkowych $t=0$, $a=a_0$, $\xi=0$, otrzymujemy

$$(2.13) \quad a = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\frac{A_1^*}{3A_3^*} \left[\frac{a_0^2}{\left(\frac{4A_1^*}{3A_3^* \omega_0^2} + a_0^2 \right) e^{A_1^* t} - a_0^2} \right]},$$

$$\xi = 0$$

oraz rozwiązanie okresowe równania (2.11) w postaci

$$(2.14) \quad z = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\frac{A_1^*}{3A_3^*} \left[\frac{a_0^2}{\left(\frac{4A_1^*}{3A_3^* \omega_0^2} + a_0^2 \right) e^{A_1^* t} - a_0^2} \right]} \cos \omega_0 t.$$

Rozwiązanie (2.14) przedstawia drgania okresowe szczotki ze zmieniającą się w czasie amplitudą. Przy $t \rightarrow \infty$ amplituda drgań dąży do amplitudy ustalonej, odpowiadającej cyklowi granicznemu.

Amplitudę drgań ustalonych przedstawia wzór

$$(2.15) \quad a_{\text{ust}} = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{-\frac{A_1^*}{3A_3^*}},$$

gdzie $A_1^* < 0$, $A_3^* > 0$.

Amplitudę (2.15) wyrazimy przez stałe A i B zależne od parametrów układu szczotka-komutator i otrzymamy

$$(2.16) \quad a_{\text{ust}} = \frac{2}{\omega_0 l} \sqrt{-\frac{2(A + B\psi'_0)}{B\psi'''_0}}.$$

Jeżeli punkt osobliwy jest niestacyczny, tzn. $\psi'_0 < 0$ i $A + B\psi'_0 < 0$, to szczotka wykonuje drgania z amplitudą (2.16), jeżeli pochodna $\psi''_0 > 0$. Przypadek, gdy pochodna $\psi''_0 > 0$ nie może być brany pod uwagę, gdyż wówczas punkt osobliwy jest asymptotycznie stacyczny i drgania są zanikające.

Drgania okresowe szczotki w cyklu granicznym pogarszają pracę układu szczotka-komutator. Prowadzi to do szybkiego zużywania się szczotek. W celu poprawienia pracy układu i zwiększenia żywotności szczotek należy dobrać parametry układu

w taki sposób, aby amplituda drgań samowzbudnych była jak najmniejsza. Amplituda (2.16) równa jest zeru dla $\psi'_0 = -A/B$. Wynika z tego, że najmniejsze drgania szczotek występują przy opadającej charakterystyce tarcia określonej przez parametry układu szczotka-komutator stosunkiem A/B . Jeżeli więc jest możliwe ze względów technologicznych, takie dobranie materiału szczotki, aby zapewnić kształt charakterystyki tarcia $\psi(u)$ określony pochodną $\psi'_0 = -A/B$, to będzie to najkorzystniejsze dla pracy układu szczotka-komutator.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. BALLO, V. ORAVSKY, *The stability of carbon brushes in electric rotating machines*, Sympozjum na temat dynamiki konstrukcji, 1, Łańcut 1968.
2. W. BOGUSZ, *Problem of the limit cycle for nonlinear systems*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 4, 1962.
3. A. ŁOPATA, *Zanikanie drgań szczotki przy zmiennym docisku do komutatora*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych [złożono do druku].
4. K. SZPUNAR, *Drgania swobodne układu o jednym stopniu swobody przy silnie nieliniowym tłumieniu*, Zeszyty Naukowe AGH, 28, Elektryfikacja i Mechanizacja Górnictwa i Hutnictwa, 7, 1961.

Резюме

АВТОКОЛЕБАНИЯ ЩЕТКИ В СИСТЕМЕ ЩЕТКА-КОММУТАТОР

В работе рассмотрена возможность возникновения автоколебаний щетки в следствие изменяющегося коэффициента трения. Опираясь на анализ уравнения движения щетки даются условия асимптотической устойчивости затухания колебаний, а также в случае, когда движение щетки является периодическим, определены условия, при которых амплитуда колебаний является наименьшей.

SUMMARY

THE SELF-EXCITED VIBRATIONS OF BRUSH IN A SYSTEM BRUSH-COMMUTATOR

In a paper a possibility for initiation of self-excited vibrations of brush in consequence of variation of friction coefficient is considered. Basing on analysis of the equations of motion for brush the asymptotic stability conditions for decaying of vibrations are given and in a case of periodic motion of brush the conditions are prescribed under which the amplitude of vibrations is the smallest one.

INSTYTUT MECHANIKI I WIBROAKUSTYKI AGH
ZAKŁAD MECHANIKI TECHNICZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 kwietnia 1974 r.