

WPLYW PODPARĆ I ANALIZA ROZKŁADU LINII WĘZŁOWYCH W DRGANIACH GIĘTNYCH PRĘTÓW I PŁYT WALCOWYCH

JAN RYLL-NARDZEWSKI (WARSZAWA)

Praca omawia dwa zjawiska mające duże znaczenie praktyczne w rezonansowych metodach badania materiałów. W pierwszej części pracy autor analizuje wpływ rozmieszczenia punktów podparcia i ich sztywności na częstotliwość drgań giętnych cienkiego pręta. Zbadano przypadki podparcia pręta w węzłach, na końcu próbki jak też przypadki pośrednie. Uzyskano zgodność wyników obliczeń z rezultatami pomiarowymi. W drugiej części autor stwierdza, że średnica linii węzłowej w przypadku drugiego rezonansu drgań giętnych grubej płyty kołowej swobodnie podpartej zależy w dużym stopniu od stałych sprężystości i jej kształtu. Autor porównuje wyniki obliczeń z eksperymentem i wyjaśnia przyczyny rozbieżności.

1. WSTĘP

W rezonansowych metodach wyznaczania stałych sprężystości w próbkach — w czasie pomiaru wzbudza się drgania rezonansowe oraz mierzy się ich częstotliwość. Znakając wymiary próbki oraz rodzaj drgań można określić stałe sprężystości badanego materiału [4, 8, 9, 13, 15 i 19].

Metody rezonansowe umożliwiają też określenie wielkości współczynnika tarcia wewnętrznego w badanych ośrodkach na podstawie pomiaru szerokości krzywej rezonansowej albo przebiegu zanikania drgań w próbce w funkcji czasu.

W pracach eksperymentalnych stosuje się różne systemy mocowania próbek. Najczęściej stosuje się mocowanie próbek w węzłach i taki sposób mocowania odpowiada drganiom swobodnym. W niektórych przypadkach stosuje się sztywne zamocowanie próbki na jej obrzeżu. Np. pręty można zamocować sztywno na jednym końcu [11 i 12] lub na obu końcach [5]. Ostatnio stosuje się także w badaniach eksperymentalnych systemy, w których próbki prętowe są swobodnie podparte na końcach [2].

Wszystkie wymienione sposoby mocowania próbek odpowiadają różnym warunkom brzegowym. W rzeczywistych warunkach eksperymentu nie udaje się w pełni odtworzyć warunków zakładanych w rozważaniach teoretycznych.

W przypadku podpierania próbki w węzłach drgań trzeba znać rozmieszczenie linii węzłowych na powierzchni próbki oraz trzeba uwzględnić fakt, że podpory nie są idealnie punktowe i że ich kontakt z próbką odbywa się na pewnej powierzchni. Należy również pamiętać, że pojęcie węzła i linii węzłowej definiowane jako punktu lub linii, która nie przemieszcza się w przestrzeni w funkcji czasu, może być stosowane tylko w odniesieniu od prętów lub płyt nieskończenie cienkich.

W zastosowaniu do próbek o skończonej grubości trzeba stosować pojęcie quasi-węzłów, tj. obszarów, w których amplitudy drgań osiągają minimalne wartości. Jak to wykazały badania własne, w przypadku próbek dostatecznie cienkich, wpływ podparć związanych z tym zjawiskiem może być pominięty z dokładnością wystarczającą dla potrzeb praktyki. W systemach, w których próbka jest swobodnie podparta na obrzeżu, skończona sztywność podpory wpływa w bardzo dużym stopniu na warunki drgań próbki.

W przypadku próbek sztywno zamocowanych w rzeczywistych warunkach pomiarowych nie udaje się stosować warunków idealnych. Problem ten został przeanalizowany teoretycznie i sprawdzony eksperymentalnie, m.in. dla przypadku drgań giętnych pręta zamocowanego wspornikowo [11 i 12].

W niniejszej pracy przedstawiono niektóre wyniki obliczeń i pomiarów dotyczących dwóch pierwszych przypadków mocowania próbek (tj. próbek swobodnie podpartych w węzłach, na obrzeżu oraz w przypadkach pośrednich).

W drugim punkcie pracy przedstawiono wyniki badań związanych z rozkładem linii węzłowych na powierzchni płyty kołowej dla drugiego rezonansu drgań giętnych wybranych materiałów o różnych kształtach próbek.

2. BADANIA DRGAŃ GIĘTNYCH PRĘTÓW

W literaturze jest stosunkowo mało prac poświęconych wpływowi miejsca i sposobu zamocowania próbki na parametry drgań swobodnych. W mechanice przy rozpatrywaniu drgań belek rozpatruje się takie przypadki, kiedy belka o określonej sztywności jest oparta na swoich końcach, na podporach o określonej sztywności (por. [8 i 17]).

Opierając się na danych, opublikowanych przez SOLECKIEGO [17], a zaczerpniętych z prac źródłowych [1], postanowiono eksperymentalnie sprawdzić wpływ sztywności podpór na drgania pręta drgającego falami giętnymi. Badano pręt z mosiądzu o długości 500 mm i o przekroju $12 \times 12 \text{ mm}^2$.

Podstawowa częstotliwość drgań własnych takiej belki przy założeniu podpór nieskończenie sztywnych wynosi

$$(2.1) \quad f = \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}},$$

gdzie w omawianym przypadku

$$l = 50 \text{ cm}, \quad E = 1 \cdot 10^2 \text{ kGcm}^{-2}.$$

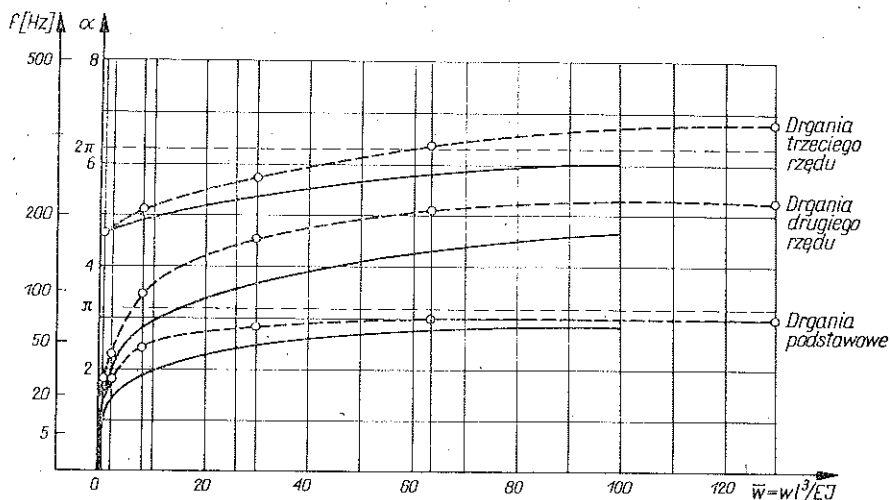
$$J = 0,173 \text{ cm}^4, \quad m = 1,18 \cdot 10^{-5} \text{ kGcm};$$

stąd $f = 76 \text{ Hz}$.

Dla przypadku podpory o skończonej sztywności częstotliwość drgań własnych wyraża się za pomocą wzoru

$$(2.2) \quad f_n = \frac{\alpha_n^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}},$$

gdzie α_n oznacza wartość współczynników dla n -tego rezonansu podaną przez SOLECKIEGO w postaci graficznej (rys. 1). Na wykresie oznaczono te funkcje linią



Rys. 1. Wartość współczynnika α w zależności od sztywności podparć dla belki podpartej na końcach. Linia ciągłą oznaczono wyniki obliczeń teoretycznych [17], a punkty pomiarowe połączono linią przerywaną

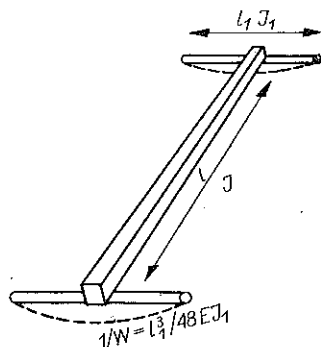
ciągłą, gdzie \bar{W} jest współczynnikiem określającym sztywność podparcy. Jako podparć używano prętów mosiężnych o przekroju kołowym, o średnicach od 1,5 do 16 mm i długości 118 mm.

Współczynnik \bar{W} , zależnie od długości badanej belki l i długości podparcy l_1 oraz od momentów bezwładności belki J i podparcy J_1 , można określać następująco (rys. 2):

$$(2.3) \quad \bar{W} = \frac{W l^3}{EJ} = 48 \left(\frac{l}{l_1} \right)^3 \left(\frac{J_1}{J} \right),$$

gdzie ugięcie podparcy sprężystej, spowodowane działaniem siły jednostkowej $1/W$, wynosi

$$(2.4) \quad \frac{1}{W} = \frac{l_1^3}{48 E J_1}$$



Rys. 2. Belka podparta na sprężystych podporach

W tabelicy 1 zestawiono wyniki obliczeń oraz rezultaty pomiarów dla trzech pierwszych rezonansów fal giętnych. Na wykresie rys. 1 zestawiono wartości współczynników α_1 i α_2 z danych źródłowych [17] oraz wyniki uzyskane przez autora na podstawie eksperymentów.

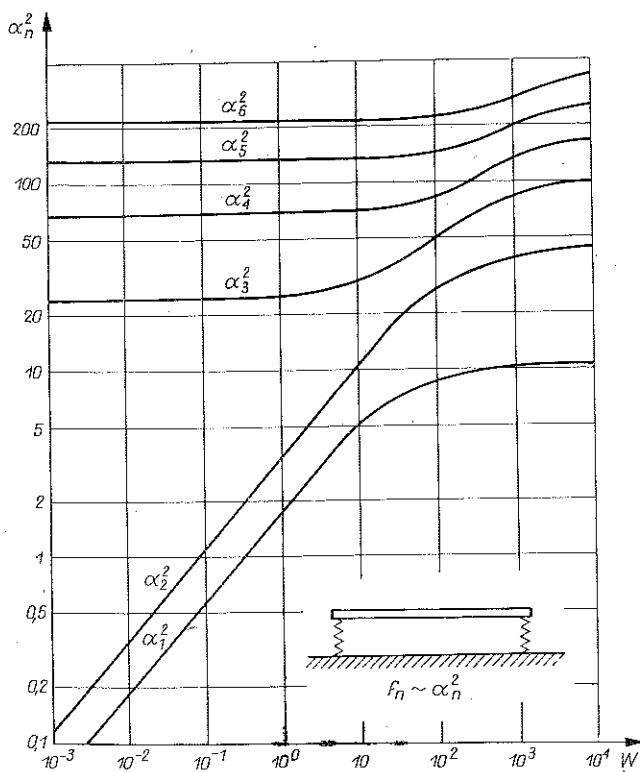
W badaniach pobudzano próbkę za pomocą przetwornika indukcyjnego, do odbioru zaś stosowano przetworniki pojemnościowe. Już po wykonaniu wyżej omówionych pomiarów autor poznał pracę opublikowaną w *B.,K. Technical Review*

Tablica 1

Wpływ sztywności podpór na częstotliwość drgań własnych pręta: trzy pierwsze rezonanse drgań giętnych pręta podpartego na końcach. Pręt mosiężny o przekroju kwadratowym 12×12 mm i długości 500 mm. Podpory mosiężne o przekroju kołowym i długości 118 mm.

\varnothing [mm]	$\overline{W} = \frac{Wl^3}{EJ}$	f_1 [Hz]	α_1	f_2 [Hz]	α_2	f_3 [Hz]	α_3
1,5	0,5	16	1,43	28	1,88	172	4,67
2	1,6	23	1,72	40	2,24	174	4,70
3	8	43,6	2,34	98	3,5	918	5,01
4	25	66,6	2,68	158	4,4	246	5,60
5	63	71,8	2,89	206	5,1	314	6,31
6	130	74,2	2,98	244	5,52	360	6,80
7	242	76	3,10	262	5,78	—	—
8	413	77	3,12	280	5,95	500	7,95
16	6600	78	—	298	6,16	674	8,20

[2] (rys. 3), w której podano zależności teoretyczne, w pracach zaś eksperymentalnych stosowano jako przetwornik nadawczy przetwornik indukcyjny, do odbioru zaś mikrofon pojemnościowy. Innym tekstem źródłowym, w którym analizuje się wpływ podparć, jest praca G. MARTINČEKA [8], w której podano wzory teoretyczne



Rys. 3. Wpływ podparć na częstotliwości drgań giętnych prętów (wg Brüela Kjaera [2])

uzależniająca częstotliwość drgań własnych od miejsca podparcia próbki i sztywności podpór. Punktem wyjścia w rozważaniach Martinčeka jest warunek równowagi momentów w punktach podparcia. Dla pręta o stałym przekroju otrzymuje się równanie

$$(2.5) \quad F_{15}(\lambda_{01}) + b [F_2(\lambda'_{11}) - F_1(\lambda'_{11})] = 0,$$

gdzie

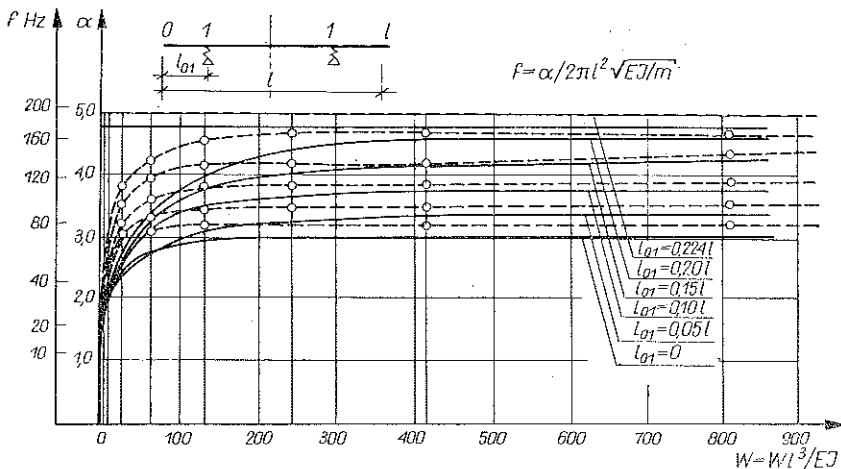
$$(2.6) \quad \lambda = l \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EJ}}, \quad b = \frac{l_{01}}{l'_{11}} = \frac{\lambda_{01}}{\lambda'_{11}}$$

(por. oznaczenia na rys. 4); funkcje F (tzw. funkcje Kolouska) są definiowane następująco:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} F_1(\lambda) &= -\lambda \frac{\text{sh } \lambda - \sin \lambda}{\text{ch } \lambda \cos \lambda - 1}, \\ F_2(\lambda) &= -\lambda \frac{\text{ch } \lambda \sin \lambda - \text{sh } \lambda \cos \lambda}{\text{ch } \lambda \cos \lambda - 1}, \\ F_{15}(\lambda) &= \lambda^2 \frac{\text{sh } \lambda \sin \lambda}{\text{ch } \lambda \cos \lambda + 1}. \end{aligned}$$

Wartości tych funkcji są stabelaryzowane i można je znaleźć w monografii KOŁOUSKA [6 i 7].

Autor przeprowadził serię eksperymentów w celu doświadczalnego sprawdzenia podanych zależności teoretycznych. Wyniki charakteryzujące te pomiary zestawiono w tablicy 2 oraz podano na wykresie (rys. 4). Na wykresie tym liniami ciągłymi oznaczono dane teoretyczne, rezultaty zaś pomiarowe oznaczono punktami połączonymi linią przerywaną.



Rys. 4. Wpływ punktu podparcia i sztywności podpór na częstotliwości drgań giętnych belki. Linia ciągła — dane wg Martinčeka [8], linia przerywana — wyniki pomiarów autora

Tablica 2

Wpływ punktów podparcia i sztywności podpór na częstotliwość drgań giętnych pręta. Pręt mosiężny o przekroju kwadratowym 12×12 mm i długości 500 mm. Podpory mosiężne o przekroju kołowym i długości 118 mm.

\varnothing [mm]	$\overline{W} = \frac{WT^3}{EJ}$	$l_{01} =$	0,224	0,200	0,150	0,100	0,050	0,000
16	6600	f Hz =	170	165	140	116	94	77
		$\alpha =$	4,73	4,64	4,29	3,89	3,50	3,18
8	413	f Hz =	170	163	131	109	90	74
		$J =$	4,73	4,64	4,16	3,81	3,47	3,15
7	243	f Hz =	170	162	131	109	89	74
		$\alpha =$	4,73	4,63	4,16	3,81	3,43	3,15
6	130	f Hz =	170	144	128	105	86	73
		$\alpha =$	4,73	4,52	4,12	3,72	3,38	3,11
5	63	f Hz =	170	129	114	96	81	71
		$\alpha =$	4,73	4,14	3,89	3,58	3,28	3,07
4	25	f Hz =	170	1113	87	79	70	55
		$\alpha =$	4,73	3,87	3,40	3,24	3,05	2,70
5	8	f Hz =	170	53	52	51	47	43
		$\alpha =$	4,73	2,65	2,64	2,61	2,48	2,40
2	1,6	f Hz =	170	24	24	24	24	21
		$\alpha =$	4,73	1,80	1,80	1,80	1,80	1,65
1,5	0,5	f Hz =	170	16	16	16	16	16
		$\alpha =$	4,73	1,45	1,45	1,45	1,45	1,45

Na podstawie uzyskanych wyników badań eksperymentalnych można stwierdzić, że w przypadku układu, w którym podpira się próbkę w węzle, małe przesunięcie punktu podparcia poza węzeł w niewielkim stopniu wpływa na częstotliwość drgań własnych próbki; jednakże w przypadku większych przesunięć, szczególnie w przypadku podparć o małej sztywności, zmiana częstotliwości drgań belki może być bardzo duża.

Jak to wynika z przeprowadzonych pomiarów (tablica 2) przesunięcie punktów podparcia pręta o wielkości 2,4% (z położenia $l_{01} = 0,224$ do położenia $l_{01} = 0,200$) dla podpór o średnicy $\varnothing = 16$ mm, a więc grubszych niż badana próbka, powoduje zmiany częstotliwości około 3%. Dla podpór cienkich w porównaniu z badaną próbką, a więc o mniejszej sztywności, wpływ niedokładnego podparcia jest niewspółmiernie większy; częstotliwość rezonansowa może zmieniać się nawet kilkanaście razy.

W przypadku próbek długich, rzędu kilkunastu czy też kilkudziesięciu centymetrów, położenie węzłów można ustalić dokładnie. Natomiast w przypadku małych

prętów dokładne ustalenie położenia węzłów jest trudne ze względów technicznych i w takich przypadkach [11 i 12] wygodniej jest stosować inne systemy mocowania próbek.

Inne istotne spostrzeżenie, dokonane w czasie pomiarów, dotyczy stosunku częstotliwości kolejnych rezonansów drgań giętnych w prętach swobodnie podpartych na końcach. W przypadku podpór idealnie sztywnych stosunki częstotliwości kolejnych rezonansów mają się jak stosunki kwadratów liczb naturalnych:

$$f_1 : f_2 : f_3 = f_1 : 4f_1 : 9f_1,$$

natomiast w czasie pomiarów stwierdzono, że $f_2 < 4f_1$ i że $f_3 < 9f_2$. Zjawisko to stwierdzono nie tylko w przypadku podpór prętów, co można by interpretować jako niedostateczną ich sztywność, lecz także w przypadku podpieraną pręta na końcach na dwu dużych kłocach stalowych. O ile w przypadku podpór prętowych ich sztywność zależy od modułu Younga E i od ich wymiarów, to w ostatnim przypadku zaobserwowany efekt można wyjaśnić zdaniem autora skończoną sztywnością materiału podpory. Inni autorzy [11 i 12] stwierdzili podobny ilościowo efekt w przypadku prętów zamocowanych wspornikowo.

3. WYZNACZANIE ŚREDNICY LINII WĘZŁOWEJ

W rezonansowych metodach pomiaru stałych sprężystości stosuje się bardzo często próbki w postaci płyt kołowych. W czasie pomiaru w próbkach wzbudza się drgania pierwszego i drugiego rezonansu fal giętnych. Drganiami o częstotliwości pierwszego rezonansu odpowiadają linie węzłowe na powierzchni płyty w postaci krzyża, w przypadku zaś drugiego rezonansu — w postaci okręgu.

W piśmiennictwie dotyczącym drgań płyt kołowych autorzy podają, że średnica linii węzłowej dla drugiego rezonansu fal giętnych płyty kołowej swobodnie podpartej wynosi $0,68 D$, gdzie D jest średnicą płyty kołowej. W żadnej z publikacji nie spotkano się z zależnościami, które uzależniałyby średnicę linii węzłowej od stałych sprężystości i kształtu płyty (z wyjątkiem małej wzmianki w pracy Reyleigha [13], który dla cienkiej płyty podaje wartości średnic dla $\nu=1/3$ i $\nu=1/4$ dla rezonansów wyższych rzędów).

Na podstawie wzorów podanych przez MARTINČEKA [8] autor przeprowadził obliczenia numeryczne wartości średnicy d dla różnych wartości stałych sprężystości i stosunku h/D , gdzie h jest grubością płyty. MARTINČEK w swojej pracy podaje zależność amplitudy wychyleń od parametrów płyty:

$$(3.1) \quad A(r) = A_0 \left[J_0(\alpha r) - \frac{J_1(\alpha R)}{I(\beta R)} \frac{\beta R}{\alpha R} I_0(\beta r) \right],$$

gdzie r oznacza promień linii węzłowej oraz R promień próbki oraz gdzie

$$(3.2) \quad \alpha^2 = \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} \right) + \sqrt{\frac{\omega^4}{4} \left(\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} \right)^2 - \left(\frac{1}{V_1^2 V_2^2} \omega^4 - \frac{\rho h}{D} \omega^2 \right)},$$

$$(3.2) \quad \beta^2 = -\frac{\omega^2}{2} \left(\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} \right) + \sqrt{\frac{\omega^4}{4} \left(\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} \right)^2 \left(\frac{1}{V_1^2 V_2^2} \omega^4 - \frac{\rho h}{D} \omega^2 \right)},$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1}{(1-\nu^2)}} = C_0 \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}},$$

$$V_2 = \frac{0,87+1,12\nu}{1+\nu} \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}},$$

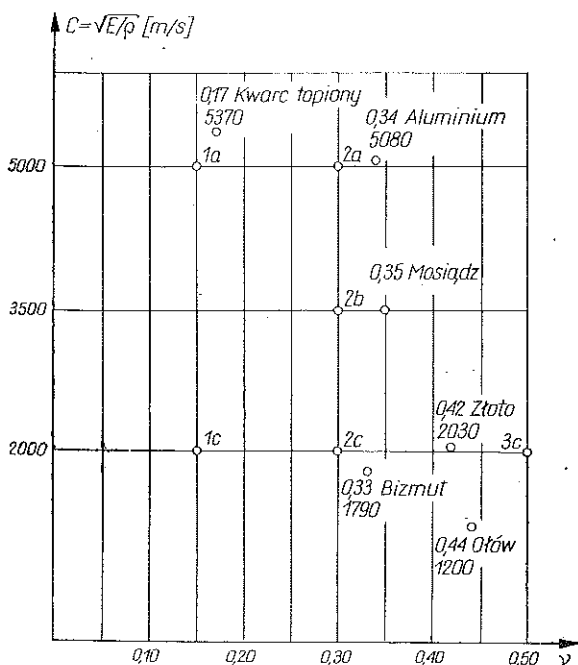
$$\bar{\omega} = \frac{\bar{\omega}}{R} c_0.$$

Wartości współczynnika $\bar{\omega}$ podane są w pracy MARTINČEKA [8]. Na podstawie wzoru (3.1) szukamy takiej wartości r , dla której wyrażenie w nawiasie kwadratowym równa się zero:

$$(3.3) \quad [J_0(\alpha r) - \frac{J_1(\alpha R)}{I(\beta R)} \frac{\beta R}{\alpha R} I_0(\beta r)] = 0.$$

Autor niniejszej pracy obliczenia takie wykonywał metodą kolejnych przybliżeń, korzystając z tablic funkcji Bessela podanych w pracy WATSONA [18].

W rozważaniach tych właściwości fizyczne różnych materiałów scharakteryzowano za pomocą dwóch parametrów: prędkości prętovej $C_0 = \sqrt{E/\rho}$ oraz stałej Poissona ν . Na rys. 5 przedstawiono w takim układzie współrzędnych punkty odpowiadające



Rys. 5. Charakterystyka właściwości fizycznych różnych materiałów za pomocą prędkości fal prętovej i stałej Poissona

niektórym typowym materiałom, jak kwarc, aluminium, mosiądz, złoto, bizmut i ołów oraz punkty, dla których obliczono wartości r/R oznaczone symbolami 1a, 2a, 2b, 1c, 2c i 3c.

Wyniki tych obliczeń przedstawiono na wykresie (rys. 6), gdzie na osi pionowej znajduje się średnica linii węzłowej, na poziomej zaś stosunek h/R płyty. Wykresy te wykonano dla punktów 1a, 2a, 2b, 1c, 2c, 3c, które w pewnym stopniu reprezentują właściwości fizyczne typowych ośrodków stałych.

Jak to widać z podanych krzywych, różnice między poszczególnymi wykresami są znaczne, rzędu kilku procent.

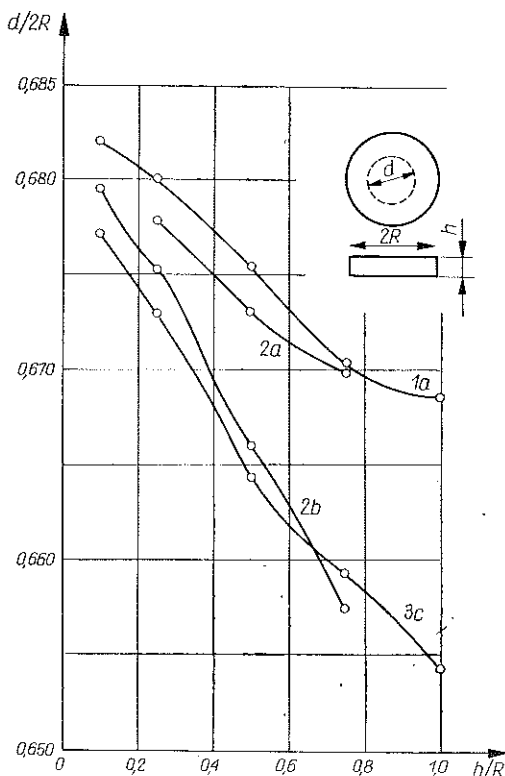
W zastosowaniach praktycznych [16] drobne przesunięcia punktów podparcia w stosunkowo małym stopniu wpływają na częstotliwość drgań, ale w niektórych przypadkach, w których zależy nam na dużej dokładności pomiaru, potrzebna jest dokładna znajomość linii węzłowej.

W części eksperymentalnej badano próbki w postaci płyt kołowych z różnych materiałów i o różnych kształtach. Badano takie materiały, jak stal, aluminium, mosiądz, szkło i ceramika. Wyniki niektórych pomiarów zestawiono w tabelicy 3.

W pomiarach stosowano różne układy pomiarowe [16]. Najdogodniejszym okazał się układ pokazany na rys. 7. Jako przetwornik nadawczy stosowano przetwornik elektrodynamiczny, do odbioru zaś drgań najwygodniejszą w praktyce okazała się sonda piezoelektryczna, gdyż pozwalała najdokładniej wyznaczać położenie linii węzłowej drugiego rezonansu fal giętnych płyty kołowej.

Wykonano także pewną ilość pomiarów stosując jako przetwornik odbiorczy mikrofon pojemnościowy (rys. 8).

W pomiarach sondę przesuwno po średnicy próbki oznaczając dwa położenia, w których sygnał odbierany przez przetwornik miał wartość minimalną, jako punkty na średnicy węzłowej. Dla każdej z próbek wyznaczono 8 punktów pomiarowych, przez które następnie wykreślono okrąg i wyznaczono jego średnicę. Wyniki zestawiono w tabelicy 3 i na rys. 9.



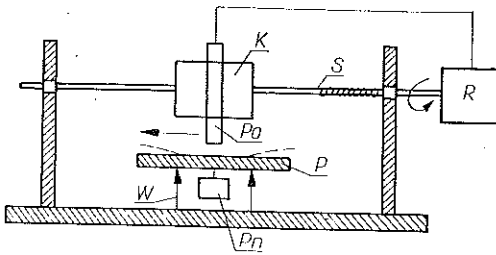
Rys. 6. Wyniki obliczeń wartości średnicy linii węzłowej drugiego rezonansu fal giętnych w zależności od kształtu próbki i parametrów fizycznych ośrodka

Tablica 3

Wyniki pomiarów rozkładu linii węzłowych. Próbki podparte na 4 kulkach na średnicy. Przetwornik nadawczy elektrodynamiczny umieszczony w środku. Przetwornik odbiorczy piezoelektryczny. Średnice linii węzłowych oraz częstotliwości drugiego rezonansu fal giętnych płyt kołowych

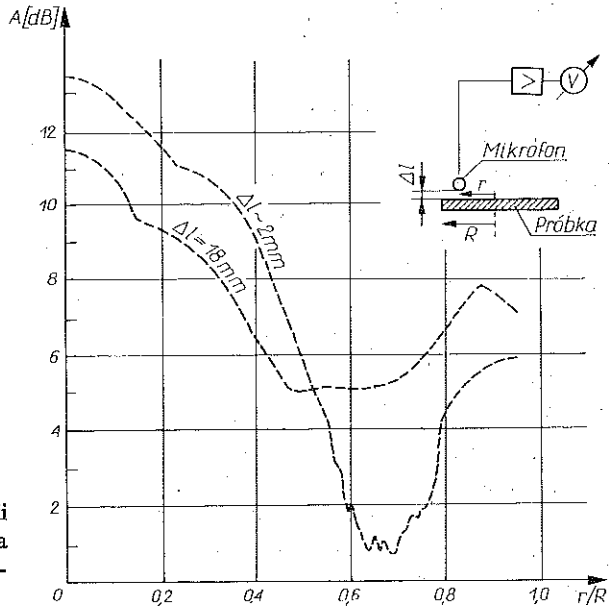
Aluminium $D=178$ mm			
h	d	d/D	h/D
2	116	0,652	0,011
10	125	0,702	0,056
15	120	0,674	0,084
20	116	0,651	0,112
25	120	0,674	0,140
50	117	0,657	0,281
75	105	0,590	0,421
150	86	0,483	0,843

Stal $D=198$ mm			
h	d	d/D	h/D
2,5	144,5	0,730	0,013
5,0	140,0	0,707	0,025
10,0	137,0	0,692	0,051
15,0	134,5	0,679	0,076
20,0	134,5	0,679	0,101
25,0	134,0	0,678	0,126
50,0	130,0	0,657	0,253
75,0	127,0	0,641	0,379
100,0	124,0	0,626	0,505
150,0	115,0	0,581	0,758

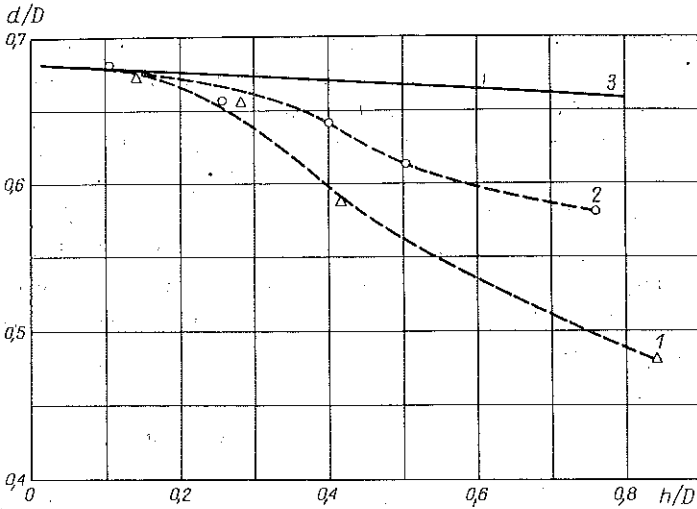


Rys. 7. Stanowisko do badania rozkładu amplitudy drgań na powierzchni próbki

P – próbka, K – karetką, R – rejestrator, P_0 – przetwornik odbiorczy, P_n – przetwornik nadawczy, S – śruba napędowa, W – wspornik



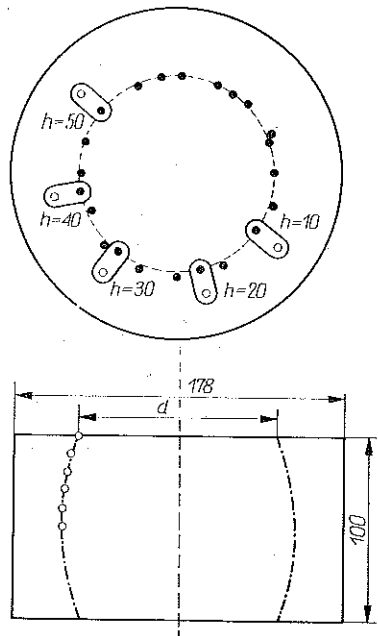
Rys. 8. Wyznaczanie rozkładu linii węzłowej na powierzchni próbki za pomocą mikrofonu pojemnościowego



Rys. 9. Porównanie wyników pomiaru i obliczeń średnicy linii węzłowej w płytach kołowych dla drgań giętych

Jak to wynika z rys. 6 i 9 można stwierdzić znaczną rozbieżność wyników obliczeń i pomiaru i tak np. dla próbki o średnicy $D=178$ mm i grubości $h=100$ mm wg obliczeń zmiana średnicy węzłowej w stosunku do średnicy węzłowej cienkiej płyty jest rzędu 1,5%, na podstawie zaś danych pomiarowych uzyskano zmianę średnicy o około 15%, a więc większą o rząd wielkości. Niezgodność wyników obliczenia z wynikami pomiarów średnicy linii węzłowej na powierzchni można wyjaśnić tym, że równanie wyjściowe (3.1) jest spełnione dla powierzchni umieszczonej w środku płytki.

Nie znaleziono rozwiązania teoretycznego tego problemu dla powierzchni zewnętrznych grubej płyty kołowej. Dla potwierdzenia słuszności powyższego stwierdzenia przeprowadzono następujący eksperyment: w podanej wyżej próbce wycięto pięć otworów jak na rys. 10. Głębokości otworów wynosiły 10 mm, 20 mm, 30 mm, 40 mm i 50 mm. Dna otworów były płaskie. Następnie wyznaczono położenie linii węzłowej na różnych głębokościach. Wyniki pomiaru, oznaczone na rys. 10 kółkami, pozwoliły z pewnym przybliżeniem odtworzyć kształt powierzchni węzłowej wewnątrz próbki.



* punkty pomiarowe przed wycięciem wgłębień
 o " " " po wycięciu wgłębień

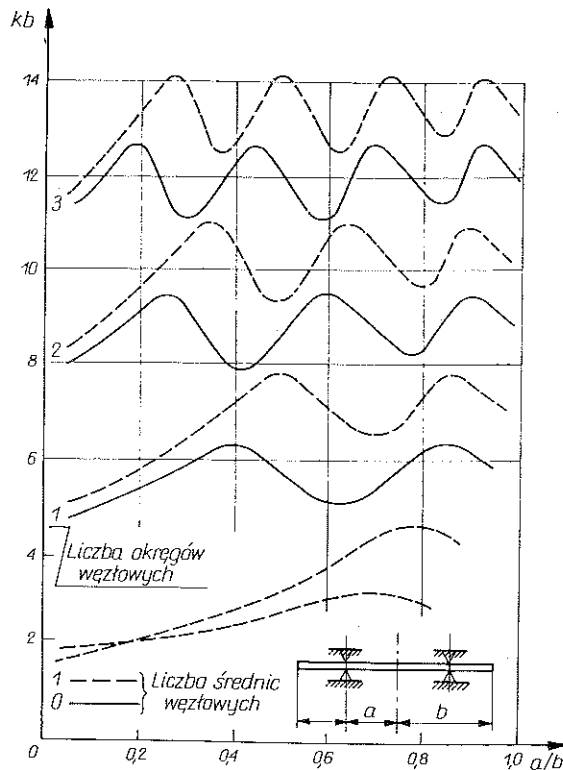
Rys. 10. Zmiana średnicy linii węzłowej w grubej płycie kołowej

Wycięcie otworów w próbce musiało zakłócić w małym stopniu warunki drgań w próbce, niemniej jednak przeprowadzony eksperyment pozwolił na opisanie w sposób przybliżony tego zjawiska i wyjaśnił przyczynę rozbieżności między poprzednio przeprowadzonymi obliczeniami a wynikami pomiarów. Przed wycięciem otworów w próbce częstotliwości rezonansowe wynosiły $f_1 = 9334$ Hz i $f_2 = 14509$ Hz, po wycięciu zaś otworów zmieniły się o około 2% do wartości $f_1 = 9149$ Hz i $f_2 = 14163$ Hz.

Dla płytek cienkich można zaobserwować silne wahania funkcji d . Zdaniem autora można to wyjaśnić szkodliwym wpływem przetwornika nadawczego typu dynamicznego i odbiorczego typu piezoelektrycznego, które przy cienkich płytach w dużym stopniu zakłóciły swobodne drgania płyty.

4. WPŁYW ZAMOCOWAŃ I PODPARĆ NA CZĘSTOTLIWOŚĆ DRGAŃ PŁYT KOŁOWYCH

W niektórych przypadkach rozmieszczenie linii węzłowej jest znane, w innych zaś, jak to ma miejsce np. dla próbek w postaci grubych płyt kołowych o nieznanym współczynniku Poissona ν , nie jest znane położenie węzłów. Wtedy ich położenie



można ustalić za pomocą metody kolejnych przybliżeń zmieniając rozstaw punktów podparcia. Mierzając rozkład amplitudy na powierzchni próbki w pobliżu węzła oraz «dobroć» Q dla kolejnych warunków podparcia, można ustalić prawidłowe warunki pomiaru.

Dla ilustracji tego zagadnienia można podać wyniki pracy opublikowanej przez R. Y. BODINE'Ą [3], w której autor rozpatruje drgania giętej cienkiej płyty kołowej o współczynniku Poissona $\nu = 0,3$, zamocowanej za pomocą pierścienia o promieniu a . Średnica próbki wynosi b . Bodine rozpatruje przedział $0 \geq a/b \geq 1$ dla kilku pierwszych modów drgań. Jak to wynika z wykresu (rys. 11) dla przypadku drugiego rezonansu fal giętych maksimum współczynnika kb osiąga się dla wartości $a/b \sim 0,67$, gdzie

Rys. 11. Drgania gięte cienkiej płyty kołowej wg. BODINE'Ą [3]

$$(4.1) \quad f = (kb)^2 \sqrt{\frac{D}{mhb^2}}$$

a więc częstotliwość ma wartość maksymalną dla przypadku zamocowania próbki w węźle.

Na podstawie wykresu (rys. 11) widać, że krzywa kb w funkcji a/b w pobliżu węzła przebiega dosyć łagodnie, a więc, podobnie jak w przypadku prętów, niewielkie przesunięcie punktu zamocowania próbki względem węzłów wpływa w małym stopniu na zmianę częstotliwości.

Rozpatrywane przez MARTINEČKA i BODINE'A problemy wymagają dużego nakładu pracy dla uzyskania rozwiązań numerycznych przypadków stosunkowo prostych, a więc pręta idealnego bez uwzględnienia efektów ścinania i bezwładności oraz dla cienkiej płyty kołowej. Ze względu na duże trudności problem ten, o ile wiadomo

Tablica 4

Wpływ sposobu zamocowania próbki na częstotliwości drgań rezonansowych

a) Próbka: stal, $D=198$ mm, $h=10$ mm	d [mm]	f_2 [Hz]	*
Próbka podparta na 4 kulkach na średnicy d	80	2264,8	
	100	2267,8	
Nadajnik indukcyjny	120	2249,6	
	140	2261,8	
Odbiornik pojemnościowy	160	2262,8	
	180	2269,4	
b) Próbka: Al, $D=178$ mm, $h=75$ mm	d [mm]	f_2 [Hz]	
Próbka podparta na 4 kulkach na średnicy d	68	13028	
	104	13030	
Odbiornik piezoelektryczny	150	13031	
c) Próbka: Al, $D=178$ mm, $h=10$ mm	d [mm]	f_2 [Hz]	
Próbka podparta na 4 kulkach na średnicy d	68	3080	
	125	3096	
Odbiornik piezoelektryczny	150	3096	
d) Próbka: stal $D=198$ mm, $h=20$ mm	d [mm]	f_2 [Hz]	f_2 [Hz]
Próbka podparta na 4 kulkach na średnicy d	73	2614	4384
	100	2620	4334
Nadajnik dynamiczny	134,5	2620	4308
Odbiornik piezoelektryczny	150	2610	4350
e) Próbka: stal $D=198$ mm, $h=20$ mm	d [mm]	f_2 [Hz]	f_2 [Hz]
Próbka podparta na 4 podkładkach filcowych na średnicy d	73	2594	4306
	100	2602	4306
Nadajnik dynamiczny	134,5	2596	4304
Odbiornik piezoelektryczny	150	2598	4304

autorowi, nie został dotychczas rozwiązany dla drgań giętych prętów i płyt z uwzględnieniem wpływu sił ścinania i efektów bezwładności.

W pracach eksperymentalnych badano zamocowania w postaci podpór zakończonych ostrzami, podpór z kulkami stalowymi, podkładem z filcu. W niektórych przypadkach stosowano również zawieszenie próbek na cienkich niciach jedwabnych i metalowych. Mocowanie próbki na niciach wprowadza najmniejsze tłumienie dodatkowe w układzie pomiarowym i dlatego jest stosowane do badania materiałów o bardzo małych stratach wewnętrznych. System mocowania próbki na niciach sprawia jednak wiele kłopotów i nie może być stosowany do badań masowych, gdyż a) w próbce trzeba wywiercić otwory o możliwie małej średnicy; b) próbka jest bardzo wrażliwa na drgania zewnętrzne i trzeba stosować zawieszenie sejsmiczne w układzie pomiarowym; c) w przypadku dużych próbek (rzędu kilku kilogramów) nici mocujące muszą być bardzo grube i taki sposób mocowania traci swoje zalety.

Na podstawie danych zestawionych w tablicach 4 i 5 można stwierdzić, że w przypadku stosowania podpór w postaci ostrzy straty wprowadzone przez układ moco-

Tablica 5

Wpływ rodzaju zamocowania próbki na tłumienie drgań

Próbka: stal, średnica $D=198$ mm, grubość $h=5$ mm

Nadajnik indukcyjny

Odbiornik pojemnościowy

a) Próbka podparta na 4 kulkach stalowych o średnicy $d=8$ mm.

Kulki rozmieszczone na średnicy linii węzłowej drugiego rezonansu fal giętych $d=140$ mm

$$Q \text{ (próżnia)} = 5140,$$

$$Q \text{ (powietrze)} = 4150.$$

b) Próbka podparta na 2 klockach z gumy o wymiarach $1 \times 1 \times 5$ mm na średnicy $d=140$ mm

$$Q \text{ (próżnia)} = 14\,000,$$

$$Q \text{ (powietrze)} = 9\,300.$$

c) Próbka zawieszona na 3 niciach jedwabnych o długości 80 mm.

W próbce wywiercono 3 otwory 1 mm na średnicy 130 mm,

3 otwory 1 mm na średnicy 140 mm,

3 otwory 1 mm na średnicy 150 mm,

	Próżnia	Powietrze
$d=130$ mm	$Q=20\,500$	$Q=10\,400$
$d=140$ mm	$Q=18\,500$	$Q=10\,350$
$d=150$ mm	$Q=23\,300$	$Q=10\,150$

d) Próbka umieszczona w próżni rzędu 1 mm Hg. Zawieszona na niciach jedwabnych na średnicy linii węzłowej $d=140$ mm

Liczba nici	«Dobroć» Q
3	20 000
6	20 000
12	20 000

wania są trochę większe niż w układzie z próbką zawieszoną na niciach. Ale wpływ podpór ostrzowych na zmianę częstotliwości drgań próbki jest, przy starannym prowadzeniu pomiarów, do pominięcia (chodzi o dokładne umieszczenie podpór na liniach węzłowych).

5. ZAKOŃCZENIE

Przedstawione wyniki obliczeń i pomiarów dotyczą stosunkowo małej ilości badań i doświadczeń, dlatego nie mogły wyczerpać wszystkich problemów związanych z omawianą tematyką. Uzyskane wyniki pozwoliły jednak na wyciągnięcie wielu wniosków praktycznych związanych z dokładnością metod pomiaru stałych sprężystości jak też danych potrzebnych w konstrukcji układów mocowania próbek.

Przewiduje się kontynuowanie prac eksperymentalnych na większym zbiorze próbek w celu uzyskania pełniejszego obrazu omawianych efektów mających zasadnicze znaczenie w metodach pomiaru stałych sprężystości metodami rezonansu akustycznego.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. I. W. ANANJEW, *Sprawoznaczenie po rozcięciu sobstwiennych kolebanij uprugich sistem*, OGIZ, Moskwa 1964.
2. D. BLAY, L. BOURGAIN, G. SAMSON, *Application of electro-acoustical techniques to the determination of the modulus of elasticity by a non-destructive process*, Bruel Kjaer Technical Review 4, 1971.
3. R. Y. BODINE, *Vibrations of a circular plate supported by a concentric ring of arbitrary radius*, JASA, 41, 6, 1551, 1966.
4. S. BORSUK, *Drgania własne płyt kołowych o ortotropii cylindrycznej*, praca doktorska, Warszawa 1959.
5. BRUEL KJAER, *Instructions and applications*, 1964. Complet modulus apparatus type 3930.
6. V. KOLOUSEK, *Dynamika stavebných konstrukci*, Praha 1954.
7. V. KOLOUSEK, *Stavební dynamika spojitych nosniku a ramových soustav*, Praha 1950.
8. G. MARTINČEK, *Nedestruktivne dynamické metody skusania stavebných materialov a konstrukci*, Vydavateľstvo SAV, Bratislava 1962.
9. G. MARTINČEK, *The determination of Poisson's ratio and the dynamic modulus of elasticity from the frequencies of natural vibration in thick circular plates*, J. Sound Vibr., 2, 2, 116-127, 1955.
10. M. NUOVO, *Mesures dynamiques de constantes elastiques et anelastiques*, Consiglio Nazionale Delle Ricerche. Roma 1961.
11. B. PEŃSKO, *Pomiar tłumienia w prętach o niewielkich wymiarach*, Prace IPPT 17/1970.
12. B. PEŃSKO, *Ultradźwiękowe metody badań zmęczeniowych drutów i lin*, Prace IPPT 34/1972.
13. G. W. REYLEIGH, *Teoria zwiuka* [tłum. z angielskiego], Gosudarstwiennye Izdatielstvo Techniko-Teoreticzeskoj Literatury, Moskwa 1955.
14. J. RYLL-NARDZEWSKI, *Automatyczna metoda wyznaczania stałej Poissona*, Pomiary-Automatyka-Kontrola, 19, 12, 533-535, 1973.
15. J. RYLL-NARDZEWSKI, *Elastometr rezonansowy. Zestaw pomiarowy do badania stałych sprężystości*, Pomiary-Automatyka-Kontrola, 15, 5, 207-210, 1969.
16. J. RYLL-NARDZEWSKI, *Zastosowanie właściwości rezonansowych płyt kołowych do wyznaczania stałych sprężystości*, Prace IPPT 44/1973.
17. R. SOLECKI, I. SZYMKIEWICZ, *Układy prętowe i powierzchniowe*, Arkady, Warszawa 1964.
18. G. N. WATSON, *Theory of Bessel functions*, Cambridge 1952.
19. J. WEHR, *Pomiary prędkości i tłumienia fal ultradźwiękowych*, PWN, Warszawa 1972.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ОПОР И АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УЗЛОВЫХ ЛИНИЙ В ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЕЙ И ВАЛОВЫХ ПЛИТ

Работа обсуждает два явления имеющие большое практическое значение в резонансных методах исследования материалов. В первой части работы автор анализирует влияние расположения точек опоры и их жесткости на частоту изгибных колебаний тонкого стержня. Исследованы случаи опирания стержня в узлах, на конце образца, как тоже промежуточные случаи. Получено совпадение результатов расчетов с измерительными результатами. Во второй части работы автор констатирует, что диаметр узловой линии в случае второго резонанса изгибных колебаний толстой круговой, свободно подпертой плиты зависит в большой степени от постоянных упругости и от формы плиты. Автор сравнивает результаты расчетов с экспериментом и объясняет причины расхождений.

SUMMARY

THE INFLUENCE OF SUPPORTS AND ANALYSIS OF DISTRIBUTION OF NODES LINES IN FLEXURAL VIBRATIONS OF RODS AND CYLINDRICAL PLATES

In this paper two phenomena of great practical importance in resonance methods of materials examination are considered. In a first part of the paper the influence of distribution of the support points and their rigidity on the frequency of flexural vibrations of a thin rod is analyzed. The cases of the support of a rod in nodes and at the end of a specimen as well as the intermediate cases are examined. The agreement of the numerical results with the measuring data is obtained.

In a second part of the paper the author claims that the diameter of the node line in a case of the second resonance of flexural vibrations of a thick circular free supported plate depends significantly on the elastic constants and the shape of a plate. The author compares the results of calculations with the experimental data and explains the reasons of a convergence.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 kwietnia 1974 r.
