

K O M U N I K A T Y

USTALONE DRGANIA BELKI NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU WYWOŁANE PORUSZAJĄCYM SIĘ OBCIĄŻENIEM CIĄGLYM

ZOFIA ROZENBAJGIER (WARSZAWA)

Rozważania dotyczą analizy przemieszczeń oraz momentów zginających belki spoczywającej na sprężystym podłożu typu Winklera pod wpływem ruchomego obciążenia. Przy założeniu stałej prędkości ruchu podano prosty sposób wyznaczania stacjonarnych rozwiązań belki w przypadku obciążenia ciągłego o stałej intensywności działającego na pewnym odcinku oraz dla kombinacji takich obciążeń. Dla wybranych wartości parametrów podano wyniki analizy numerycznej.

OZNACZENIA

- EI sztywność belki,
- c stała sprężysta podłoża,
- ρ gęstość masy belki,
- P intensywność obciążenia,
- L_0 długość odcinka, na którym działa obciążenie ciągłe,
- \bar{x}, \bar{y} nieruchomy układ współrzędnych związany z belką,
- x, y ruchomy układ współrzędnych związany z obciążeniem,
- v_0 prędkość ruchu obciążenia w kierunku osi x ,
- v_{kr} krytyczna prędkość fal sprężystych w belce,
- V bezwymiarowa prędkość odniesiona do v_{kr} ,
- u bezwymiarowe przemieszczenie w kierunku osi y , odniesione do statycznej wartości przemieszczenia w $x=0$,
- M bezwymiarowy moment gnący odniesiony do maksymalnej wartości momentu w przypadku $V=0$.

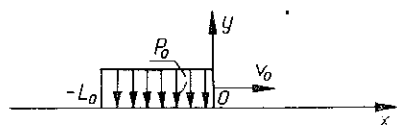
1. WSTĘP

Badaniu układów wymuszonych poruszającym się obciążeniem poświęcono już wiele prac. Obszerny ich przegląd znaleźć można m.in. w pracy [1]. Z prac tematycznie związanych wymienić należy [2], w której rozważono zagadnienie obciążenia belki na sprężystym podłożu z poruszającą się siłą skupioną, [3] — poświęconą analizie stateczności gęsto równomiernie rozłożonych oscylatorów poruszających się wzdłuż belki na sprężystym podłożu, wzdłuż napiętej struny oraz po powierzchni półprzestrzeni sprężystej, [4] — w której rozważono przypadek nieograniczonej belki na sprężystym podłożu obciążonej ruchomym układem mas, rozstawionych w jednakowej odległości.

Wydaje się, że niniejszy komunikat jest uzupełnieniem dotychczasowych badań oraz że stanowić będzie pomocniczy model do badania bardziej złożonych zagadnień dotyczących np. wytrzymałości rurociągów umieszczonych na niewielkich głębokościach w gruncie, po powierzchni którego porusza się obciążenie typu ciągłego, czy też wytrzymałości torów i dróg obciążonych pojazdami itp.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozważmy nieograniczoną belkę na sprężystym podłożu, wzdłuż której porusza się obciążenie ciągłe o stałej wartości (rys. 1).



Rys. 1

Zakładając stałą prędkość ruchu obciążenia v_0 , wprowadzamy ruchomy układ współrzędnych x, y związany z frontem obciążenia, zależny od układu związanego z belką w następujący sposób

$$x = \bar{x} - v_0 t, \quad y = \bar{y}.$$

Przyjmujemy następującą postać równania ruchu belki

$$(2.1) \quad EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho v_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + cy - 2\rho v_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P(x).$$

W przypadku rozwiązania stacjonarnego, do którego ograniczamy nasze rozważania, przyrównujemy do zera pochodne względem czasu w równaniu (2.1). Wówczas równanie to przyjmuje postać

$$(2.2) \quad EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho v_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + cy = P(x),$$

gdzie

$$P(x) = \begin{cases} P_0, & \text{jeżeli } x \in [-L_0, 0], \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Warunki brzegowe dla przypadku obciążenia ciągłego o stałej wartości P_0 , działającego na odcinku o długości L_0 , przyjmiemy w postaci

$$(2.3) \quad y(x) \rightarrow 0, \quad \text{gdy } x \rightarrow \pm\infty \quad \text{oraz} \quad |V| < 1$$

jak również

$$(2.4) \quad \begin{aligned} y_0(x) &= y_1(x)|_{x=-L_0}, & y_1(x) &= y_2(x)|_{x=0}, \\ \frac{\partial^n y_0(x)}{\partial x^n} &= \frac{\partial^n y_1(x)}{\partial x^n} \Big|_{x=-L_0}, \\ \frac{\partial^n y_1(x)}{\partial x^n} &= \frac{\partial^n y_2(x)}{\partial x^n} \Big|_{x=0}, & n &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$y(x) = \begin{cases} y_0(x), & \text{jeżeli } x < -L_0, \\ y_1(x), & \text{jeżeli } -L_0 \leq x \leq 0, \\ y_2(x), & \text{jeżeli } x > 0. \end{cases}$$

3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

W przypadku gdy długość odcinka, na którym przyłożono obciążenie, jest nieskończona, warunki brzegowe (2.3) przyjmują postać

$$(3.1) \quad \lim y(x) = \begin{cases} \frac{P_0}{c}, & \text{jeżeli } x \rightarrow -\infty, \\ 0, & \text{jeżeli } x \rightarrow \infty \end{cases}$$

oraz

$$(3.2) \quad P(x) = \begin{cases} P_0, & \text{jeżeli } x < 0, \\ 0, & \text{jeżeli } x \geq 0. \end{cases}$$

Po wprowadzeniu następujących oznaczeń:

$$(3.3) \quad V = \frac{v_0}{v_{kr}}, \quad v_{kr} = \sqrt[4]{\frac{4cEI}{\rho^2}}, \quad l = \sqrt[4]{\frac{c}{4EI}},$$

$$u_k(x) = \frac{2c}{P_0} y_k, \quad k = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x = 0 \\ 2, & \text{jeżeli } x < 0. \end{cases}$$

i wykorzystaniu warunku wypromieniowania otrzymujemy (w przypadku odcinka o nieskończonej długości) następującą, bezwymiarową postać przemieszczeń:

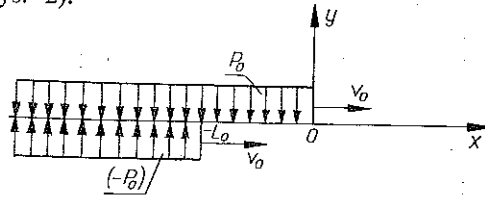
dla $|V| < 1$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} u_1(x_1) &= 2 - e^{\sqrt{1-V^2} x_1} \left[\frac{V^2}{\sqrt{1-V^4}} \sin \sqrt{1+V^2} x_1 + \cos \sqrt{1+V^2} x_1 \right], \\ u_2(x_1) &= -e^{-\sqrt{1-V^2} x_1} \left[\frac{V^2}{\sqrt{1-V^4}} \sin \sqrt{1+V^2} x_1 - \cos \sqrt{1+V^2} x_1 \right]; \end{aligned}$$

dla $|V| > 1$

$$\begin{aligned} u_1(x_1) &= 2 - \left(1 + \frac{V^2}{\sqrt{V^4-1}} \right) \cos(\sqrt{V^2+1} - \sqrt{V^2-1}) x_1, \\ u_2(x_1) &= \left(1 - \frac{V^2}{\sqrt{V^4-1}} \right) \cos(\sqrt{V^2+1} + \sqrt{V^2-1}) x_1. \end{aligned}$$

Rozwiązanie zagadnienia w przypadku, gdy długość odcinka, na którym działa obciążenie jest skończona i wynosi L_0 , będzie sumą przemieszczeń dla obciążeń o nieskończonych długościach, przeciwnych znakach oraz początkach, umieszczonych w odległości L_0 (rys. 2).



Rys. 2

Przemieszczenia $u_L(x_1)$ dla obciążenia działającego na odcinku o długości L_0 , napisać można w następującej postaci:

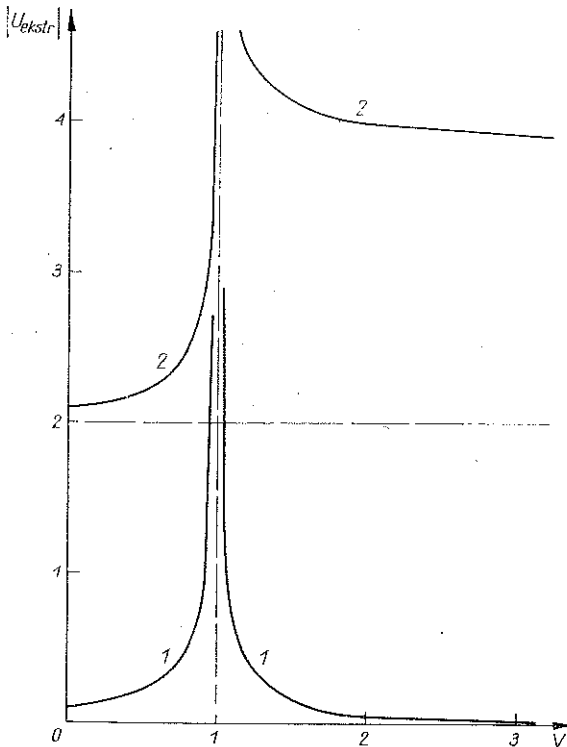
$$(3.5) \quad u_L(x_1) = u(x_1) - u(\kappa),$$

gdzie

$$u(x_1) = \begin{cases} u_1(x_1), & \text{jeżeli } x_1 \leq 0, \\ u_2(x_2), & \text{jeżeli } x_1 \geq 0 \end{cases}$$

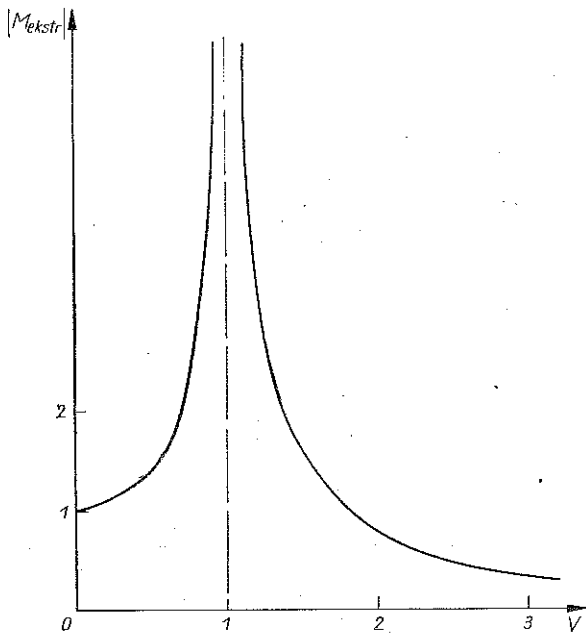
oraz

$$\kappa = x_1 - L, \quad L = lL_0, \quad x_1 = lx.$$

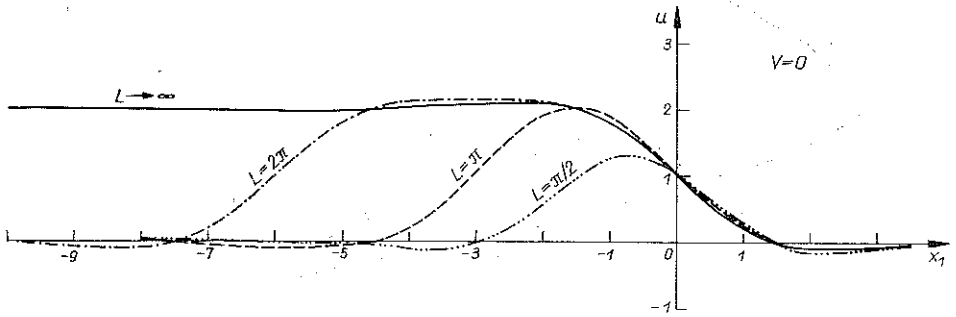


Rys. 3. Największe bezwzględne wartości ekstremalne przemieszczeń:

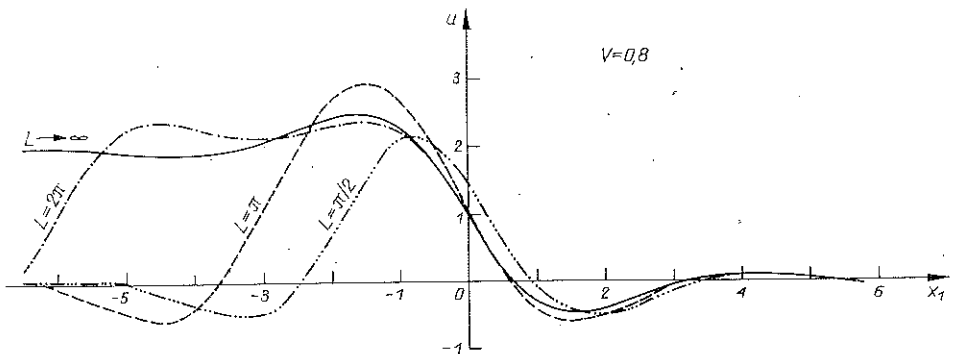
1 — przed frontem obciążenia, 2 — za frontem obciążenia



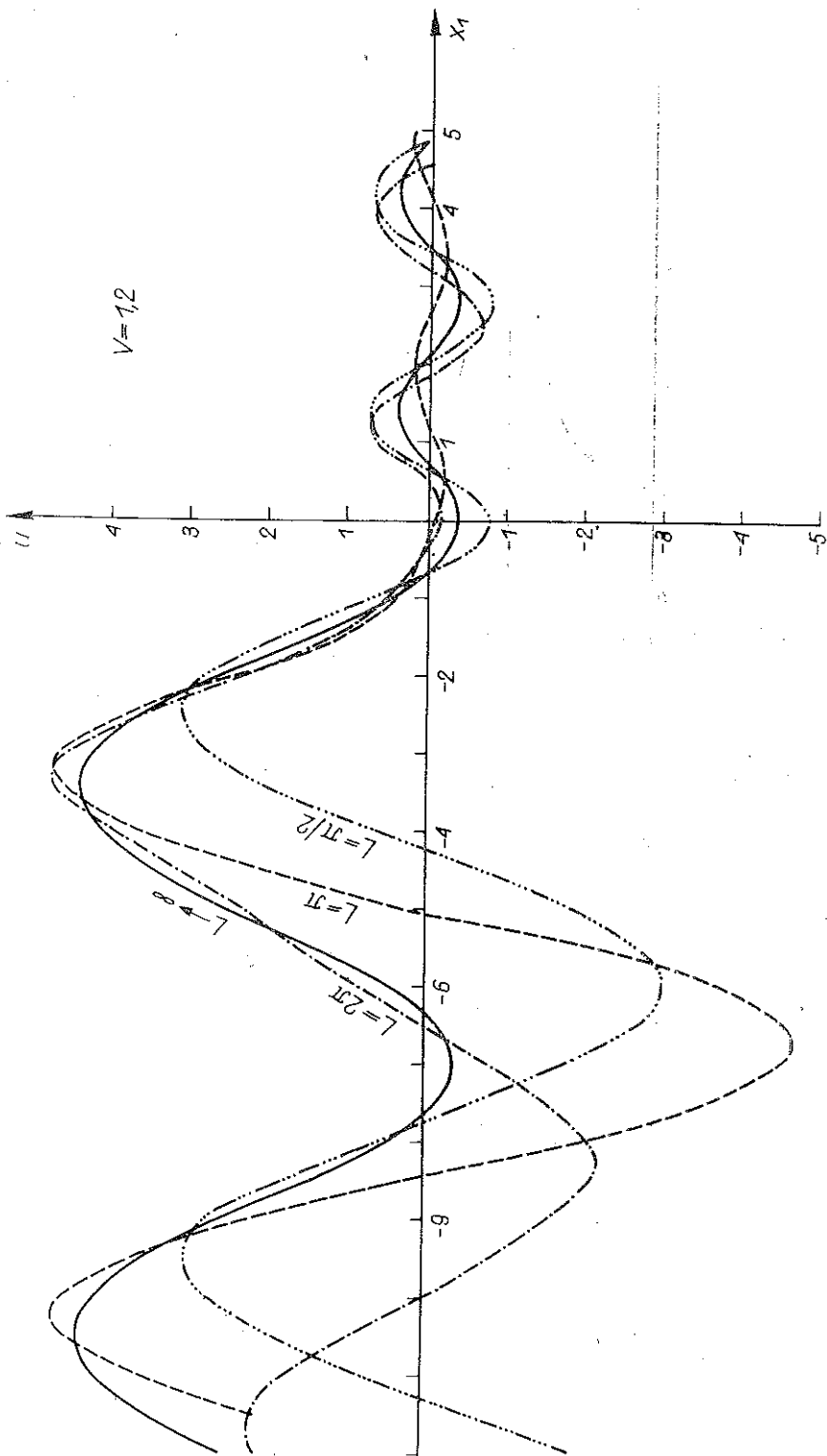
Rys. 4. Największe bezwzględne wartości ekstremalne momentów zginających przed oraz za frontem obciążenia



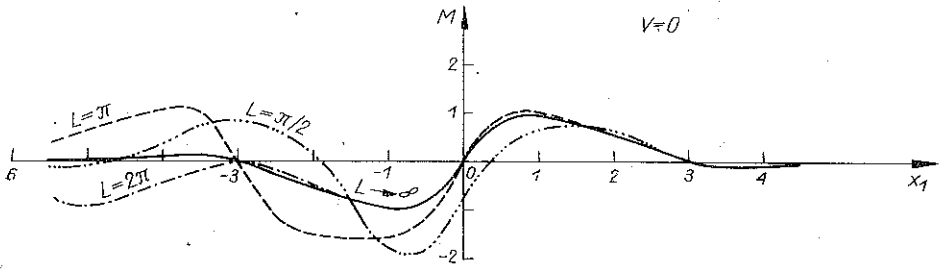
Rys. 5



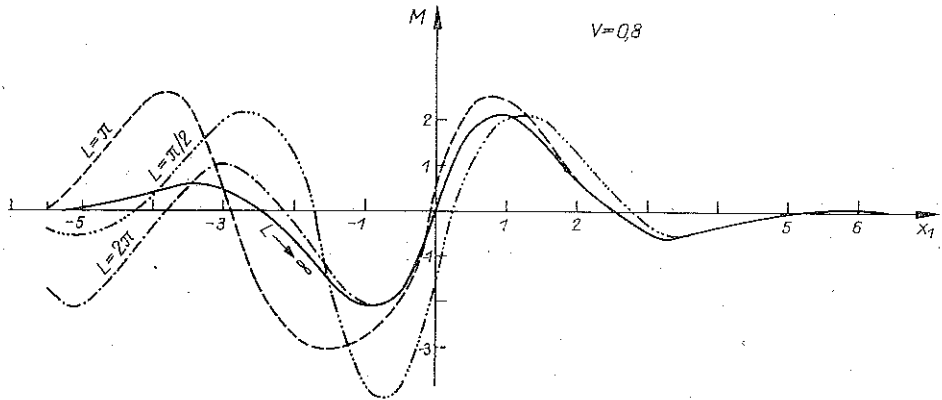
Rys. 6



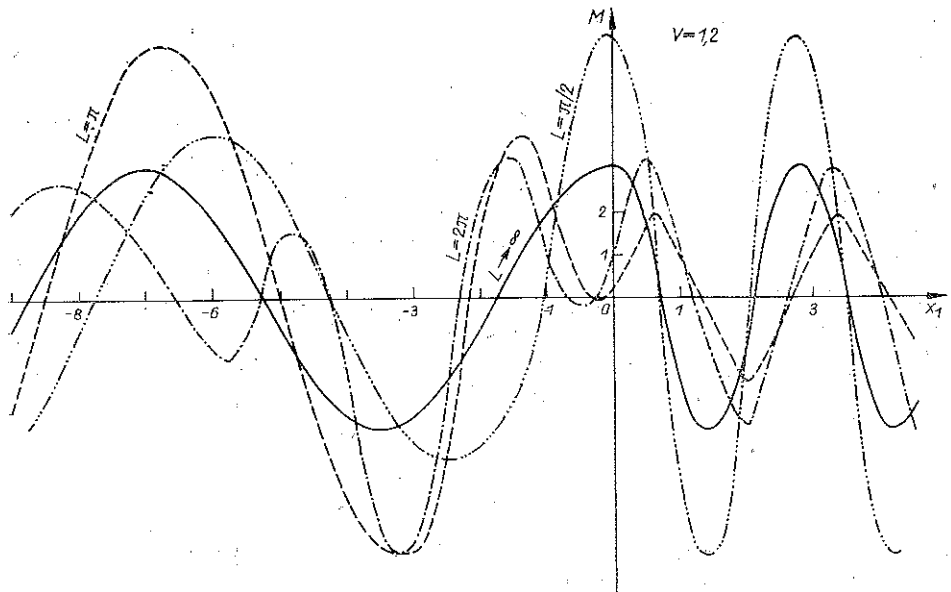
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

Zależność maksymalnych wartości przemieszczeń oraz momentów gnących przed i za frontem obciążenia od prędkości ruchu obciążenia dla $L \rightarrow \infty$ ilustrują wykresy na rysunkach 3 i 4.

Wykresy obliczeń numerycznych, obrazujące zależność przemieszczeń oraz momentów od odległości od frontu obciążenia dla wybranych wartości prędkości ruchu, przedstawione są na rysunkach 5–10.

Interesujący jest również przypadek obciążenia o frontach przemieszczających się w kierunkach przeciwnych (przypadek gdy długość odcinka, na którym działa obciążenie rośnie ze wzrostem czasu). Obciążenie to można przedstawić jako sumę trzech następujących, prostych obciążeń: dwóch obciążeń o intensywności P_0 dla $L_0 \rightarrow \infty$ i frontach poruszających się w kierunkach przeciwnych oraz obciążenia $-P_0$ działającego na całej długości belki.

4. WNIOSKI

Z otrzymanych wzorów oraz obliczeń numerycznych wynika, że decydujący wpływ na wartości przemieszczeń oraz momentów zginających mają następujące parametry: prędkość ruchu obciążenia V , intensywność obciążenia P oraz długość odcinka, na którym przyłożono obciążenie. Charakterystyczny jest fakt, że maksymalne wartości momentów gnących przed oraz za frontem obciążenia są jednakowe, pomimo różnych wartości przemieszczeń. Gdy prędkość, z jaką porusza się obciążenie, równa jest prędkości krytycznej v_{kr} [2], wówczas maksymalne wartości przemieszczeń i momentów dążą do nieskończoności. Z wykresów przedstawionych na rysunkach 5–10 (na których zaznaczono przemieszczenia oraz momenty zginające w przypadkach $L = \pi/2$, $L = \pi$, $L = 2\pi$, $L \rightarrow \infty$) wynika, że zależność od długości odcinka L jest istotna. Można również wykazać, że przemieszczenia oraz momenty gnące dla dowolnych wartości L są mniejsze od podwojonych wartości przemieszczeń oraz momentów dla $L \rightarrow \infty$, tzn. że

$$u_L(x_1) \leq 2u_{\max}(L \rightarrow \infty), \quad M_L(x_1) \leq 2M_{\max}(L \rightarrow \infty).$$

Zagadnienie rozważane w niniejszej pracy jest jednym ze szczególnych problemów technicznych dotyczących ruchomych obciążeń. Rozważania można uogólnić, uwzględniając przypadek obciążenia typu inercyjnego [3 i 4] czy też przypadek dużych odkształceń. Jednak efekty nieliniowe [3 i 7] istotnie komplikują przypadek obciążeń złożonych (nie ma zastosowania zasada superpozycji).

Ważne wydaje się również uwzględnienie efektów lepkich; analizie zagadnienia dla przypadku lepkosprężystej belki i podłoża poświęcimy następny komunikat.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Н. Э. Якушев, *Динамика деформируемых систем под воздействием движущихся нагрузок*, Исследования по теории пластин и оболочек, Изд. Казанского Университета, 3–42, 1972.
2. J. T. KENNEY, *Steady-state vibrations of beam on elastic foundation for moving load*, J. Appl. Mech., 21, 359–364, 1954.

3. R. BOGACZ, *Interaction between a moving set of nonlinear oscillators and a travelling wave*, Proc. Vib. Probl., **9**, 1, 1968.
4. H. FRĄCKIEWICZ, *Dynamika mas skupionych poruszających się po belce leżącej na sprężystym podłożu*, Rozpr. Inżyn., **13**, 2, 1965.
5. А. П. ФИЛИПОВ, С. С. КОХМАНЮК, *Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни*, Наукова Думка, Киев 1967.
6. H. E. CRINER, G. D. MCCANN, *Rails on elastic foundation under the influence of high-speed travelling loads*, Journal of Appl. Mech., Trans. ASME, **20**, 13-23, 1953.
7. G. A. HEGEMER, *On nonlinear steady-state solutions to moving load problems*, Quarterly of Appl. Mathem., **26**, 2, 1968.

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 listopada 1975 r.
