

MODELE WARSTWOWE GRUBYCH PŁYT I POWŁOK

WIESŁAW K U F E L (WARSZAWA)

W pracy przedstawiono koncepcję warstwowych modeli sprężystych grubościennych płyt i powłok. Płyty i powłoki potraktowano jako ciała z więzami wewnętrznymi, których teorię podał Cz. WOŹNIAK [1, 2]. Umożliwia to podanie dogodnych kryteriów szacujących rozwiązanie. Zdefiniowano szczególnie rodzaj więzów wewnętrznych, tzw. więzy wielomianowe. Rozpatrzono problem stosowalności modelu warstwowego.

WYKAZ OZNACZEŃ

$A \times B$	iloczyn kartezjański zbiorów A i B ,
∂A	brzeg zbioru A ,
$f(x) _{x \in A}$	obcięcie funkcji f do zbioru A ,
$A = \{x; W(x)\}$	zbiór tych x , które spełniają własność $W(x)$,
$\ f\ $	norma f ,
$ a $	wartość bezwzględna a ,
R^n	n -wymiarowa przestrzeń kartezjańska,
$\nabla f, \nabla^* f$	gradient f odpowiednio w podzbiorach R^3 i R^2 .

1. WSTĘP

Przedmiotem rozważań są grube sprężyste dźwigary powierzchniowe, które dają się odwzorować w obszar $B = \Pi \times (a, b)$, gdzie punkty należące do obszaru $\Pi \subset R^2$ mają współrzędne z^k , $k=1, 2$ a punkty $(a, b) \subset R$ mają współrzędną y . Załóżymy, że funkcja deformacji dźwigara $\chi = \chi(z, y, t)$, $z \in \Pi$, $y \in (a, b)$, $t \in I = (t_0, t_1)$ jest postaci

$$(1.1) \quad \chi(z, y, t) = \Phi(z, y, t, \psi^\alpha(z, t)),$$

gdzie $\psi^\alpha(z, t)$ są funkcjami nieznanymi, a funkcja Φ jest znana. Ograniczenia (1.1) funkcji deformacji χ nazywamy *więzami wewnętrznymi* [1].

Zakładając, że dźwigar powierzchniowy jest sprężysty, podstawowy układ równań dla wektora współrzędnych uogólnionych ψ^α otrzymać można z zasady prac wirtualnych i składa się on z równań ruchu

$$(1.2) \quad \text{Div } H^\alpha + h^\alpha + f^\alpha = i^\alpha$$

i równań konstytutywnych

$$(1.3) \quad H^\alpha = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla^* \psi^\alpha}, \quad h^\alpha = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi^\alpha},$$

które powinny być spełnione dla każdego $(z, t) \in \Pi \times I$, [1], Div^* oznacza tu dywergencję w Π , a \mathbf{f}^α , \mathbf{i}^α , κ , ε są zdefiniowane w sposób następujący:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{f}^\alpha &= \int_a^b \rho \mathbf{b} \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi^\alpha} dy + \mathbf{p} \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi^\alpha} \Big|_{y=a} + \mathbf{p} \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi^\alpha} \Big|_{y=b}, \\ \mathbf{i}^\alpha &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \kappa}{\partial \dot{\Psi}^\alpha} - \frac{\partial \kappa}{\partial \Psi^\alpha}, \\ \kappa &= \frac{1}{2} \int_a^b \rho |\dot{\Phi}|^2 dy, \\ \varepsilon &= \int_a^b \rho \sigma (\nabla \Phi) dy, \end{aligned}$$

gdzie ρ jest gęstością masy w konfiguracji odniesienia, \mathbf{b} siłami masowymi, \mathbf{p} obciążeniem zewnętrznym, a σ funkcją energii sprężystej.

Z kolei na $\partial \Pi \times I$ powinny być spełnione geometryczne warunki brzegowe

$$(1.5) \quad \mathbf{H}^\alpha \mathbf{n}^* = \int_a^b \mathbf{p} \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi^\alpha} dy,$$

gdzie \mathbf{n}^* oznacza wektor zewnętrznie normalny do $\partial \Pi$. Występująca w (1.5) całka jest znana, gdyż znane są funkcje \mathbf{p} i Φ .

W wyniku działania więzów wewnętrznych powstają objętościowe siły reakcji \mathbf{r} oraz powierzchniowe siły reakcji \mathbf{s} określone wzorami

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \rho \mathbf{r} &= \rho \ddot{\mathbf{X}} - \text{Div } \mathbf{T} - \rho \mathbf{b}, \\ \mathbf{s} &= \mathbf{T} \mathbf{n} - \mathbf{p}, \end{aligned}$$

gdzie \mathbf{T} jest tensorem naprężenia Pioliego-Kirchhoffa i \mathbf{n} wektorem zewnętrznie normalnym do ∂B . Układ (1.6) może być traktowany jako układ pewnych fikcyjnych obciążeń, które należałoby dodatkowo przyłożyć do ciała, aby odkształcało się zgodnie z więzami.

2. DYSKRETNO-CIĄGŁA APROKSYMACJA FUNKCJI DEFORMACJI

Utwórzmy zbiór powierzchni $\Pi_\alpha \in \Theta$, $\alpha=0, 1, \dots, l$, $l \geq 1$, gdzie

$$(2.1) \quad \Theta = \{ \Pi_\alpha; \Pi_\alpha = \varphi (\Pi \times \{y_\alpha\}), a = y_0 < y_1 < \dots < y_l = b \},$$

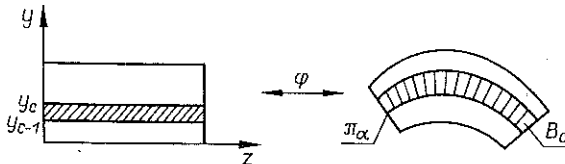
które nazwiemy *zbiorem powierzchni podziału dźwigara*. Przekształcenie φ występujące w (2.1) jest dyfeomorfizmem obszaru B w przestrzeń fizyczną. Powierzchnie podziału Π_α dzielą jednoznacznie dźwigar na podobszary, które oznaczymy przez B_c , $c=1, 2, \dots, l$ i tak $B_c = \varphi (\Pi \times (y_{c-1}, y_c))$. Zbiory B_c nazwiemy *warstwami dźwigara sprężystego* (rys. 1).

Niech dalej ruch powłoki χ będzie ograniczony w następujący sposób:

$$(2.2) \quad \chi(z, y, t) = \psi^\alpha(z, t) \xi^\alpha(y), \quad \alpha = 0, 1, \dots, l,$$

gdzie $\psi^\alpha(z, t) = \chi(z, y_\alpha, t)$. Funkcje ψ^α są niewiadomymi współzrędnymi uogólnionymi opisującymi ruch powierzchni podziału Π_α , a funkcje ξ^α nazwane *funkcjami wiązania warstw*, są znane.

Przedstawiony podział powłoki można traktować jako dyskretyzację trójwymiarowego ciała sprężystego na elementy skończone, którymi są warstwy B_c . Jednakże w przeciwieństwie do znanej metody elementów skończonych liczba punktów węz-



Rys. 1

łowych jest tutaj nieskończona: są nimi nie tylko punkty y_α ale i wszystkie punkty z obszaru Π . Przeprowadzając dyskretyzację obszaru Π na płaskie elementy skończone, więzy (2.2) można sprowadzić do więzów postaci

$$\chi(z, y, t) = \Phi_\alpha(z, t, \mathbf{q}(t)) \xi^\alpha(y),$$

gdzie funkcjami poszukiwanymi są funkcje \mathbf{q} zależne tylko od czasu. Analiza takich więzów przeprowadzona jest w pracy [3].

Przykładem funkcji wiązania warstw ξ_α są obciążenia funkcji γ_α :

$$(2.3) \quad \xi_\alpha(y) = \gamma_\alpha(y)|_{y \in (a, b)}$$

ciągłych w zbiorze liczb rzeczywistych i takich, że

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \gamma_\alpha(y) &= 0, & y \leq y_{\alpha-1}, & \quad y \geq y_{\alpha+1}, \\ \gamma_\alpha(y_\alpha) &= 1, & \alpha &= 0, 1, \dots, l \end{aligned}$$

oraz $y_{-1} = a - 1$, $y_{l+1} = b + 1$.

W najprostszym przypadku przy założeniu, że warstwy B_c odkształcają się liniowo względem y , za funkcje wiązania warstw przyjmiemy obciążenia funkcji

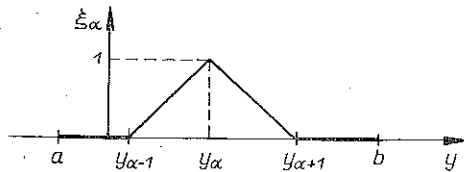
$$(2.5) \quad \gamma_\alpha(y) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } y \leq y_{\alpha-1}, \\ \frac{y - y_{\alpha-1}}{y_\alpha - y_{\alpha-1}}, & \text{jeżeli } y_{\alpha-1} \leq y \leq y_\alpha, \\ \frac{y_{\alpha+1} - y}{y_{\alpha+1} - y_\alpha}, & \text{jeżeli } y_\alpha \leq y \leq y_{\alpha+1}, \\ 0, & \text{jeżeli } y_{\alpha+1} \leq y, \end{cases}$$

$$\alpha = 0, 1, \dots, l$$

do przedziału (a, b) , rys. 2.

Innym przykładem funkcji ξ_α są wielomiany względem y ; ich analiza znajduje się w następnym punkcie pracy.

W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy teorię liniową. Podstawiając (2.1) do (1.4)₄, a następnie wyliczając wielkości (1.3), znajdziemy następujące równania ruchu warstwowych dźwigarów sprężystych:



Rys. 2

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \rho_{\alpha\beta} (\mu\psi_{K,LL}^\beta + (\lambda + \mu)\psi_{L,LK}^\beta) + (\lambda\rho_{\alpha\beta}' - \mu\rho_{\beta\alpha}') \psi_{3,K}^\beta - \mu\rho_{\alpha\beta}'' \psi_K^\beta + f_{K\alpha} &= i_{K\alpha}, \\ \mu\rho_{\alpha\beta} \psi_{3,KK}^\beta + (\mu\rho_{\alpha\beta}' - \lambda\rho_{\beta\alpha}') \psi_{K,K}^\beta - (2\mu + \lambda)\rho_{\alpha\beta}'' \psi_3^\beta + f_{3\alpha} &= i_{3\alpha}, \end{aligned}$$

gdzie $K, L=1, 2$ oraz

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \rho_{\alpha\beta} &= \int_a^b \rho \xi_\alpha \xi_\beta dy, \\ \rho_{\alpha\beta}' &= \int_a^b \rho \xi_\alpha \xi_\beta' dy, \\ \rho_{\alpha\beta}'' &= \int_a^b \rho \xi_\alpha \xi_\beta'' dy, \quad \xi_\alpha' = \frac{d\xi_\alpha}{dy}. \end{aligned}$$

W równaniach (2.6) wielkości $f_{k\alpha}$ i $i_{k\alpha}$ są określone wzorami (1.4)₁ i (1.4)₂. W podobny sposób napisać można warunki brzegowe (1.5).

3. WIĘZY WIELOMIANOWE

Rozpatrzmy więzy wewnętrzne (1.1) powłoki w postaci

$$(3.1) \quad \chi(\mathbf{z}, y, t) = \mathbf{w}_j(\Psi^\alpha(\mathbf{z}, t))(y)^j, \quad j=0, 1, \dots, j_0,$$

gdzie wektor $\Psi^\alpha(\mathbf{z}, t) = \chi(\mathbf{z}, y_\alpha, t)$ jest wektorem nieznanymi współrzędnymi uogólnionych (funkcji opisujących ruch powierzchni Π_α), natomiast \mathbf{w}_j są znanymi funkcjami argumentów Ψ^α . Tak więc funkcje (3.1) są wielomianami zmiennej y stopnia j_0 , których współczynniki zależą od niewiadomych współrzędnymi uogólnionych Ψ^α . Przy dostatecznej regularności funkcji (1.1) wielomiany (3.1) mogą być wielomianami Taylora względem y funkcji Φ .

Skoro funkcje Ψ^α określiliśmy jako funkcje deformacji powierzchni podziału Π_α , zgodnie z tą interpretacją powinny zachodzić związki

$$(3.2) \quad \mathbf{w}_j(y)^j|_{y=y_\alpha} = \Psi^\alpha.$$

Związki (3.2) można traktować jako liniowy układ równań na współczynniki w_j . W przypadku, gdy $j_0=l$, układ (3.2) jest układem Cramera na współczynniki w_α , który łatwo rozwiązać, jeżeli tylko macierz

$$(3.3) \quad [y] = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & y_\alpha & y_\alpha^2 & \dots & y_\alpha^l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & b^2 & \dots & b^l \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa. Warunek ten jest spełniony, gdyż spełnione są nierówności $a = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_l = b$, tj. gdy punkty podziału y_α są różne. Rozwiązaniem (3.2) dla $j_0=l$ są funkcje

$$(3.4) \quad w_\alpha = \frac{\det [y]_\alpha}{\det [y]},$$

gdzie macierze $[y]_\alpha$ powstają z macierzy $[y]$ przez zastąpienie α -kolumny przez kolumnę $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_l$.

Rozwiązanie (3.4) układu (3.2) przy warunkach nieosobliwości macierzy (3.3) jest dokładnie jedno.

Zgodnie z (3.3) współczynniki w_α są liniowymi funkcjami ψ^α ($\det [y]_\alpha$ jest liniową kombinacją ψ^α), można więc je napisać w postaci

$$(3.5) \quad w_\alpha = a_{\alpha\beta} \psi^\beta.$$

Podstawiając (3.5) do (3.1) znajdziemy

$$(3.6) \quad \chi(z, y, t) = a_{\alpha\beta} (y)^\alpha \psi^\beta(z, t).$$

W przypadku najprostszym wielomianu stopnia pierwszego $l=1$, funkcje (3.5) będą następujące ($a_{00}=b/h, a_{10}=-1/h, a_{01}=-a/h, a_{11}=1/h$):

$$(3.7) \quad \chi(z, y, t) = \frac{b-y}{h} \psi^0 + \frac{a+y}{h} \psi^1,$$

gdzie $h=b-a$.

Jest to przypadek, gdy w powłoce nie występują wewnętrzne płaszczyzny podziału, tj. gdy Θ jest zbiorem dwu powierzchni dolnej i górnej Π_0 i Π_1 .

W przypadku podziału ciała na dwie warstwy $l=2, y_1 \neq 0, y_1 \neq h$ mamy

$$(3.8) \quad \begin{aligned} a_{00} &= 1, & a_{10} &= -\frac{y_1+h}{y_1 h}, & a_{20} &= \frac{1}{y_1 h}, \\ a_{01} &= 0, & a_{11} &= \frac{h}{y_1(h-y_1)}, & a_{21} &= -\frac{1}{y_1(h-y_1)}, \\ a_{02} &= 0, & a_{12} &= -\frac{y_1}{h(h-y_1)}, & a_{22} &= \frac{1}{h(h-y_1)}, \end{aligned}$$

gdzie $a=0, b=h$.

Podstawiając (3.8) do (3.6) znajdziemy równania więzów ciał „dwuwarstwowych”:

$$(3.9) \quad \chi(z, y, t) = \frac{y^2 - (y_1 + h)y + y_1 h}{y_1 h} \Psi^0 + \frac{hy - y^2}{y_1 (h - y_1)} \Psi^1 + \frac{y^2 - y_1 y}{h(h - y_1)} \Psi^2.$$

Równania ruchu ciał z więzami wielomianowymi będą mieć postać identyczną z (2.8). Jednak współczynniki $\rho_{\alpha\beta}, \rho'_{\alpha\beta}, \rho''_{\alpha\beta}$ określone związkami (2.9) dla więzów (3.5) są łatwe do wyznaczenia, gdyż mamy tu do czynienia z całkowaniem wielomianów.

Dla przykładu, w przypadku $l=1$ i $l=2$ współczynniki te są postaci

$l=1$

$$\begin{aligned} \rho_{00} = \rho_{11} &= \frac{h}{3}, & \rho_{10} = \rho_{01} &= \frac{h}{6}, \\ \rho'_{00} = \rho'_{10} &= -\frac{1}{2}, & \rho'_{01} = \rho'_{11} &= \frac{1}{2}, \\ \rho''_{00} = \rho''_{11} &= \frac{1}{h}, & \rho''_{01} = \rho''_{10} &= \frac{1}{h}; \end{aligned}$$

$l=2$

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \rho_{00} &= \frac{10hy_1^2 - 5h^2 y_1 + h^3}{30y_1^2}, & \rho_{10} &= \frac{1}{2} \frac{5h^3 y_1 - 2h^4}{30y_1^2 (h - y_1)}, \\ \rho_{20} &= \frac{1}{2} \frac{-10hy_1^2 + 10h^2 y_1 - 3h^3}{30y_1 (h - y_1)}, \\ \rho_{01} = \rho_{10}, & \rho_{11} &= \frac{h^5}{30y_1^2 (h - y_1)^2}, & \rho_{21} &= \frac{1}{2} \frac{-5h^3 y_1 + 3h^4}{30y_1 (h - y_1)^2}, \\ \rho_{02} = \rho_{20}, & \rho_{12} = \rho_{21}, & \rho_{22} &= \frac{10y_1^2 h - 15y_1 h^2 + 6h^3}{30 (h - y_1)^2}, \\ \rho'_{00} &= -\frac{1}{2}, & \rho'_{10} &= \frac{-h^2}{6y_1 (h - y_1)}, & \rho'_{20} &= -\frac{1}{2} + \frac{h^2}{6y_1 (h - y_1)}, \\ \rho'_{01} &= -\rho_{10}, & \rho'_{11} &= 0, & \rho'_{21} &= \frac{-h^2}{5y_1 (h - y_1)}, \\ \rho'_{02} &= -\rho'_{20}, & \rho'_{12} &= -\rho'_{21}, & \rho'_{22} &= \frac{1}{2}, \\ \rho''_{00} &= \frac{1}{h} + \frac{h}{3y_1^2}, & \rho''_{10} &= -\frac{h^2}{3y_1^2 (h - y_1)}, & \rho''_{20} &= -\frac{1}{h} + \frac{h}{3y_1 (h - y_1)}, \\ \rho''_{01} = \rho''_{10}, & \rho''_{11} &= \frac{h^3}{3y_1^2 (h - y_1)^2}, & \rho''_{21} &= -\frac{h^2}{3y_1 (h - y_1)^2}, \\ \rho''_{02} = \rho''_{20}, & \rho''_{12} = \rho''_{21}, & \rho''_{22} &= \frac{1}{h} + \frac{h}{3 (h - y_1)^2}, \end{aligned}$$

gdzie przyjęto $\rho=1$ oraz $a=0$.

Łatwo zauważyć, że zachodzą związki (pomocne przy liczeniu wielkości (2.9))

$$\begin{aligned} \rho_{00} + \rho_{11} + \rho_{22} + 2(\rho_{01} + \rho_{02} + \rho_{12}) &= 0, \\ \rho'_{\alpha 0} + \rho'_{\alpha 1} + \rho'_{\alpha 2} &= 0, \\ \rho''_{0\alpha} + \rho''_{1\alpha} + \rho''_{2\alpha} &= 0. \end{aligned}$$

Można udowodnić, że analogiczne związki zachodzą dla dowolnego α .

4. OCENA STOSOWAŁNOŚCI MODELU WARSTWOWEGO

Oznaczmy normy współrzędnych sił reakcji oraz normy współrzędnych sił rzeczywiście działających na ciało odpowiednio przez

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}_k &= \|r_k\|, & \mathcal{B}_k &= \|b_k\|, \\ \mathcal{S}_k &= \|s_k\|, & \mathcal{P}_k &= \|p_k\|. \end{aligned}$$

Kryterium szacujące dokładność otrzymanego rozwiązania napiszemy w postaci

$$(4.2) \quad \mathcal{R}_k \leq \varepsilon \mathcal{B}_k, \quad \mathcal{S}_k \leq \varepsilon \mathcal{P}_k,$$

gdzie $0 < \varepsilon \ll 1$.

Niech η_i , $i = 1, 2, \dots, i_0$ będą parametrami charakteryzującymi kształt, własności fizyczne, obciążenia zewnętrzne itd. powłoki grubej; wtedy związki (4.2) zgodnie z (4.1) stanowią układ nierówności na te parametry.

Mówimy, że rozpatrywany model jest stosowalny, jeżeli istnieją takie liczby η_i^n, η_i^{**} , $n = 1, 2, \dots, n_0$, $i = 1, 2, \dots, i_0$, że dla η_i z przedziałów

$$(4.3) \quad \eta_i^n \leq \eta_i \leq \eta_i^{**}$$

zachodzą związki (4.2).

Układ (4.2) można rozwiązać badając w przypadku $\mathcal{B}_k \equiv 0$ przebieg funkcji $\mathcal{R}_k(\eta_i)$, w przypadku $\mathcal{P}_k \equiv 0$, przebieg funkcji $\mathcal{S}_k(\eta_i)$, w przypadku $\mathcal{B}_k \neq 0$, przebieg funkcji $\mathcal{R}_k(\eta_i)/\mathcal{B}_k(\eta_i)$ oraz w przypadku $\mathcal{P}_k \neq 0$ funkcji $\mathcal{S}_k(\eta_i)/\mathcal{P}_k(\eta_i)$.

5. PRZYKŁAD. LINIOWA TEORIA WARSTWY IZOTROPOWEJ

Dla przykładu rozpatrzmy jeden z najprostszych wariantów teorii płyt i powłok oparty na następującej hipotezie kinematycznej elementu prostoliniowego. Włókna materialne powłoki, które w konfiguracji odniesienia były odcinkami prostymi normalnymi do płaszczyzny Π , pozostają w dowolnej konfiguracji odcinkami prostymi, mogąc podlegać najwyżej jednorodnej deformacji. Oznacza to, że równania definicyjne więzów wewnętrznych (1.1) są postaci (3.7):

$$(5.1) \quad \chi(\mathbf{z}, y, t) = \left(1 - \frac{y}{h}\right) \chi^0(\mathbf{z}, t) + \frac{y}{h} \chi^1(\mathbf{z}, t).$$

Funkcje $\chi^0 = \chi(z, 0, t)$, $\chi^1 = \chi(z, h, t)$, $(a, b) = (0, h)$ opisują ruch powierzchni dolnej i górnej powłoki. Znając ruch punktów materialnych tych powierzchni, znamy za pośrednictwem związków (5.1) rzeczywisty ruch każdego punktu materialnego powłoki traktowanej jako trójwymiarowe ciało sprężyste. Równania (5.1) są szczególnym przypadkiem więzów (1.1) i (1.2), dla których funkcje ψ^α są równe χ^0 , χ^1 , $\alpha = 0, 1$.

Przyjmując $\psi^0 = \chi^0$ oraz $\psi^1 = 1/h (\chi^1 - \chi^0)$ więzom (5.1) nadamy postać $\chi(z, y, t) = \psi^0(z, t) + \psi^1(z, t)y$. Równania te można wtedy zinterpretować jako opis ruchu całej powłoki przez ruch tzw. powierzchni Cosseratów o jednym wektorze kierunkowym. Jest to poruszająca się powierzchnia $\psi^0(z, t)$ najeżona wektorami $\psi^1(z, t)$. Teoria powłok oparta na takich więzach nazywana jest uogólnioną teorią Reissnera [2].

W przypadku gdy współrzędne uogólnione są równe odpowiednio

$$\chi_1^\alpha(z^1, z^2, t) = \varphi^\alpha(z, t), \quad \chi_2^\alpha = \text{const}, \quad \chi_3^\alpha(z^1, z^2, t) = \psi^\alpha(z, t)$$

(ruch powierzchni górnej i dolnej zależy tylko od jednej współrzędnej przestrzennej z), równania ruchu (2.6) przepisać można w postaci

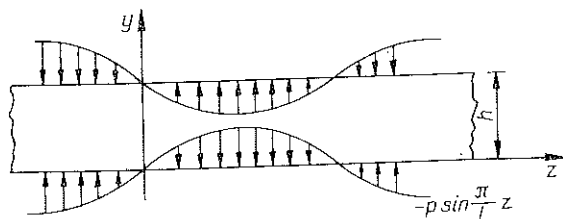
$$(5.2) \quad \begin{aligned} \varphi_{,11}^0 + \frac{1}{2} \varphi_{,11}^1 + (A-B) \psi_{,1}^0 + (A+B) \psi_{,1}^1 - C(\varphi - \varphi^1) + f_1^0 &= i_1^0, \\ \frac{1}{2} \varphi_{,11}^0 + \varphi_{,11}^1 - (A+B) \psi_{,1}^0 - (A-B) \psi_{,1}^1 + C(\varphi^0 - \varphi^1) + f_1^1 &= i_1^1, \\ \psi_{,11}^0 + \frac{1}{2} \psi_{,11}^1 + (D-E) \varphi_{,1}^0 + (D+E) \varphi_{,1}^1 - F(\psi^0 - \psi^1) + f_3^0 &= i_3^0, \\ \frac{1}{2} \psi_{,11}^0 + \psi_{,11}^1 - (D+E) \varphi_{,1}^0 - (D-E) \varphi_{,1}^1 + F(\psi^0 - \psi^1) + f_3^1 &= i_3^1, \end{aligned}$$

gdzie

$$(5.3) \quad \begin{aligned} A &= \frac{3\mu}{2h(\lambda+2\mu)}, & B &= \frac{3\lambda}{2h(\lambda+2\mu)}, & C &= \frac{3\mu}{h^2(\lambda+2\mu)}, \\ D &= \frac{3\lambda}{2h\mu}, & E &= \frac{3}{2h}, & F &= \frac{3(\lambda+2\mu)}{\mu h^2}. \end{aligned}$$

W równaniach (5.2) przyjęto stałą gęstość $\rho = 1$.

Rozwiążmy układ równań (5.2) w przypadku sprężystego pasma, którego obciążenie określone jest za pomocą funkcji $p = \left(0 \mp p \sin \frac{\pi}{l} z\right)$, $p > 0$ (rys. 3).



Rys. 3

Łatwo sprawdzić, że funkcje

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \varphi^0 &= a \left(\cos \frac{\Pi}{l} z - 1 \right), & \varphi^1 &= \varphi^0, \\ \psi^0 &= b \sin \frac{\Pi}{l} z, & \psi^1 &= -\psi^0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} a &= -\frac{4p\lambda h l^3}{\Pi^3 h^2 (\lambda + 2\mu) + 48\Pi^2 (\lambda + \mu)}, \\ b &= -\frac{2l^2 h^2 p (\lambda + 2\mu)}{\Pi^2 h^2 (\lambda + 2\mu) + 48l^2 (\lambda + \mu)} \end{aligned}$$

są w tym przypadku rozwiązaniami układu (5.2). Jeżeli podstawimy rozwiązanie (5.4) do (5.1), to funkcja deformacji $\chi = (\chi_z, \chi_y)$ przyjmie postać

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \chi_z &= a \left(\cos \frac{\Pi}{l} z - 1 \right), \\ \chi_y &= b \left(1 - \frac{2y}{h} \right) \sin \frac{\Pi}{l} z. \end{aligned}$$

Obliczając składowe siły reakcji (1.9) po uwzględnieniu (5.5) znajdziemy

$$(5.6) \quad \begin{aligned} r_z &= -\frac{4\mu (\lambda + 2\mu) p \delta}{(\lambda + 2\mu) \delta^2 + 48 (\lambda + \mu)} \cos \frac{\Pi}{l} z, \\ r_y &= -\left(1 - \frac{2y}{h} \right) \frac{2\mu (\lambda + 2\mu) p \delta^2}{(\lambda + 2\mu) \delta^2 + 48 (\lambda + \mu)} \sin \frac{\Pi}{l} z, \\ s_z^1 &= \frac{2\mu (\lambda + 2\mu) p \delta^2}{(\lambda + 2\mu) \delta^2 + 48 (\lambda + \mu)} \cos \frac{\Pi}{l} z, \\ s_y^1 &= -\left(p - \frac{16\mu (\lambda + \mu) p \delta}{(\lambda + 2\mu) \delta^2 + 48 (\lambda + \mu)} \right) \sin \frac{\Pi}{l} z, \\ s_z^0 &= s_z^1, & s_y^0 &= -s_y^1, \end{aligned}$$

gdzie $\delta = \Pi h / l$. Siły reakcji (5.6) są funkcjami stałych materiałowych λ, μ amplitudy obciążenia p oraz parametru δ określającego stosunek wysokości do okresu obciążenia zewnętrznego.

Wprowadźmy następujące normy sił reakcji:

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}_z &= \max_{(z, y) \in R \times (0, h)} |r_z|, & \mathcal{R}_y &= \max_{(z, y) \in R \times (0, h)} |r_y|, \\ \mathcal{S}_z^\alpha &= \max_{z \in R} |s_z^\alpha|, & \mathcal{S}_y^\alpha &= \max_{z \in R} |s_y^\alpha|. \end{aligned}$$

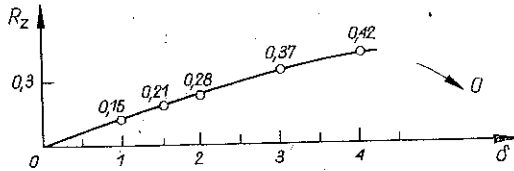
Podstawiając (5.6) do (5.7) otrzymamy

$$(5.8) \quad \begin{aligned} R_z &= \frac{4\mu(\lambda+2\mu)p\delta}{(\lambda+2\mu)\delta^2+48(\lambda+\mu)}, & R_y &= \frac{\delta}{2} R_z, \\ \mathcal{P}_z^\alpha &= R_y, \\ \mathcal{P}_y^\alpha &= \left| p - \frac{16\mu(\lambda+\mu)p\delta}{(\lambda+2\mu)\delta^2+48(\lambda+\mu)} \right|. \end{aligned}$$

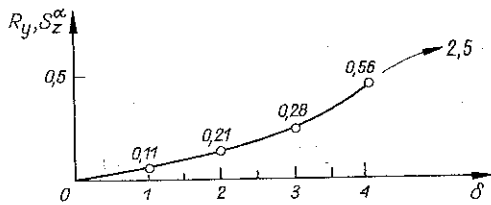
Przyjmując, że stałe materiałowe oraz amplituda obciążeń zewnętrznych są równe odpowiednio $\lambda=1$, $\mu=1,25$, $p=1$ znajdziemy następujące funkcje (5.8):

$$(5.9) \quad \begin{aligned} R_z &= \frac{5\delta}{\delta^2+31}, & R_y &= \frac{\delta}{2} R_z, \\ \mathcal{P}_z^\alpha &= R_y, \\ \mathcal{P}_y^\alpha &= \left| 1 - \frac{17\delta}{\delta^2+31} \right|. \end{aligned}$$

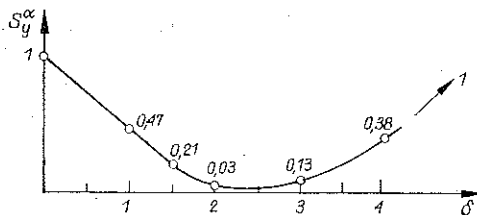
Parametrem opisującym tutaj stosowność otrzymanego rozwiązania jest δ . Wykresy funkcji (5.9) przedstawiono na rys. 4, 5 i 6.



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Składowe siły reakcji objętościowych, podłużna \mathcal{R}_x i poprzeczna \mathcal{R}_y , dążą do zera, jeżeli grubość warstwy jest coraz mniejsza. Podobnie jest z podłużnymi powierzchniowymi siłami reakcji \mathcal{S}_x^α . W przypadku składowej poprzecznej powierzchniowych sił reakcji \mathcal{S}_y^α otrzymamy dla $\delta=0$, $\mathcal{S}_x^\alpha=1$. Oznacza to, że jeśli zmniejszymy grubość pasma to rozwiązanie (5.5) w coraz mniejszym stopniu (coraz gorzej) opisuje zachowanie się pasma pod działaniem danego obciążenia. Otrzymane rozwiązanie (5.5) nie może więc być stosowane dla każdego δ . Zgodnie z podaną definicją (4.3) należy znaleźć takie liczby δ^* i δ^{**} , aby dla $\delta \in (\delta^*, \delta^{**})$ spełnione były nierówności (4.2)

$$\mathcal{R}_x < \varepsilon, \quad \mathcal{R}_y < \varepsilon, \quad \mathcal{S}_x^\alpha < \varepsilon, \quad \mathcal{S}_y^\alpha < \varepsilon p.$$

Jeżeli $\varepsilon=0,25$ (dopuszczalny błąd rozwiązania 25%), to łatwo sprawdzić, że δ powinna spełniać warunki $1,25 \leq \delta \leq 1,75$. Dla $\varepsilon=0,2$ rozwiązanie może być stosowane gdy $\delta=1,5$. Ponadto wprowadzony model nie może być stosowany dla $\varepsilon < 0,20$, tj. z dokładnością większą niż 20%.

6. UWAGI KOŃCOWE

Rozważane w pracy płyty i powłoki grube stanowią szczególną klasę ciał sprężystych z więzami wewnętrznymi. Założono, że ruch powłoki traktowanej jako trójwymiarowe ciało, może być aproksymowany ruchem pewnej skończonej rodziny powierzchni podstawowych dzielących ciało na warstwy. Analitycznym odpowiednikiem aproksymacji ruchu ciała trójwymiarowego ruchem rodziny powierzchni podstawowych jest założenie istnienia funkcji $\Phi(\mathbf{z}, y, \Psi^\alpha(\mathbf{z}, t))$, której zależność od argumentów $\mathbf{z}, y, \Psi^\alpha$ jest znana, a funkcje Ψ^α są funkcjami poszukiwanymi (opisują one ruch powierzchni podstawowych).

Bez zmniejszania ogólności, w pracy rozpatrzono funkcje Φ (funkcje więzów wewnętrznych) w postaci $\Psi_\alpha(\mathbf{z}, t) \xi^\alpha(y)$ gdzie ξ^α nazwane funkcjami wiązania warstw zależą tylko od wyróżnionej zmiennej przestrzennej y i są znane. Jeżeli funkcja Φ jest regularna, to można wypisać jej wielomian Taylora $a_{\alpha\beta}(y)^\alpha \Psi^\beta(\mathbf{z}, t)$ i za funkcje wiązania warstw przyjąć funkcje $a_{\alpha\beta}(y)^\alpha$. Więzy tego typu nazwano więzami wielomianowymi. Wobec znanego twierdzenia Weierstrassa o aproksymacji funkcji wielomianami, w pracy poświęca się przede wszystkim uwagę więzom wielomianowym.

Podstawowy układ równań dla ciał warstwowych (warstwowość jest tu rozumiana jako warstwowość modelowa, choć podział na warstwy może być uzależniony w przypadku ciał złożonych z różnych materiałów, także od warstwowości fizycznej) otrzymuje się z zasady prac wirtualnych. Rozwiązując podstawowy układ równań wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi i początkowymi (tj. wyznaczając niewiadome funkcje Ψ_α opisujące ruch powierzchni podziału) możemy, wykorzystując funkcje więzów wewnętrznych, określić ruch powłoki traktowanej jako ciało trójwymiarowe. Otrzymana funkcja deformacji jest określona w każdym punkcie ciała i na ogół różni się od funkcji deformacji, jaką otrzymalibyśmy w ramach klasycznej teorii sprężystości. Traktowanie powłok grubych jako ciała z więzami wewnętrznymi pozwala ocenić (nie znając rozwiązania ścisłego) dokładność otrzy-

manego rozwiązania, a tym samym ocenić jego stosowalność. W pracy definiuje się kryterium stosowalności modelu warstwowego płyt i powłok grubych. Rozpatrzony przykład izotropowej warstwy sprężystej wskazuje na to, iż intuicyjne przeświadczenie o tym, że każde rozwiązanie dwuwymiarowe (tj. rozwiązanie otrzymane w ramach powierzchniowej teorii powłok) jest dobre, jeżeli tylko grubość powłoki jest dostatecznie mała, nie znajduje tutaj uzasadnienia. W rozpatrywanym zagadnieniu, zmniejszając dowolnie grubość pasma, otrzymuje się rozwiązanie coraz gorsze, gdyż siły reakcji utrzymujące więzy są coraz większe.

Jak wcześniej zaznaczono opisany model płyt i powłok grubych jest modelem dyskretno-ciągłym. W pracy wskazano na jego związki ze znaną metodą elementów skończonych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Cz. WOŹNIAK, *Constrained continuous media*, Bull. Acad. Polon. Sci, Série Sci. Techn., **21**, 1973.
2. Cz. WOŹNIAK, *Analytical mechanics of elastic media*, Sprawozdanie CISM, Udine, 1975.
3. W. KUFEL, *Sterowana dyskretyzacja płyt i powłok*, Mech. teoret. i Stos., **1**, 1976.

Резюме

СЛОИСТЫЕ МОДЕЛИ ТОЛСТЫХ ПЛИТ И ОБОЛОЧЕК

В работе представлена концепция слоистых моделей упругих толстостенных плит и оболочек. Плиты и оболочки трактуются как тела с внутренними связями, теорию которых привел Ч. Возняк [1, 2]. Это дает возможность представления удобных критериев оценивающих решение. Определен частный вид внутренних связей т. наз. полиномиальные связи. Рассмотрена проблема применимости слоистой модели.

SUMMARY

LAYERED MODELS OF THICK PLATES AND SHELLS

A concept of layered models of elastic thick-walled plates and shells is outlined in the paper. The plates and shells are treated as solids with internal constraints according to the theory proposed by Cz. WOŹNIAK [1, 2] what makes it possible to establish convenient criteria for estimating the solutions. A particular type of internal constraints (the so-called polynomial constraints) are defined. The problem of applicability of the layered model is studied.

UNIwersytet Warszawski
Instytut Mechaniki

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 stycznia 1976 r.