

WYBOCZENIE UDERZENIOWE ELEMENTÓW KONSTRUKCYJNYCH

RYSZARD GRYBOSZ (GLIWICE)

Rozważa się stateczność typowych elementów konstrukcyjnych (pręta, powłoki walcowej i pasma płytowego) przy uderzeniowym ściskaniu podłużnym. Analiza krzywych dyspersyjnych, wykreślonych dla sprzężonej fali podłużno-giętnej przy różnych ciśnieniach osiowych, ujawnia istnienie takiej długości λ^* fali, przy której prędkość fazowa maleje do zera, a prędkość grupowa rośnie nieograniczenie. Jest to sytuacja charakterystyczna dla stanu krytycznego.

W strefie wzbudzenia rozwija się wówczas intensywnie fala giętna o długości λ^* , zwana falą wyboyczeniową; jest to najdłuższa z fal giętnych, jakie mogą się propagować w elemencie konstrukcyjnym ściskanym uderzeniowo.

W przypadku pręta oraz pasma płytowego każdej prędkości uderzenia odpowiada określona fala wyboyczeniowa, która pojawi się, o ile tylko długość pręta lub szerokość pasma jest nie mniejsza od λ^* . Natomiast w przypadku powłoki istnieje krytyczna wartość ciśnienia osiowego (lub prędkości uderzenia), poniżej której wyboyczenie jest niemożliwe.

Rozpatruje się wyłącznie osiowo-symetryczny stan przemieszczeń powłoki, który zgodnie z obserwacjami, występuje zawsze w początkowej fazie procesu wyboyczenia uderzeniowego.

1. WSTĘP

Przedmiotem rozważań jest stateczność elementów konstrukcyjnych takich, jak pręt, powłoka walcowa oraz pasmo płytowe przy obciążeniu uderzeniowym. Kierunek obciążenia jest zgodny z kierunkiem osi podłużnej pręta i powłoki lub prostopadły do krawędzi pasma. Jeżeli wywołana nagłym obciążeniem fala ciśnienia jest dostatecznie intensywna, to może spowodować wyboyczenie, rozumiane jako ruch elementu konstrukcyjnego, podczas którego ugięcia (tzn. przemieszczenia prostopadłe do kierunku obciążenia) wykazują tendencję nieograniczonego wzrostu.

Wzbudzenie ugięć dynamicznych przez uderzenie podłużne wymaga istnienia pewnych czynników inicjujących, którymi mogą być: odstępstwa osi pręta od idealnej prostoliniowości lub powierzchni środkowej powłoki i płyty od idealnego walca lub płaszczyzny, dalej mimośrodowość siły uderzenia, niejednorodność materiału, stan naprężeń szczątkowych (walcowniczych, spawalniczych) i inne.

Stan krytyczny elementu konstrukcyjnego wiąże się z pojęciem *krytycznej strefy wzbudzenia*. Jest to obszar objęty falą ciśnienia w chwili utraty stateczności. Analiza wyników doświadczeń wykonanych na prętach [1 i 2] i powłokach walcowych [3, 4 i 5] prowadzi jednak do wniosku, że ani wymienione powyżej czynniki inicjujące ruch poprzeczny, ani parametry geometryczne, czy też sposób podparcia nieobciążonego brzegu elementu nie wpływają na postać wyboyczenia o ile długość

krytycznej strefy wzbudzenia jest mniejsza od długości pręta, powłoki, czy też od szerokości pasma.

W rozważaniach teoretycznych długość krytyczną pręta określano przez intuicyjne kojarzenie stanu krytycznego w warunkach dynamicznych z podobnym stanem przy ścisaniu statycznym, tzn. ze smukłością krytyczną (w sensie Eulera) pręta jednym końcem podpartego przegubowo, a na drugim sztywno utwierdzonego [1,6 i 7].

W pracy [8] autor wykazał istnienie stanu krytycznego pręta ściszanego uderzeniowo, analizując prędkość (fazową i grupową) propagacji fal podłużno-giętnych. W tej pracy w podobny sposób ujawnimy stany krytyczne powłoki i pasma płytowego. Dla wprowadzenia oraz dla ilustracji metody, powtórzone zostaną skrótowo rozważania dotyczące pręta. Okaże się, iż pod względem możliwości wystąpienia stanu krytycznego powłoka wykazuje odmienne cechy niż pręt oraz pasmo płytowe.

Odskształcenia wybozeniowe konstrukcji, zależnie od intensywności obciążenia, mogą być sprężyste lub sprężysto-plastyczne. W obu przypadkach postać wybożenia jest odmienna, przy czym przejściu od fazy małych ugięć sprężystych do fazy dużych ugięć sprężysto-plastycznych towarzyszy transformacja postaci ruchu. Stan krytyczny rozpoczyna się jednak zawsze w fazie sprężystej, fala bowiem tego rodzaju propaguje się szybciej niż fala plastyczna. Wobec tego dla ujawnienia krytycznych parametrów obciążenia wystarczy rozważania oprzeć na teorii małych odształceń liniowo-sprężystych. Tym niemniej w równaniach ruchu trzeba uwzględnić ścinanie oraz bezwładność obrotu elementów pręta, powłoki czy też płyty. Przy dużych prędkościach odształcenia, jakie występują podczas wybożenia dynamicznego, czynniki te odgrywają istotną rolę.

Poza tym, z powodów omówionych na wstępie, będziemy rozważać konstrukcje idealne, tzn. pozbawione czynników inicjujących ruch poprzeczny, w szczególności konstrukcje bez ugięć wstępnych. Czynniki te, jak wykazują eksperymenty, mają pewien wpływ na postać wybożenia w zakresie dużych ugięć plastycznych, które nie są przedmiotem naszych rozważań. Należy zresztą zauważyć, iż uwzględnienie ugięć wstępnych w równaniach różniczkowych zagadnienia nie zmienia w ogóle teoretycznej wartości parametrów krytycznych.

2. PRĘT PROSTY

Ruch elementów pręta w strefie wzbudzenia rządony jest układem sprzężonych równań różniczkowych, które można napisać w przemieszczeniach. Stan przemieszczeń pręta, w którym propaguje się sprzężona fala podłużno-giętna, określają trzy funkcje: funkcja przemieszczeń poosiowych $u(x, t)$, (jest to przemieszczenie przekroju o odciętej x w chwili t), funkcja ugięć $w(x, t)$, będąca przemieszczeniem poprzecznym punktu na osi centralnej y przekroju, oraz kąt $\psi(x, t)$ obrotu przekroju względem osi y .

Wprowadzamy zmienne bezwymiarowe odnosząc przemieszczenia liniowe i współrzędne x do promienia bezwładności r przekroju, czas zaś bezwymiarowy $= ct/r$, gdzie

$c = \sqrt{E/\rho}$ (E oznacza moduł Younga, ρ gęstość). Nadal zachowujemy te same oznaczenia dla przemieszczeń, a różniczkowanie względem zmiennej przestrzennej i czasowej oznaczamy odpowiednio przecinkiem i kropką u góry. Układ równań ruchu w przemieszczeniach ma wtedy postać

$$(2.1) \quad \ddot{u} - u'' = -\gamma [(w' - \psi)\psi]',$$

$$(2.2) \quad \ddot{w} - \gamma w'' = -\gamma \psi' + (u'\psi)',$$

$$(2.3) \quad \ddot{\psi} - \psi'' = (\gamma - u')(w' - \psi),$$

gdzie

$$\gamma = \frac{G}{kE} = \frac{1}{2k(1+\nu)}$$

We wzorach tych k oznacza współczynnik ścinania. Równania powyższe opisują sprzężony ruch podłużno-poprzeczny pręta bez krzywizny wstępnej i pozbawionego cech lepko-plastycznych.

Dla uproszczenia obliczeń zakładamy, że strefa wzbudzenia jest ściskana równomiernie. Przy prędkości uderzenia v_0 skrócenie właściwe $\varepsilon_0 = v_0/c > 0$, zatem

$$(2.4) \quad u' = -\varepsilon_0 = \text{const} \quad \text{dla } 0 \leq x \leq ct.$$

Ścisłe biorąc sytuacja taka możliwa jest tylko wtedy, gdy ciało uderzające ma nieskończenie dużą masę. W rzeczywistości odkształcenia maleją wykładniczo z odległością od czoła fali, ale przy dostatecznie dużym stosunku masy uderzającej do masy pręta wpływ niejednorodności pola odkształceń jest nieistotny dla rozważanego zagadnienia.

Jeżeli pominąć wpływ ruchu poprzecznego na ruch podłużny, to zamiast (2.1) otrzymujemy jednorodne równanie liniowe $\ddot{u} - u'' = 0$. Przyjmiemy dalej to uproszczenie, które jest dopuszczalne w zakresie małych ugięć sprężystych. Poza tym dzięki założeniu (2.4) zlinearyzowane równanie ruchu poosiowego spełnione jest tożsamościowo, a pozostałe dwa równania przyjmują postać

$$\ddot{w} - \gamma w'' + (\gamma + \varepsilon_0)\psi' = 0,$$

$$\ddot{\psi} - \psi'' - (\gamma + \varepsilon_0)(w' - \psi) = 0.$$

Po eliminacji kąta ψ otrzymujemy stąd jedno równanie dla funkcji ugięć

$$(2.5) \quad \ddot{w} - (1 + \gamma)\ddot{w}'' + \gamma w'' + (\gamma + \varepsilon_0)\ddot{w} + \varepsilon_0(\gamma + \varepsilon_0)w'' = 0,$$

które jest równaniem Timoszenki — uogólnionym na przypadek pręta ściskanego równomiernie.

Jeżeli równanie (2.5) ma opisywać ruch falowy, to jego rozwiązanie powinno mieć postać okresowej funkcji argumentu $(c_f t - x)/A$, gdzie c_f oznacza prędkość fazową ($0 \leq c_f < c$); A jest długością fali. Niech

$$(2.6) \quad w(x, t) = A \exp \left[i \frac{2\pi r}{A} (\bar{c}_f t - \varphi) \right], \quad \bar{c}_f \equiv \frac{c_f}{c}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Fala giętna jest falą dyspersyjną, tzn. istnieje zależność między jej długością i prędkością fazową. Związek ten otrzymujemy w wyniku podstawienia (2.6) do równania (2.5):

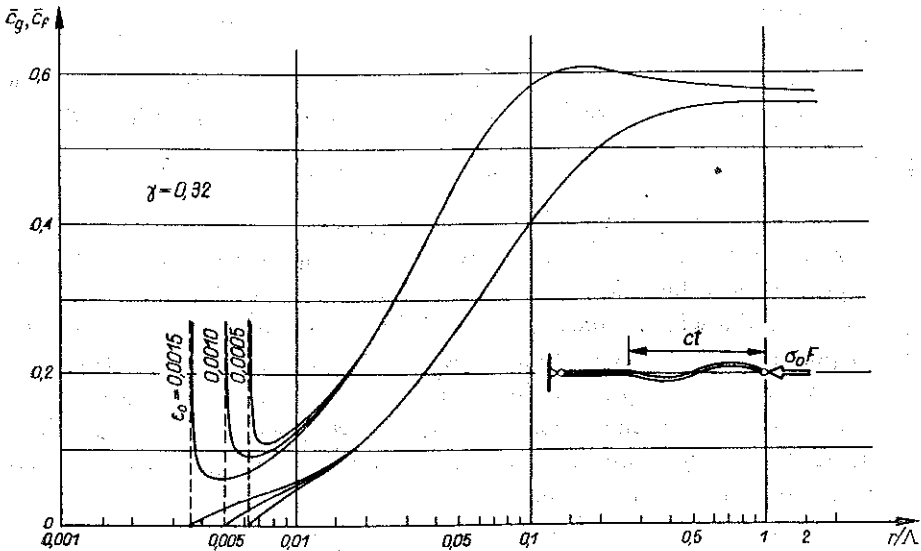
$$(2.7) \quad \frac{A}{r} = 2\pi \left[\frac{(\gamma - \bar{c}_f^2)(1 - \bar{c}_f^2)}{(\gamma + \varepsilon_0)(\bar{c}_f^2 + \varepsilon_0)} \right]^{1/2}$$

Fala o długości A propaguje się więc z określoną prędkością fazową \bar{c}_f , którą można obliczyć jako dodatni pierwiastek równania

$$(2.8) \quad \bar{c}_f^4 - [(\gamma + \varepsilon_0)(A/2\pi r)^2 + 1 + \gamma] \bar{c}_f^2 - [\varepsilon_0(\gamma + \varepsilon_0)(A/2\pi r)^2 - \gamma] = 0,$$

spełniający warunek $\bar{c}_f < \sqrt{\gamma}$ ($c_f < \sqrt{G/k\rho}$).

Na rys. 1 przedstawiona jest krzywa dyspersji $\bar{c}_f = \bar{c}_f(r/A)$, skonstruowana na podstawie równania (2.8). Przyjęto $\gamma = 0,32$, co odpowiada wartości ułamka Poissona $\nu = 0,3$ oraz współczynnikowi ścinania $k = 1,2$.



Rys. 1

W zakresie fal krótkich i średniej długości ($r/A < 0,02$) krzywe różnią się między sobą w sposób niedostrzegalny dla przyjętej skali wykresu. Otrzymujemy więc praktycznie jedną krzywą, która poza tym nie różni się od tej, jaką na podstawie ścisłego rozwiązania otrzymał R. M. Davies (w 1956 r.) bez uwzględnienia ciśnienia osiowego.

Interesujący jest przebieg krzywej w zakresie fal długich ($r/A > 0,02$), gdzie ulega ono wyraźnemu rozszczepieniu na szereg gałęzi, z których każda odpowiada innej wartości ciśnienia. Ze wzrostem długości fal krzywa dyspersji monotonicznie opada, aż przy długości

$$(2.9) \quad A = \frac{2\pi r}{\sqrt{\varepsilon_0(1 + \varepsilon_0/\gamma)}} \equiv A^*$$

przecina oś poziomą, czemu odpowiada $c_f = 0$. Oznacza to, że wzdłuż belki uderzonej poosiowo ciałem o nieskończenie dużej masie nie mogą propagować się fale giętne o długości $\geq A^*$, bowiem przy tej długości fali następuje wyboczenie dynamiczne. Falę giętą o długości $\geq A^*$ nazywamy *falą wyboczeniową*.

Ponieważ $\gamma \approx 0$ (1), oraz $\varepsilon_0 \approx 0$ (10^{-3}), więc z dużą dokładnością można przyjąć

$$(2.10) \quad A^* \approx 2\pi r / \sqrt{\varepsilon_0} = 2\pi r \sqrt{c/v_0}.$$

Smukłość krytyczna A^*/r pręta zależy więc przede wszystkim od względnej prędkości uderzenia v_0/c .

Jest rzeczą godną uwagi, że stan krytyczny pręta występuje zasadniczo przy dowolnej prędkości v_0 , o ile tylko pręt jest dostatecznie długi, ściślej gdy $L \geq A^*$ (L oznacza długość pręta). W przeciwnym przypadku wyboczenie może również nastąpić, ale przy drugim lub jeszcze późniejszym przebiegu fali ciśnienia, o ile (mimo rozproszenia energii), ciśnienie w pręcie wzrasta przy kolejnych odbiciach czoła fali od brzegów.

Przejdźmy do obliczenia *prędkości grupowej* c_g lub jej bezwymiarowego odpowiednika $\bar{c}_g = c_g/c$. Korzystamy w tym celu ze znanego związku między prędkościami c_f , c_g i długością fali

$$c_g = c_f - A \frac{dc_f}{dA}$$

lub po zastosowaniu wielkości bezwymiarowych

$$(2.11) \quad \bar{c}_g = \bar{c}_f + \frac{r}{A} \frac{d\bar{c}_f}{d(r/A)}.$$

Uwzględniając wzór (2.7) otrzymujemy po wykonaniu licznych rachunków

$$(2.12) \quad \bar{c}_g = \bar{c}_f + \frac{(1 - \bar{c}_f^2)(\varepsilon_0 + \bar{c}_f^2)(\gamma - \bar{c}_f^2)}{(1 + \varepsilon_0)(\gamma + \varepsilon_0) - (\varepsilon_0 + \bar{c}_f^2)^2} \frac{1}{\bar{c}_f}.$$

Interesujące jest zachowanie się odpowiedniej krzywej dyspersyjnej $\bar{c}_g = \bar{c}_g(r/A)$ w pobliżu stanu krytycznego, czyli dla $A \approx A^*$, $\bar{c}_f \leq \varepsilon_0 \ll 1$. Wówczas

$$\bar{c}_g \approx 2\bar{c}_f + \frac{\varepsilon_0}{\bar{c}_f},$$

skąd wynika, że dla $\bar{c}_f = \sqrt{\varepsilon_0/2}$ prędkość grupowa osiąga minimum (które wynosi $2c\sqrt{2\varepsilon_0}$), po czym dla $A \rightarrow A^*$ zaczyna gwałtownie wzrastać dążąc do nieskończoności (rys. 1). Oznacza to, iż energia ruchu poprzecznego wzrasta wówczas nieograniczenie, mimo iż ruch nie ma charakteru falowego ($c_f = 0$); jest to charakterystyczne dla stanu krytycznego.

3. POWŁOKA WALCOWA ZAMKNIĘTA

Utrata stateczności powłoki ściskanej poosiowo polega na wystąpieniu ugięć sprężystych, a przy dostatecznie dużym obciążeniu także plastycznych. Proces uderzeniowego wyboczenia powłoki śledzony był z pomocą ultraszybkiego filmowa-

nia (z prędkością rzędu 10^5 zdjęć na sekundę) powierzchni zewnętrznej, oświetlonej wiązką światła równoległego od osi.

Autorzy tego rodzaju eksperymentów, opisanych w pracach [3, 4, 5], stwierdzili, że w ruchu powłoki można wyodrębnić dwie lub trzy fazy, zależnie od intensywności obciążenia osiowego. Podczas przebiegu pierwszej fali ciśnienia (jest to faza pierwsza) ruch ma charakter osiowo-symetrycznych ugięć falistych, widocznych jako drobne zmarszczki obejmujące cały obwód powłoki. W fazie drugiej zmarszczki transformują się w charakterystyczne romboidalne wgniecenia, które można traktować jako odcinkami gładkie zginanie powierzchni walcowej. Romby mają zarys wydłużony w kierunku obwodowym i w miarę rozwoju procesu ich głębokość wzrasta, jednak przy zachowaniu zarysu pierwotnego.

W przeciwieństwie do wyboczenia statycznego, początkowe niedokładności kształtu nie wpływają zupełnie na postać ruchu w fazach początkowych. Nieistotna jest również technologia wytwarzania próbki (wytaczanie, zwijanie z arkusza blachy itd).

Przy dostatecznie intensywnym ściskaniu może wystąpić trzecia faza ruchu, podczas której regularne, płytkie wgniecenia romboidalne łączą się w większe, nieregularne i głębokie wgniecenia. Jest to faza dużych odkształceń i ugięć plastycznych, przy czym proces ten zachodzi głównie w pobliżu brzegu uderzeniowego.

Podobnie jak w przypadku uderzeniowego wyboczenia pręta, stan krytyczny powłoki można ujawnić teoretycznie analizując prędkość fazową sprzężonej fali sprężystej podłużno-giętnej. Punktem wyjścia rozważań są przemieszczeniowe równania ruchu powłoki cienkiej, uwzględniające wpływ ścinania i bezwładności obrotu na stan odkształcenia. W przypadku ogólnym pole przemieszczeń dynamicznych powłoki opisane jest trzema przemieszczeniami liniowymi $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$ odpowiednio w kierunkach osiowym, obwodowym i promieniowym oraz dwoma kątami obrotu przekroju $\psi_x(x, y, t)$, $\psi_y(x, y, t)$.

Jednak dla ujawnienia przyczyn niestateczności wystarczy analizować pierwszą fazę procesu, podczas której stan odkształcenia jest osiowo-symetryczny. Wówczas $v = \psi_y = 0$, a pozostałe trzy przemieszczenia nie zależą od współrzędnej obwodowej y , czyli mamy $u(x, t)$, $w(x, t)$, $\psi_x(x, t) \equiv \psi(x, t)$.

Równania różniczkowe, opisujące osiowo-symetryczny ruch falowy powłoki walcowej wyprowadzili HERRMANN i MIRSKY [9]. Po odrzuceniu tych wyrazów nieliniowych, które są nieistotne dla rozpatrywanego zagadnienia oraz przy pominięciu ugięć wstępnych, wspomniane równania przyjmują postać

$$(3.1) \quad u'' - \frac{v}{R} w' - \frac{1-v^2}{c^2} \ddot{u} = 0,$$

$$(3.2) \quad \frac{\beta}{12} (w' + \psi)' - \frac{1}{R^2} w + \left[w' \left(u' - \frac{v}{R} w \right) \right]' + \frac{v}{R} u' - \frac{1-v^2}{c^2} \ddot{w} = - \frac{1-v^2}{Eh} q$$

oraz

$$(3.3) \quad \psi'' - \frac{\beta}{h^2} (w' + \psi) - \frac{1-v^2}{c^2} \ddot{\psi} = 0,$$

gdzie

$$\beta \equiv 6 \frac{1-\nu}{k}, \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \equiv (\cdot)', \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \equiv (\cdot)\dot{}.$$

Spśród sił powierzchniowych uwzględniono tu jedynie ciśnienie zewnętrzne q (o kierunku promieniowym); R , h oznaczają odpowiednio promień średni i grubość powłoki.

Uwzględniając, iż naprężenie normalne osiowe

$$(3.4) \quad \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(u' - \frac{\nu}{R} w \right),$$

równanie (3.1) przekształcamy do postaci

$$(3.5) \quad \sigma'_x - \rho \ddot{u} = 0.$$

Przypuśćmy, że uderzenie następuje na brzegu $x=0$.

Podobnie jak w przypadku pręta przyjmujemy, iż naprężenie osiowe ma stałą wartość w całej strefie wzbudzenia, czyli

$$(3.6) \quad \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(u' - \frac{\nu}{R} w \right) = -E\varepsilon_0 = \text{const} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq ct, \quad \varepsilon_0 > 0.$$

Przybliżenie to jest dopuszczalne dopóty, dopóki ugięcia są bardzo małe, co faktycznie ma miejsce w pierwszej fazie procesu wyoboczenia. Konsekwencją tego założenia jest jednostajny ruch poosiowy ($\dot{u} = \text{const}$) elementów powłoki w strefie wzbudzenia, dzięki czemu równanie (3.5) jest spełnione tożsamościowo.

Korzystając dalej z założenia (3.6) przekształcamy równanie (3.2) do postaci

$$(3.7) \quad (\gamma - \varepsilon_0) w'' - \frac{1}{R} w + \gamma \psi' - \frac{1}{c^2} \ddot{w} = -\frac{q}{Eh} + \frac{\nu}{R} \varepsilon_0,$$

gdzie

$$\gamma \equiv \frac{1}{2k(1+\nu)}.$$

Jeżeli ruch idealnej powłoki w strefie wzbudzenia ma mieć charakter falowy, to rozwiązanie układu równań (3.3), (3.7) powinno mieć postać okresowych funkcji argumentu $(c_f t - x)/A$. Niech

$$(3.8) \quad \left. \begin{aligned} w(x, t) &= hA \exp \left[i \frac{2\pi}{A} (c_f t - x) \right] + w_0 \\ \psi(x, t) &= B \exp \left[i \frac{2\pi}{A} (c_f t - x) \right] \end{aligned} \right\} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq ct; \\ w(x, t) &= \psi(x, t) \equiv 0 \quad \text{dla} \quad x > ct,$$

gdzie A, B, w_0 oznaczają stałe. Podstawienie w (3.3) i (3.7) daje

$$(3.9) \quad \left[(\gamma - \varepsilon_0 - \bar{c}_f^2) \left(\frac{2\pi h}{A} \right)^2 + \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right] A + i\gamma \frac{2\pi h}{A} B = 0,$$

$$i\beta \frac{2\pi h}{A} A - \left[(1 - (1 - \nu^2) \bar{c}_f^2) \left(\frac{2\pi h}{A} \right)^2 + \beta \right] B = 0,$$

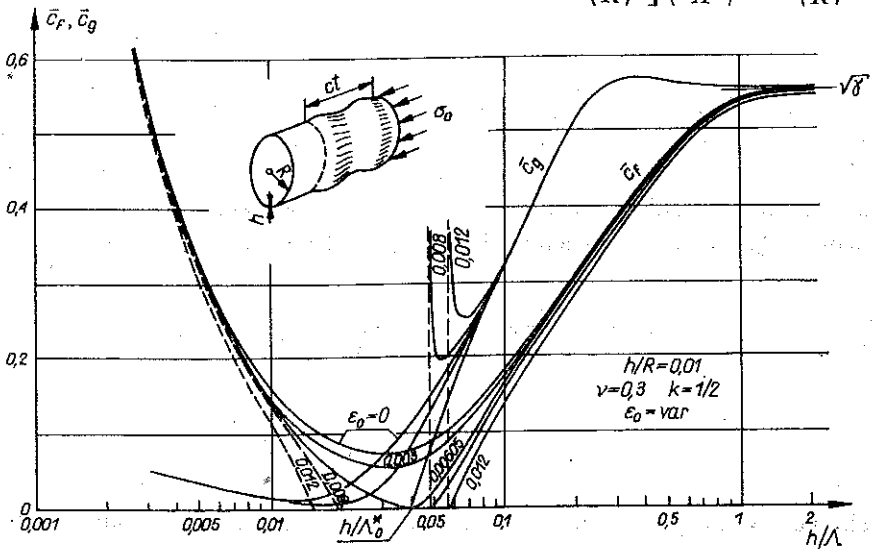
$$\bar{c}_f \equiv \frac{c_f}{c}$$

oraz

$$w_0 = R \left(\frac{qR}{Eh} - \nu \varepsilon_0 \right).$$

Warunek istnienia nietrywialnych rozwiązań układu równań (3.9) daje poszukiwany związek między długością fali i prędkością fazową:

$$(3.10) \quad (\gamma - \varepsilon_0 - \bar{c}_f^2) [1 - (1 - \nu^2) \bar{c}_f^2] \left(\frac{2\pi h}{A} \right)^4 - \left[\beta (\varepsilon_0 + \bar{c}_f^2) - \right. \\ \left. - (1 - (1 - \nu^2) \bar{c}_f^2) \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right] \left(\frac{2\pi h}{A} \right)^2 + \beta \left(\frac{h}{R} \right)^2 = 0.$$



Rys. 2

Na podstawie tego równania sporządzony został wykres na rys. 2. Są to krzywe dyspersji $\bar{c}_f = \bar{c}_f(h/\Lambda)$ dla różnych ciśnień osiowych σ_0 lub odpowiednich skróceń $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$. Przyjęto $h/R = 10^{-2}$. Godne podkreślenia jest istnienie pewnej szczególnej wartości skrócenia osiowego

$$(3.11) \quad \varepsilon_0 = \frac{h}{\beta R} \left(2\sqrt{\beta\gamma} - \frac{h}{R} \right) \equiv \varepsilon_0^*,$$

dla której krzywa dyspersji ma punkt wspólny z osią odciętych, czyli osiąga minimum przy $c_f=0$. Jeżeli ciśnienie osiowe jest mniejsze od $E\varepsilon^*$, to krzywe osiągają minimum o wartości

$$(3.12) \quad \min_A \bar{c}_f = \sqrt{\varepsilon^* - \varepsilon_0}.$$

Jest to najmniejsza prędkość fazowa osiowo-symetrycznych fal giętych w powłoce, przy czym ich długość

$$(3.13) \quad A \approx \pi R \sqrt{2\varepsilon^*}.$$

Ze wzrostem ciśnienia osiowego minimalna prędkość fazowa maleje aż do zera przy $\varepsilon_0 = \varepsilon^*$; oznacza to osiągnięcie stanu krytycznego. Odpowiednia fala wybozczeniowa ma długość

$$(3.14) \quad A_0^* = 2\pi h \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\beta} \frac{R}{2h} - \frac{1}{2\beta}} \right)^{1/2} \approx \pi \sqrt{\frac{Rh}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}}.$$

W przypadku szczególnym, którego dotyczy rys. 2, mamy $\varepsilon^* = 0,00605$ oraz $A^*/h = 24,4$.

Gdy powłoka jest bardzo cienka, czyli

$$\frac{h}{R} \ll 2\sqrt{\beta\gamma} = \frac{2}{k} \sqrt{3 \frac{1-\nu}{1+\nu}},$$

ze wzoru (3.11) otrzymujemy przybliżony wzór na naprężenie krytyczne

$$(3.15) \quad \sigma^* = E\varepsilon^* \approx \frac{2Eh}{R} \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{h}{R}.$$

Zauważmy, że taką wartość ma również naprężenie krytyczne przy *statycznym* ściskaniu powłoki *idealnej*. Jednak w tym przypadku wzór (3.15) nie ma znaczenia praktycznego, powłoka bowiem rzeczywista, wskutek niedokładności kształtu ulega wybozczeniu statycznemu już przy znacznie mniejszym naprężeniu. Natomiast w przypadku dynamicznym, wobec niewrażliwości powłoki na wspomniane czynniki, naprężenie σ^* jest podstawowym parametrem krytycznym.

Z przebiegu krzywych dyspersji $\bar{c}_f = \bar{c}_f(h/A)$ wynika, że przy odkształceniu osiowym mniejszym od ε^* wybozczenie nie następuje. Natomiast dla $\varepsilon_0 > \varepsilon^*$ krzywe dyspersji mają dwie gałęzie, odpowiadające dwóm pierwiastkom równania (3.10). Każda gałąź przecina oś poziomą ($c_f=0$) w punkcie, którego odcięta

$$(3.16) \quad \left(\frac{h}{A^*} \right)_{\mp} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\gamma-\varepsilon_0}} \left[\beta\varepsilon_0 - \left(\frac{h}{R} \right)^2 \mp \sqrt{\left[\beta\varepsilon_0 + \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right]^2 - 4\beta\gamma \left(\frac{h}{R} \right)^2} \right]^{1/2}.$$

Powstaje pytanie, która z tych wartości, mniejsza czy większa, określa faktyczną długość fali wybozczeniowej. Dla uzyskania odpowiedzi należy zbadać prędkość grupową. Korzystając z zależności (2.11) między bezwymiarowymi prędkościami:

fazową \bar{c}_f i grupową \bar{c}_g , przy uwzględnieniu równania (3.10) otrzymujemy po wykonaniu liczących działań

$$(3.17) \quad \bar{c}_g = \bar{c}_f + \frac{1-v^2}{\bar{c}_f} \frac{\beta(\varepsilon_0 + \bar{c}_f^2) - [1 - (1-v^2)\bar{c}_f^2 + 2\beta(2\pi h/\Lambda)^{-2}](h/R)^2}{\beta + [1 + (1-v^2)(\gamma - \varepsilon_0 - 2\bar{c}_f^2)](2\pi h/\Lambda)^2 + (1-v^2)(h/R)^2}.$$

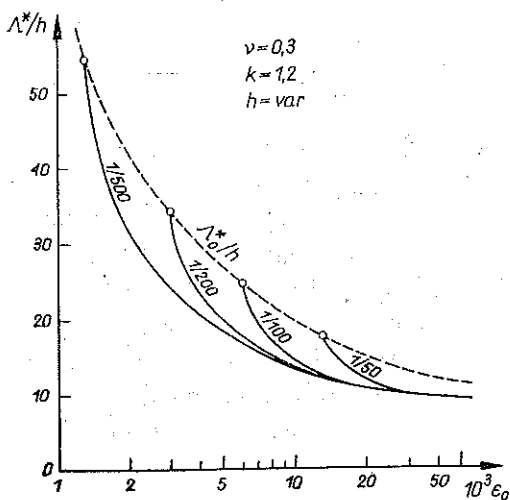
Okazuje się (rys. 2), że dla $0 \leq \varepsilon_0 < \varepsilon^*$ krzywe dyspersji $\bar{c}_g = \bar{c}_g(h/\Lambda)$ mają dwa ekstrema: maksimum w zakresie fal krótkich $\approx 0,4(h/\Lambda)$ oraz minimum w zakresie fal długich, poza tym $\bar{c}_g > 0$ dla dodatniej wartości h/Λ .

W przypadku krytycznym ($\varepsilon_0 = \varepsilon^*$) krzywa dyspersji przecina oś poziomą (tzn. $c_g = 0$), w stanie zaś nadkrytycznym ($\varepsilon_0 > \varepsilon^*$) wielkość \bar{c}_g jest dodatnia tylko dla $\Lambda < \Lambda^*$, przy czym rośnie nieograniczenie, gdy $\Lambda \rightarrow \Lambda^*$. Rozstrzyga to jednoznacznie kwestię wyboru jednego z dwóch pierwiastków (3.10) na korzyść pierwiastka większego. Tak więc długość nadkrytycznej fali wyboczeniowej, która wystąpi przy odkształceniu $\varepsilon_0 \geq \varepsilon^*$, wynosi

$$(3.18) \quad \Lambda^* = 2\pi R \sqrt{\gamma - \varepsilon_0} \left[\beta \varepsilon_0 \left(\frac{R}{h} \right)^2 - 1 + \sqrt{\left[\beta \varepsilon_0 \left(\frac{R}{h} \right)^2 + 1 \right]^2 - 4\beta\gamma \left(\frac{R}{h} \right)^2} \right]^{-1/2}.$$

Fala giętna w stanie krytycznym ($\varepsilon_0 = \varepsilon^*$) jest więc najdłuższą z fal wyboczeniowych, jakie mogą powstać w danej powłoce; przy wyboczeniu nadkrytycznym ($\varepsilon_0 > \varepsilon^*$) powstaje fala krótsza od Λ^* .

Wykresem funkcji (3.18) są krzywe ciągłe na rys. 3. Obrazują one wpływ intensywności obciążenia (ε_0) i parametrów geometrycznych powłoki (h/R) na długość fali wyboczenia. W miarę wzrostu intensywności obciążenia maleje wpływ względnej



Rys. 3

grubości powłoki na Λ^* ; np. dla $\varepsilon_0 = 0,025$ będzie $\Lambda^* \approx 10 h$ zarówno dla $h/R = 1/500$, jak i $1/50$. Linia przerywana na rys. 3 jest miejscem geometrycznym punktów krytycznych, tzn. punktów, których współrzędne wyznaczają odkształcenie krytyczne ε^* oraz odpowiednią długość (względna) fali wyboczeniowej Λ^*/h .

4. STATECZNOŚĆ PASMA PŁYTOWEGO

Weźmy pod uwagę pasmo płytowe o grubości h , które na jednym brzegu ($x=0$) zostaje nagle obciążone siłami równomiernie rozłożonymi, prostopadłymi do brzegu i leżącymi w płaszczyźnie środkowej. W kierunku x propaguje się fala ciśnienia, która przy dostatecznie dużej intensywności może doprowadzić do wybooczenia pasma. Badamy możliwość wystąpienia tego efektu podczas przebiegu pierwszej fali ciśnienia. Szerokość pasma jest, według założenia, nie mniejsza od długości ewentualnej fali wybooczenia.

Równania ruchu płyty w strefie wzbudzenia wyprowadzamy z równań (3.2) i (3.3) stosując przejście graniczne $R \rightarrow \infty$. Podobnie jak poprzednio przyjmujemy w przybliżeniu, iż naprężenie normalne w kierunku x ma stałą wartość w całej strefie wzbudzenia

$$(4.1) \quad \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} u' = -E\varepsilon_0 = \text{const} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq c_1 t, \quad \varepsilon_0 > 0.$$

W rezultacie otrzymujemy

$$(4.2) \quad \frac{\beta}{12} (w' + \psi)' - \varepsilon_0 w'' - \frac{1}{c_1^2} \ddot{w} = -\frac{1-\nu^2}{Eh} q$$

oraz

$$(4.3) \quad \psi'' - \frac{\beta}{h^2} (w' + \psi) - \frac{1}{c_1^2} \ddot{\psi} = 0, \quad c_1 = \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho}}.$$

Postępując dalej w podobny sposób jak w p. 3, w szczególności przyjmując dla ugięć i kątów obrotu reprezentacje (3.8), otrzymuje się następujący związek między długością fali zgięciowej i prędkością fazową

$$(4.4) \quad (1 - \bar{c}_f^2) \left(\frac{\beta}{12} - \varepsilon_0 - \bar{c}_f^2 \right) \left(\frac{2\pi h}{A} \right)^2 - \beta (\varepsilon_0 + \bar{c}_f^2) = 0, \quad \bar{c}_f \equiv \frac{c_f}{c_1}.$$

Odpowiednie krzywe dyspersji przedstawiono na rys. 4. Podobnie jak w przypadku pręta, krzywa dyspersji dla każdego $\varepsilon_0 \neq 0$ przecina oś poziomą, co znamionuje osiągnięcie stanu krytycznego. Długość fali wybooczeniowej przy odkształceniu ε_0 wynosi

$$(4.5) \quad A^* = 2\pi h \sqrt{\frac{\beta/12 - \varepsilon_0}{\beta\varepsilon_0}} \approx \frac{\pi h}{\sqrt{3\varepsilon_0}}.$$

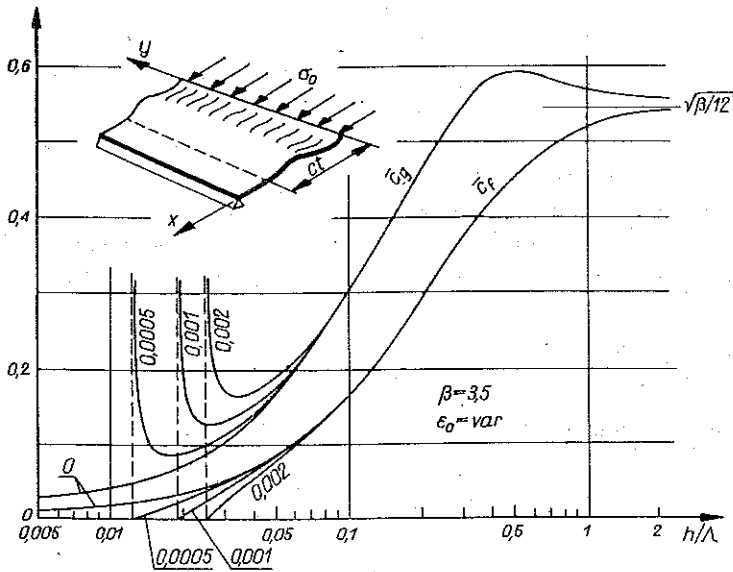
W paśmie płytowym, ściskanym dynamicznie na jednym brzegu, nie mogą propagować się fale giętne o długości większej od A^* (ε_0).

Prędkość grupowa określona jest następująco:

$$(4.6) \quad \bar{c}_g = \bar{c}_f + \frac{\beta}{\bar{c}_f} \frac{\bar{c}_f^2 + \varepsilon_0}{\beta + \left(1 + \frac{\beta}{12} - \varepsilon_0 - 2\bar{c}_f^2 \right) \left(\frac{2\pi h}{A} \right)^2},$$

a odpowiednie krzywe dyspersji dążą do nieskończoności, gdy $A \rightarrow A^*$ (rys. 4).

Oczywiście na to, aby przy danej intensywności obciążenia ε_0 wystąpiła fala wyboczeniowa, pasmo musi mieć szerokość większą lub równą Λ^* .



Rys. 4

5. UWAGI KOŃCOWE

Jak wykazano w pracy stan krytyczny typowych elementów konstrukcyjnych, poddanych uderzeniowemu ścisłaniu, można ujawnić teoretycznie na drodze analizy warunków propagacji sprzężonej fali podłużno-giętnej. W tych warunkach zmniejszenie prędkości fazowej do zera, przy równoczesnym nieograniczonym wzroście prędkości grupowej, znamionuje krytyczny stan ruchu. W strefie wzbudzenia rozwija się wówczas intensywnie fala giętna o określonej długości, zależnej przede wszystkim od intensywności obciążenia; jest to tzw. fala wyboczeniowa. Jej długość jest tym mniejsza, im bardziej intensywnie obciążona, tzn. im większa prędkość uderzenia.

Jeśli chodzi o możliwość wywołania sprężystego stanu krytycznego w rozmaitych elementach konstrukcyjnych, to powłoka wykazuje w tym względzie odmienne cechy niż pręt lub pasmo płytowe. O ile bowiem w tych dwóch elementach każdemu ciśnieniu osiowemu odpowiada określona fala wyboczeniowa, o tyle dla wyboczenia powłoki ciśnienie osiowe musi przekroczyć pewną wartość minimalną. Inna sprawa, że pręt oraz pasmo płytowe mogą nie ulec wyboczeniu, o ile ich wymiar w kierunku uderzenia okaże się zbyt mały w stosunku do długości fali wyboczenia, właściwej danemu ciśnieniu.

Natomiast gdy prędkość uderzenia jest dostatecznie duża, fala wybozczeniowa może mieć charakter plastyczny. Wówczas jej długość jest inna niż długość fali sprężystej, poza tym postać wybozczenia uformowana w późniejszej fazie ruchu, jak wykazują doświadczenia, przestaje być osiowo-symetryczna. Zagadnienia te wymagają dalszych badań teoretycznych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. G. GERARD, H. BECKER, *Column behaviour under conditions of impact*, Journ. Aeronaut. Sci., 19, 1, 58-60, 1952.
2. Б. М. Малышев, *Устойчивость стержней при ударном сжатии*, Инж. ж. Мех. тверд. тела, 4, 137-142, 1966.
3. H. E. LINDBERG, R. E. HERBERT, *Dynamic buckling of a thin cylindrical shell under axial impact*, J. Appl. Mech., 1, E 33, 105-113, 1966.
4. И. А. Кийко, *Продольный удар по тонкой цилиндрической оболочке*, Вестн. Моск. Унив., Мат.-механ., 3, 118-121, 1972.
5. Т. Ц. Нечипорук, *Тен Эн Со, Экспериментальное исследование ударного выпучивания цилиндрических оболочек*, Изв. АН СССР, Мех. твер. тела, 3, 175-182, 1974.
6. А. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Москва 1967.
7. А. С. Вольмир, *Нелинейная динамика пластин и оболочек*, Москва 1972.
8. R. GRYBÓŚ, *Wybozczenie dynamiczne pręta o dużej smukłości*, Mech. Teoret. Stos., 14, 1, 1976.
9. G. HERMANN, J. MIRSKY, *Three dimensional and shell theory analysis of axially symmetric motions of cylinders*, Journ. Appl. Mech., 23, 4, 563-568, 1956.
10. P. M. NAGHDI, R. M. COOPER, *Propagation of elastic waves in cylindrical shells including the effects of transverse shear and rotatory inertia*, Journ. Acoust. Soc. Amer., 28, 1, 56-63, 1956.

Резюме

УДАРНОЕ ВЫПУЧИВАНИЕ ИЗГИБ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Обсуждается устойчивость типичных конструктивных элементов (стержня, цилиндрической оболочки и полосы) при ударном продольном сжатии. Анализ дисперсионных кривых, вычерченных для сопряженной продольно-изгибной волны при разных осевых давлениях, выявляет существование такой длины волны L^* , при которой фазовая скорость убывает к нулю, а групповая скорость растет неограниченно. Это ситуация характеристическая для критического состояния. В зоне возбуждения развивается тогда интенсивно изгибная волна с длиной L^* , называемая волной выпучивания; это самая длинная из изгибных волн, какие могут распространяться в ударно сжимаемом конструктивном элементе. В случае стержня и полосы каждой скорости удара отвечает определенная волна продольного изгиба, которая появляется если только длина стержня или ширина полосы не меньше чем L^* . Вместо этого в случае оболочки существует критическое значение осевого давления (или скорости удара), ниже которого выпучивание не возможно. Рассматривается исключительно осесимметричное состояние перемещений оболочки, которое согласно наблюдениям выступает всегда в начальной фазе процесса ударного продольного изгиба.

SUMMARY

IMPACT BUCKLING OF STRUCTURE ELEMENTS

A stability of typical structure elements (rod, cylindrical shell and plate layer) under longitudinal compressional impact is considered. An analysis of dispersion curves, traced for coupled longitudinal-flexural wave for different axial pressures, has shown an existence of a such wave length λ^* , at which the phase velocity decreases to zero and the group velocity increases infinitely. This phenomenon characterizes the critical state. Thus in the disturbed zone the flexural wave of the length λ^* , called the buckling wave, is intensively developed. It is the longest wave of the all flexural waves which may propagate in a structure element under compressional impact. In a case of the rod or the plate layer one buckling wave, which allways appears if the length of the rod or the width of the layer is not smaller than λ^* , corresponds to each impact velocity. But in a case of a shell there is a critical value of the axial pressure —(or impact velocity) beneath of which the buckling is impossible. Only the axially-symmetric state of the shell displacements is considered which according to the observations allways appears in an initial phase of the buckling impact process.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 stycznia 1976 r.