

OBLICZANIE PRZESTRZENNYCH UKŁADÓW RAMOWYCH Z UWZGLĘDNIENIEM WPŁYWU SIŁ OSIOWYCH NA DEFORMACJĘ GIĘTNĄ PRĘTÓW

W. PIETRASZKIEWICZ, M. LIDKE, J. WEKEZER i A. ZMITROWICZ (GDAŃSK)

Przedstawiono metodę i program na komputer ODRA 1204 obliczania przestrzennych układów ramowych na podstawie teorii geometrycznie nieliniowej uwzględniającej wpływ sił osiowych na deformację giętną prętów.

Dla różnych warunków podparcia końców pręta zbudowano lokalne macierze sztywności zależne od siły osiowej. Równania równowagi węzłów w stanie odkształconym prowadzą do nieliniowego układu równań względem przemieszczeń i obrotów węzłów, który rozwiązano metodą kolejnych przybliżeń. Stosując kryterium deformacyjne podano sposób przybliżonego określania stanu krytycznego układu ramowego.

Opracowany program zastosowano m.in. do obliczeń statycznych wysięgnika ramowego żurawia pokładowego, modelowanego układem 49 prętów.

1. WSTĘP

Dostępne w kraju programy obliczeń na komputerach przestrzennych układów ramowych oparte są głównie na klasycznej liniowej teorii prętów sprężystych. W ramach teorii liniowej równania równowagi węzłów formułowane są dla stanu nieodkształconego układu. Pomija się też wszelkie efekty sprzężeń sił wewnętrznych i deformacji oraz wpływy związane ze zmianą parametrów geometrycznych układu.

W szeregu konstrukcji prętowych modelowanych przestrzennym układem ramowym niektóre pręty układu, obok momentów zginających i skręcających oraz sił tnących, przenoszą znaczne siły osiowe. Siły te mogą być przyczyną istotnych zmian sztywności giętnej tych prętów, co może spowodować zwiększenie się odkształcalności układu, niekorzystną redystrybucję sił wewnętrznych lub nawet zniszczenie konstrukcji z powodu utraty stateczności. Dokładniejsze określenie sił wewnętrznych i przemieszczeń takich konstrukcji jest możliwe jedynie przy użyciu teorii geometrycznie nieliniowej [1 i 2].

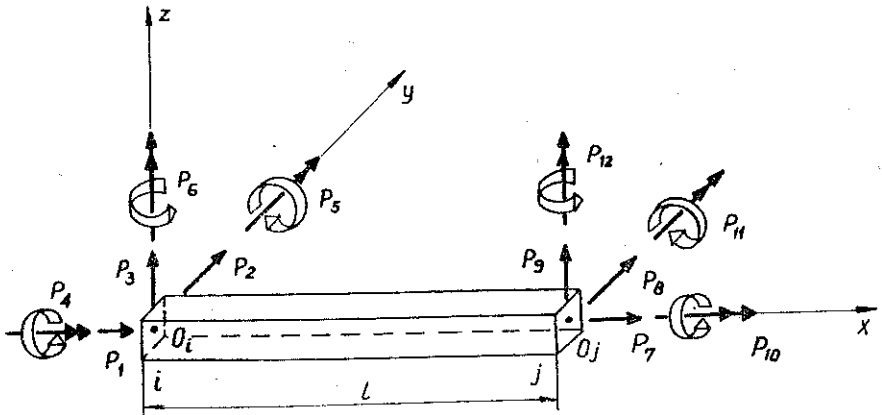
W niniejszej pracy przedstawiono metodę obliczania przemieszczeń i obrotów węzłów oraz sił wewnętrznych w prętach przestrzennego układu ramowego na podstawie teorii geometrycznie nieliniowej, uwzględniającej wpływ sił osiowych na deformację giętną prętów. Przyjęto, że pręty układu zbudowane są z materiału liniowo-sprężystego, a występujące odkształcenia, przemieszczenia i obroty są małe. Lokalna macierz sztywności pręta o stałych charakterystykach między węzłami zbudowana została na podstawie wzorów metody deformacji [3 i 4], powstających

z całkowania liniowego równania różniczkowego pręta obciążonego siłą osiową. Rozwiązanie to uwzględnia zmniejszenie się sztywności giętej pręta przy ściskaniu oraz zwiększenie się tej sztywności przy rozciąganiu. Rozważono pręty o różnych warunkach podparcia na brzegu: pręt obustronnie utwierdzony, przegubowo podparty na jednym końcu i utwierdzony na drugim oraz obustronnie przegubowo podparty. Przy zastosowaniu postępowania właściwego dla metody elementów skończonych [5 i 6] równania równowagi węzłów dla stanu odkształconego zostały sprowadzone do nieliniowego układu równań względem przemieszczeń i obrotów węzłów. Układ ten rozwiązano metodą kolejnych przybliżeń. Podano również sposób przybliżonego określenia stanu krytycznego układu ramowego na podstawie kryterium deformacyjnego.

Opierając się na przedstawionej metodzie opracowano algorytm i program obliczeń na komputer ODRA 1204. Możliwości i działanie programu zilustrowano na prostym przykładzie pręta wspornikowego. Program wykorzystany został również z powodzeniem do obliczeń wytrzymałościowych wysięgnika ramowego żurawia pokładowego modelowanego układem 49 prętów [7].

2. LOKALNA MACIERZ SZTYWNOŚCI PRĘTA

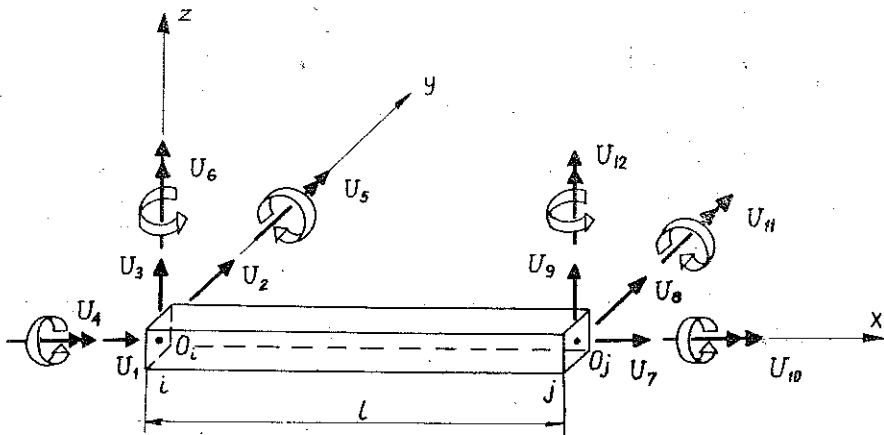
Niech O_ixyz będzie lokalnym ortonormalnym układem współrzędnych pręta o początku w węźle i oraz końcu w węźle j . Oś O_ix skierowana jest wzdłuż osi pręta, zaś osie O_iy oraz O_iz określają główne centralne osie bezwładności przekroju poprzecznego pręta.



Rys. 1

Dodatknie kierunki sił węzłowych P_r , $r=1, 2, \dots, 12$ podane są na rys. 1. Wielkości P_1, P_2, P_3 oznaczają składowe wektora siły, a P_4, P_5, P_6 — składowe wektora momentu sił przyłożonych do przekroju początkowego i pręta. Symbole P_7, P_8, P_9 oznaczają składowe wektora siły, a P_{10}, P_{11}, P_{12} — składowe wektora momentu sił przyłożonych do przekroju końcowego j pręta.

Odpowiadające siłom węzłowym parametry stanu przemieszczenia $U_r, r = 1, 2, \dots, 12$ podano na rys. 2. Symbole U_1, U_2, U_3 oznaczają składowe wektora przemieszczenia, a U_4, U_5, U_6 — składowe wektora obrotu przekroju początkowego i pręta. Symbole U_7, U_8, U_9 oznaczają składowe wektora przemieszczenia, a U_{10}, U_{11}, U_{12} składowe wektora obrotu przekroju końcowego j pręta.



Rys. 2

Wprowadzając wektory sił węzłowych \mathbf{P}^e oraz przemieszczeń węzłowych \mathbf{U}^e elementu prętowego $i-j$ w układzie lokalnym,

$$(2.1) \quad \mathbf{P}^e = [P_1, P_2, \dots, P_{12}]^T, \quad \mathbf{U}^e = [U_1, U_2, \dots, U_{12}]^T,$$

zależność między siłami i przemieszczeniami węzłowymi można przedstawić w postaci macierzowej:

$$(2.2) \quad \mathbf{P}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{U}^e,$$

gdzie \mathbf{K}^e jest lokalną macierzą sztywności elementu prętowego o wymiarze 12×12 .

Przy uwzględnieniu wpływu siły osiowej $N = P_1 = -P_7$ na deformację giętą pręta niektóre elementy macierzy zależą od N . Postać tej zależności określona jest rozwiązaniem równania różniczkowego pręta ściskanego (rozciąganego) dla zagadnienia płaskiego, podanym np. w pracach [3 i 4].

Niech E i G będą odpowiednio modułem sprężystości i modułem odkształcenia postaciowego materiału pręta, a przez A, C, I_y, I_z oznaczmy kolejno pole przekroju poprzecznego, charakterystykę pręta na skręcanie oraz momenty bezwładności przekroju względem osi $O_i y$ oraz $O_i z$. Pomijając sprzężenie deformacji giętej w obu płaszczyznach głównych oraz deformacji giętej i skrętnej, korzystając ze wzorów podanych w [3 i 4] można zbudować macierz \mathbf{K}^e dla różnych warunków podparcia pręta na brzegu. Dla pręta obustronnie utwierdzonego budowa macierzy \mathbf{K}^e podana została w tablicy 1.

Tablica 1

$\frac{EA}{l}$								$-\frac{EA}{l}$								
	$\frac{EJ_z \delta_z}{l^3}$								$\frac{EJ_z \vartheta_z}{l^2}$							$\frac{EJ_z \vartheta_z}{l^2}$
		$\frac{EJ_y \delta_y}{l^3}$								$-\frac{EJ_y \vartheta_y}{l^2}$						$-\frac{EJ_y \vartheta_y}{l^2}$
			$\frac{GC}{l}$								$\frac{GC}{l}$					
		$-\frac{EJ_y \vartheta_y}{l^2}$								$\frac{EJ_y \alpha_y}{l}$						$\frac{EJ_y \beta_y}{l}$
	$\frac{EJ_z \vartheta_z}{l^2}$								$\frac{EJ_z \alpha_z}{l}$							$\frac{EJ_z \beta_z}{l}$
$-\frac{EA}{l}$								$\frac{EA}{l}$								
	$-\frac{EJ_z \delta_z}{l^3}$															$-\frac{EJ_z \vartheta_z}{l^2}$
		$-\frac{EJ_y \delta_y}{l^3}$														$\frac{EJ_y \vartheta_y}{l^2}$
			$\frac{GC}{l}$								$\frac{GC}{l}$					
		$-\frac{EJ_y \vartheta_y}{l^2}$								$\frac{EJ_y \beta_y}{l}$						$\frac{EJ_y \alpha_y}{l}$
	$\frac{EJ_z \vartheta_z}{l^2}$								$\frac{EJ_z \beta_z}{l}$							$\frac{EJ_z \alpha_z}{l}$

Występujące w tablicy 1 funkcje zależą od siły osiowej w pręcie za pośrednictwem parametrów

$$(2.3) \quad \lambda_y = l \sqrt{\frac{N}{EJ_y}}, \quad \lambda_z = l \sqrt{\frac{N}{EI_z}}.$$

Gdy $N > 0$, pręt jest ściskany; funkcje zależne od parametru λ_y mają postać

$$(2.4) \quad \alpha_y = \frac{\lambda_y (\sin \lambda_y - \lambda_y \cos \lambda_y)}{2(1 - \cos \lambda_y) - \lambda_y \sin \lambda_y}, \quad \vartheta_y = \alpha_y + \beta_y,$$

$$\beta_y = \frac{\lambda_y (\lambda_y - \sin \lambda_y)}{2(1 - \cos \lambda_y) - \lambda_y \sin \lambda_y}, \quad \delta_y = 2(\alpha_y + \beta_y) - \lambda_y^2.$$

Gdy $N < 0$, pręt jest rozciągany, a wartości parametru λ_y są urojone:

$$(2.5) \quad \lambda_y = i\bar{\lambda}_y, \quad \bar{\lambda}_y = l \sqrt{\frac{-N}{EI_y}}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Wyrażając funkcje trygonometryczne argumentu urojonego λ_y przez funkcje hiperboliczne argumentu rzeczywistego $\bar{\lambda}_y$, dla $N < 0$ otrzymamy

$$(2.6) \quad \alpha_y = \frac{\bar{\lambda}_y (\text{sh } \bar{\lambda}_y - \bar{\lambda}_y \text{ch } \bar{\lambda}_y)}{2(\text{ch } \bar{\lambda}_y - 1) - \bar{\lambda}_y \text{sh } \bar{\lambda}_y}, \quad \vartheta_y = \alpha_y + \beta_y,$$

$$\beta_y = \frac{\bar{\lambda}_y (\bar{\lambda}_y - \text{sh } \bar{\lambda}_y)}{2(\text{ch } \bar{\lambda}_y - 1) - \bar{\lambda}_y \text{sh } \bar{\lambda}_y}, \quad \delta_y = 2(\alpha_y + \beta_y) + \bar{\lambda}_y^2.$$

Dla małych wartości siły osiowej takich, że $|NI^2/EI_y| < 0,1$ wartości funkcji α_y oraz β_y można określić z wystarczającą dokładnością z rozwinięć asymptotycznych [1]:

$$(2.7) \quad \alpha_y = 4 - \frac{2}{15} \frac{NI^2}{EJ_y} - \frac{11}{6300} \left(\frac{NI^2}{EI_y} \right)^2 + \dots,$$

$$\beta_y = 2 + \frac{1}{30} \frac{NI^2}{EJ_y} + \frac{13}{12600} \left(\frac{NI^2}{EI_y} \right)^2 + \dots$$

Występujące w tablicy 1 funkcje $\alpha_z, \beta_z, \vartheta_z, \delta_z$ obliczamy ze wzorów (2.4) – (2.7), po podstawieniu w nich λ_z i I_z na miejsce λ_y i I_y .

Jeżeli $N \rightarrow 0$, to tak zbudowana lokalna macierz sztywności pręta przechodzi w macierz podaną w [8] dla przypadku liniowej deformacji pręta przestrzennego.

Dla pręta utwierdzonego na początku i oraz przegubowo podpartego na końcu j budowa macierzy \mathbf{K}^e o wymiarze 8×8 , uzupełniona zerami do wymiaru 12×12 , podana została w tablicy 2. Wynika ona z nałożenia na równanie (2.2) dla pręta obustronnie utwierdzonego więzów postaci $P_4 = P_{10} = P_{11} = P_{12} = 0$ i wyrażeniu U_{11} i U_{12} przez inne przemieszczenia węzłowe.

Tablica 2

$\frac{EA}{l}$								$\frac{EA}{l}$							
	$\frac{EJ_z \delta'_z}{l^3}$						$\frac{EJ_z \alpha'_z}{l^2}$		$-\frac{EJ_z \delta'_z}{l^3}$						
		$\frac{EJ_y \delta'_y}{l^3}$					$\frac{EJ_y \alpha'_y}{l^2}$			$-\frac{EJ_y \delta'_y}{l^3}$					
			$-\frac{EJ_y \alpha'_y}{l}$								$\frac{EJ_y \alpha'_y}{l^2}$				
				$\frac{EJ_z \alpha'_z}{l^2}$							$-\frac{EJ_z \alpha'_z}{l^3}$				
$-\frac{EA}{l}$								$\frac{EA}{l}$							
	$-\frac{EJ_z \delta'_z}{l^3}$						$\frac{EJ_z \alpha'_z}{l^2}$		$\frac{EJ_z \delta'_z}{l^2}$						
		$-\frac{EJ_y \delta'_y}{l^3}$								$\frac{EJ_y \delta'_y}{l^3}$					
			$-\frac{EJ_y \alpha'_y}{l}$								$\frac{EJ_y \alpha'_y}{l^2}$				
				$\frac{EJ_z \alpha'_z}{l^2}$							$-\frac{EJ_z \alpha'_z}{l^3}$				

Występujące w tabelicy 2 nowe funkcje zależne od λ_y mają postać

$$(2.8) \quad \alpha'_y = \frac{\alpha_y^2 - \beta_y^2}{\alpha_y}, \quad \delta'_y = \frac{\alpha_y(\alpha_y - \lambda_y^2) - \beta_y^2}{\alpha_y}.$$

Podobne wzory zachodzą dla α'_z i δ'_z .

Dla pręta przegubowo podpartego na początku i oraz utwierdzonego na końcu j budowa macierzy \mathbf{K}^e wynika łatwo z zamiany kolejności numeracji początku i końca pręta poprzedniego przypadku i nie jest tu podana.

Dla pręta obustronnie podpartego przegubowo jedynymi niezerowymi elementami macierzy sztywności \mathbf{K}^e są następujące:

$$(2.9) \quad K_{11}^e = K_{77}^e = \frac{EA}{l}, \quad K_{17}^e = K_{71}^e = -\frac{EA}{l},$$

$$K_{22}^e = K_{88}^e = -\frac{EJ_z}{l^3} \lambda_z^2, \quad K_{28}^e = K_{82}^e = \frac{EJ_z}{l^3} \lambda_z^2$$

$$K_{33}^e = K_{99}^e = \frac{EJ_y}{l^3} \lambda_y^2, \quad K_{39}^e = K_{93}^e = \frac{EJ_y}{l^3} \lambda_y^2$$

3. GLOBALNA MACIERZ SZTYWNOŚCI UKŁADU RAMOWEGO

Niech $OXYZ$ będzie globalnym ortonormalnym układem współrzędnych, wspólnym dla wszystkich prętów przestrzennego układu ramowego (rys. 3).

Transformacja tego układu w lokalny może być dokonana przez przesunięcie równoległe sprowadzające punkt O do O_i oraz przez kolejno wykonane trzy obroty skończone o kąty α , β i γ [8]. Macierz tej transformacji ortogonalnej ma postać

$$(3.1) \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \beta & -\sin \beta \\ \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \cos \beta \sin \gamma \\ \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix},$$

$$(3.2) \quad \cos \alpha = \begin{cases} \frac{\Delta X}{l_{XY}}, & \text{gdy } l_{XY} \neq 0, \\ 1, & \text{gdy } l_{XY} = 0, \end{cases}$$

$$\sin \alpha = \begin{cases} \frac{\Delta Y}{l_{XY}}, & \text{gdy } l_{XY} \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } l_{XY} = 0, \end{cases}$$

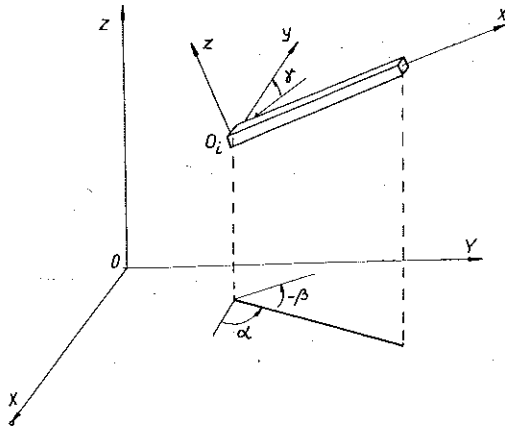
$$\cos \beta = \frac{l_{XY}}{l}, \quad \sin \beta = -\frac{\Delta Z}{l},$$

gdzie

$$(3.3) \quad \Delta X = X_j - X_i, \quad \Delta Y = Y_j - Y_i, \quad \Delta Z = Z_j - Z_i,$$

$$l_{XY} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}, \quad l = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}.$$

Warto zauważyć, że tak wybrane kąty obrotu α i β są określone przez współrzędne końców pręta w układzie globalnym, natomiast kąt γ , będący obrotem dookoła lokalnej osi $O_i x$ pręta, powinien być wprowadzony do obliczeń dodatkowo. Określa on położenie głównych centralnych osi bezwładności przekroju pręta.



Rys. 3

Wektory sił i przemieszczeń węzłowych oraz lokalną macierz sztywności można przetransformować do układu globalnego za pomocą wzorów

$$(3.4) \quad \mathbf{F}^e = \mathbf{C}^T \mathbf{P}^e, \quad \mathbf{G}^e = \mathbf{C}^T \mathbf{U}^e, \quad \mathbf{K}^g = \mathbf{C}^T \mathbf{K}^e \mathbf{C},$$

gdzie macierz tej transformacji ma postać

$$(3.5) \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 & & & \\ & C_1 & & \\ & & C_1 & \\ & & & C_1 \end{bmatrix}.$$

Rozważmy przestrzenny układ ramowy złożony z r prętów oraz w węzłów. Niech na s -ty węzeł układu zdeformowanego działają siły i momenty zewnętrzne określone przez swe składowe w układzie globalnym w postaci wektora obciążeń węzłowych

$$(3.6) \quad \mathbf{F}_s = [F_{Xs}, F_{Ys}, F_{Zs}, M_{Xs}, M_{Ys}, M_{Zs}]^T.$$

Niech w s -tym węźle zbiega się $p+k$ prętów, z których p ma tutaj swój początek, a k ma swój koniec. Wykorzystując strukturę blokową zależności dla elementu, równania równowagi sił i momentów dla każdego węzła układu zdeformowanego można przedstawić w postaci

$$(3.7) \quad \sum_{m=1}^p \mathbf{F}_{sm}^e + \sum_{n=1}^k \mathbf{F}_{ns}^e = \mathbf{F}_s, \quad s = 1, 2, \dots, w,$$

gdzie \mathbf{F}_{sm}^e jest wektorem sił węzłowych początku m -tego pręta, a \mathbf{F}_{ns}^e — wektorem sił węzłowych końca n -tego pręta, przedstawione w układzie globalnym.

Stosując ogólne postępowanie właściwe dla metody elementów skończonych [9 i 10] układ (3.7) sprowadzamy do postaci

$$(3.8) \quad \mathbf{K}(\mathbf{G}) \mathbf{G} = \mathbf{F},$$

gdzie \mathbf{F} jest danym wektorem obciążeń węzłowych o wymiarze $1 \times 6w$, \mathbf{G} — nieznanym wektorem przemieszczeń węzłowych o wymiarze $1 \times 6w$, $\mathbf{K}(\mathbf{G})$ — globalną macierzą sztywności o wymiarze $6w \times 6w$ układu ramowego, zależną od przemieszczeń węzłowych poprzez siły osiowe w prętach.

Tak zbudowana macierz $\mathbf{K}(\mathbf{G})$ jest na ogół macierzą osobliwą. Do jednoznacznego sformułowania zadania należy wprowadzić do (3.8) dane ograniczenia deformacji konstrukcji, tzw. geometryczne warunki brzegowe [5].

4. ROZWIĄZANIE UKŁADU NIELINIOWEGO

Wyznaczenie sił wewnętrznych i przemieszczeń w prętach przestrzennego układu ramowego zależy więc od rozwiązania nieliniowego układu równań (3.8) względem przemieszczeń węzłów w układzie globalnym. Rzeczywiście, po wyznaczeniu \mathbf{G} możemy zbudować \mathbf{G}^e oraz \mathbf{K}^e dla każdego elementu prętowego, a stąd odwracając zależności (3.4) otrzymać \mathbf{U}^e oraz \mathbf{K}^e , co pozwala z (2.2) wyznaczyć siły węzłowe \mathbf{P}^e dla każdego pręta.

Rozwiązanie nieliniowego układu równań typu (3.8) może być uzyskane za pomocą różnych algorytmów i metod szczegółowo omówionych w [9]. W niniejszej pracy zastosowano schemat postępowania oparty na metodzie kolejnych przybliżeń. W metodzie tej tworzymy ciąg rozwiązań zbieżnych do ścisłego rozwiązania układu (3.8).

Niech $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}(\mathbf{O}) = \text{const}$ będzie globalną macierzą sztywności odpowiedniego zagadnienia liniowego powstającą z $\mathbf{K}(\mathbf{G})$ przez zaniedbanie wpływu sił osiowych na deformację giętą pręta. Wstępne oszacowanie wektora przemieszczeń węzłowych otrzymamy z rozwiązania zagadnienia liniowego:

$$(4.1) \quad \mathbf{G}_0 = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{F}.$$

Kolejne przybliżenia rozwiązania wynikają ze wzoru rekurencyjnego

$$(4.2) \quad \mathbf{K}(\mathbf{G}_n) \mathbf{G}_{n+1} = \mathbf{F}, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Na każdym kroku iteracji globalna macierz sztywności jest budowana od nowa z uwzględnieniem obliczonych w poprzednim kroku sił normalnych w prętach i wynikających stąd zmian elementów lokalnych macierzy sztywności (tablica 1 i 2). Liczba potrzebnych iteracji N wynika z żądanej dokładności rozwiązania. Rośnie ona przy zbliżaniu się wartości \mathbf{F} do wartości krytycznej odpowiadającej utracie stateczności układu ramowego.

5. BADANIA STATECZNOŚCI UKŁADU

Opracowana metoda obliczeń nieliniowych deformacji przestrzennego układu ramowego może być wykorzystana również do przybliżonego badania stanu krytycznego układu wskazującego na utratę stateczności.

W zagadnieniach stateczności typu bifurkacyjnego stosuje się na ogół kryterium badania miejsc zerowych wyznacznika macierzy globalnej. Jest to jednak merytorycznie uzasadnione tylko w przypadku pomijalnie małych przedbifurkacyjnych odkształceń układu.

Do przybliżonego określenia stanu krytycznego układu zdeformowanego wykorzystujemy tutaj tzw. kryterium deformacyjne. Zakładamy, że globalny wektor obciążeń węzłowych uzależniony jest od jednego parametru $\mathbf{F}=\mathbf{F}(P)$. Wartość P , przy której deformacja układu wskazuje na osiągnięcie stanu krytycznego, określona jest w sposób następujący.

Niech P_0 jest wartością parametru P dla pewnego obciążenia nominalnego. Budujemy ciąg rozwiązań nieliniowych równania (3.8) dla ciągu wartości P wzrastających według wzoru

$$(5.1) \quad P_m = P_0 + \sum_{k=1}^m \Delta P_k.$$

gdzie ΔP_k jest kolejnym przyrostem parametru P .

Dla każdego P_m wyznaczane są bezwzględne wartości przemieszczeń U_i^m i obrotów Φ_i^m każdego węzła i układu ramowego. Parametr P zwiększany jest tak długo aż przemieszczenie lub obrót chociaż jednego węzła osiągną pewną z góry ustaloną wartość, wspólną dla wszystkich węzłów:

$$(5.2) \quad \max_i U_i^m \geq U_{kr}, \quad \max_i \Phi_i^m \geq \Phi_{kr}.$$

Tę wartość P_m , przy której zachodzi (5.2), przyjmujemy za wartość krytyczną przy której osiągnięty został stan krytyczny układu.

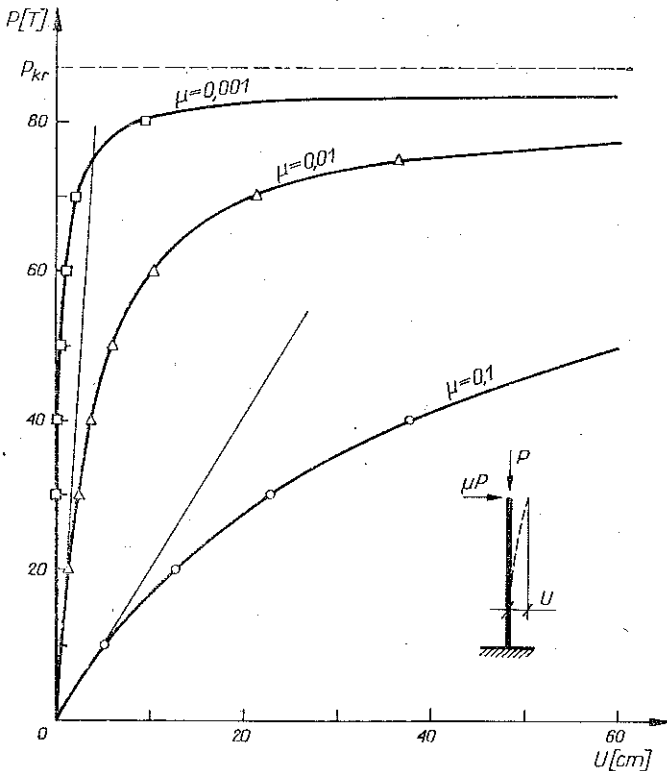
Przy przyjęciu stosunkowo dużych U_{kr} i Φ_{kr} spełnienie kryterium (5.2) jest możliwe jedynie w przypadku rozbieżnego procesu kolejnych przybliżeń (4.2). Fakt pojawienia się rozbieżnego procesu iteracyjnego może być więc wykorzystany jako numeryczne kryterium osiągnięcia stanu krytycznego. Przy dużych U_{kr} i Φ_{kr} oraz ΔP_k zmiana znaku rozwiązania wskazuje na przekroczenie miejsca zerowego wyznacznika macierzy globalnej i fakt ten również może być uznany za kryterium osiągnięcia stanu krytycznego.

6. OBLICZENIA NUMERYCZNE

Opierając się na przedstawionej metodzie opracowany został program obliczeń na komputer Odra 1204. Dla każdego układu ramowego program wymaga podania m.in. stałych materiałowych prętów, współrzędnych węzłów, położenia osi głównych charakterystyk geometrycznych przekrojów prętów, warunków podparcia, obciążeń działających w węzłach oraz kryterium utraty stateczności. Tabulogramy wydruków wyników obliczeń, dla każdego obciążenia i każdego kroku iteracyjnego, zawierają m.in. składowe reakcje podporowych, sprawdzenie równowagi globalnej układu, przemieszczenia węzłów oraz składowe siły wewnętrznych na początku i końcu każdego pręta. W [7] uzupełniono program obliczaniem naprężeń w przekrojach przywęzłowych z uwzględnieniem globalnej utraty stateczności.

Możliwości opracowanego programu ogranicza jedynie dostępny obszar pamięci bębnowej zestawu komputera ODRA 1204. Dla przykładu, przy dostępnym obszarze rzędu 150 tys. komórek i szerokości półpasma globalnej macierzy sztywności ok. 72 program «może wykonać obliczenia» układu ramowego zawierającego do 600 stopni swobody.

Dla sprawdzenia poprawności działania opracowanego programu obliczeń, wykonano szereg testowych przykładów numerycznych dla prostych układów prętowych.

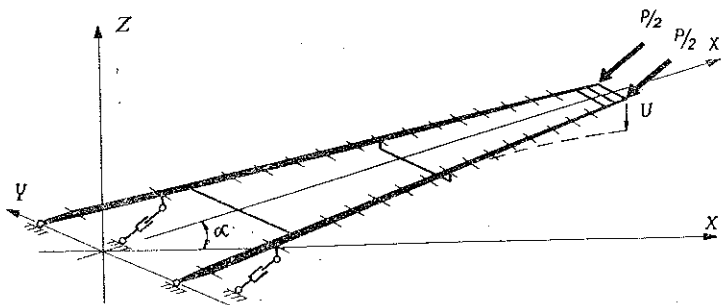


Rys. 4

Na rys. 4 podano przykładowo wyniki testowych obliczeń numerycznych dla pręta wspornikowego obciążonego na końcu siłą osiową P oraz małą siłą tnącą μP . Dane liczbowe: $l=500$ cm, $E=2,1 \cdot 10^6$ kG/cm², $G=0,8 \cdot 10^6$ kG/cm², $I_x = I_y = 4225$ cm⁴, $C=7080$ cm⁴. Zadanie to rozwiązano przy podziale pręta na 5 i 2 elementy, uzyskano wyniki identyczne z wynikami dla jednego elementu. Jak widać na rys. 4, dla wartości $\mu=0,001$ przemieszczenia końca pręta wspornikowego narastają gwałtownie dopiero, gdy obciążenie P zbliża się do eulerowskiej siły krytycznej $P_{kr}=87460$ kG. Dla $\mu=0,1$ wpływ siły osiowej na deformację pręta jest wyraźny już przy obciążeniu $P \approx 1/4 P_{kr}$.

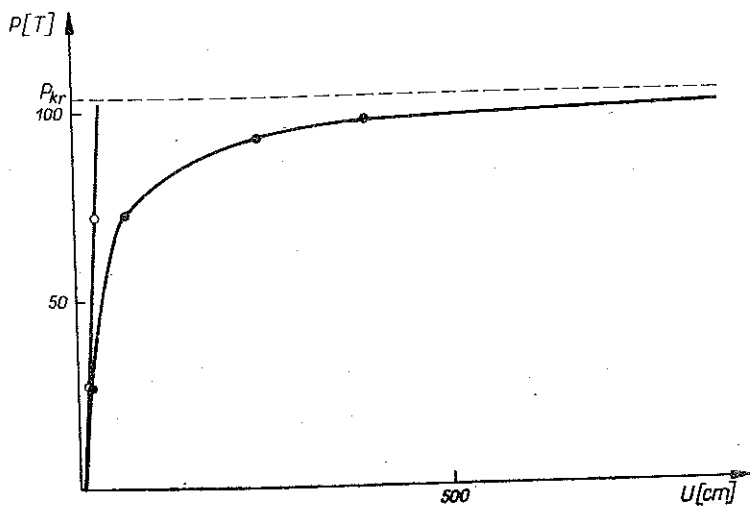
Opracowany program obliczeń wykorzystany został również do obliczeń wytrzymałościowych wysięgnika ramowego żurawia pokładowego o wysięgu ok. 17,0 m.

i udźwigu nominalnym 8,0 T. Szczegółowe dane liczbowe i wyniki dla różnych przypadków obciążeń podane są w [7]. Na rys. 5 podano szkic podziału wysięgnika



Rys. 5

na 49 prętów. Obciążenie zmienne przyłożone jest na noku wysięgnika w postaci dwóch sił $P/2$ działających w płaszczyźnie nie pokrywającej się z płaszczyzną ramion wysięgnika. Na rys. 6 podano zależność między obciążeniem i przemieszczeniem noku wysięgnika uzyskaną z drugiego przybliżenia ciągu iteracyjnego (4.2). Przy przyjęciu dużego kryterium osiągnięcia stanu krytycznego, $U_{kr}=10$ m, dla $P=107,2$ T nastąpiła zmiana znaku rozwiązania, co wskazuje na przekroczenie globalnej macierzy szywności. Uznanie siły 107,2 T za wartość krytyczną odpowia-



Rys. 6

dającą w przybliżeniu utracie stateczności globalnej typu bifurkacyjnego, umożliwiło w [7] wyznaczenie współczynników wyoboczeniowych wszystkich prętów wysięgnika i sprawdzenie naprężeń normalnych w przekrojach prętów z uwzględnieniem globalnej utraty stateczności, zgodnie z normą obliczania konstrukcji stalowych [10].

7. UWAGI KOŃCOWE

Przez uwzględnienie wpływu sił osiowych na deformację giętą prętów, przedstawiona w pracy metoda i opracowany program obliczeń znacznie rozszerzają w stosunku do teorii liniowej, krąg zadań z mechaniki przestrzennych układów ramowych, które mogą być efektywnie rozwiązywane na maszynie cyfrowej. Zadania te obejmują określenie deformacji węzłów oraz wyznaczania sił wewnętrznych w prętach przestrzennych układów ramowych według teorii II-go rzędu oraz przybliżone określenie stanu krytycznego układu. W [7] uzupełniono program sprawdzeniem naprężeń normalnych w prętach o różnych przekrojach poprzecznych z uwzględnieniem globalnej utraty stateczności. Opracowany program na komputer stanowi więc efektywne narzędzie do obliczeń inżynierskich zdecydowanej większości konstrukcji prętowych, które mogą być modelowane przestrzennym układem ramowym.

Warto jednak pamiętać, że w zbudowanej w p. 2 lokalnej macierzy sztywności elementu prętowego nie zostały uwzględnione wszystkie efekty geometrycznej nieliniowości pręta. Pominięto tam sprzężenie sił osiowych ze skręcaniem oraz skręcania za zginaniem; efekty te mogą się okazać istotne w obliczeniach układów ramowych z prętów cienkościennych o przekroju otwartym. Pominięto również wpływ deformacji giętej i skrętnej oraz obrotu cięciwy pręta na długość tego pręta; efekt skrócenia pręta może okazać się jednak istotnym dla niektórych przypadków większej deformacyjności układu ramowego.

Chociaż równania równowagi (3.7) są formułowane i sprawdzane w programie na stanie odkształconym układu ramowego, to jednak przy budowie globalnej macierzy sztywności pominięto wpływ małych zmian parametrów geometrycznych układu ramowego. Efekt ten może mieć jednak istotne znaczenie przy dużych zmianach geometrycznych układu lub w zadaniach, w których względnie małym zmianom geometrii towarzyszy zasadnicza zmiana rozkładu sił osiowych w prętach. Ma to miejsce w szczególności przy badaniu zjawiska przeskoku oraz pokrytycznego zachowania się geometrycznie nieliniowych układów ramowych.

Przykładem prostej konstrukcji, w której uwzględnienie tylko wpływu sił osiowych na deformację giętą prętów nie jest wystarczające, może być tzw. kratownica Misesa, składająca się z dwóch prętów przegubowych połączonych w węzle pod kątem bliskim 180° . Przy odpowiednio dobranych parametrach geometrycznych i odpowiednim obciążeniu poprzecznym następuje tutaj utrata stateczności globalnej konstrukcji w postaci przeskoku do konfiguracji odwróconej. Poprawne sformułowanie tego zadania wymagałoby zarówno uwzględnienia wpływu obrotu cięciwy pręta na jego długość, jak i budowania macierzy sztywności przy wykorzystaniu parametrów geometrycznych stanu odkształconego.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Y. K. SHIN, *A computer method for the second-order elastic analysis of plane framed structures*, in: *Theory and practice in finite element structural analysis*, ed. Yamada Y. and Gallagher R. H., University of Tokyo Press, 139–156, 1973.

2. J. J. CONNOR, R. D. LOGGIER, S. C. CHAN, *Nonlinear analysis of elastic framed structures*, Proc. ASCE, J. Str. Div., **94**, 6, 1525—1547 June 1968.
3. S. BŁASZKOWIAK, Z. KĄCZKOWSKI, *Metoda Crossa*, PWN, Warszawa 1961.
4. E. KRYNICKI, Z. MAZURKIEWICZ, *Ramy z prętów o zmiennych sztywnościach*, PWN, Warszawa 1966.
5. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
6. H. C. MARTIN, G. F. CAREY, *Introduction to finite element analysis*, New York 1973.
7. W. PIETRASZKIEWICZ, J. WEKEZER, M. LIDKE, A. ZMITROWICZ, *Obliczanie ramowych wysięgników żurawi pokładowych, Część II: Programy i przykłady obliczeń*, Oprac. wewn. IMP PAN, Nr arch. 65/75, Gdańsk 1975.
8. J. SZMELTER, M. DACKO, S. DOBROCIŃSKI, M. WIECZOREK, *Programy metody elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1973.
9. J. R. TILLERSON, J. A. STRICKLIN, W. E. HAISLER, *Numerical methods for the solutions of nonlinear problems in structural analysis*, in: *Numerical Solution of Nonlinear Structural Problems*, ed. Hatung R. F., AMD, **6**, ASME, New York 1973.
10. PN-62/B-3200. Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie.

Резюме

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАМОЧНЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ОСЕВЫХ СИЛ НА ИЗГИБНУЮ ДЕФОРМАЦИЮ СТЕРЖНЕЙ

Представлены метод и программа на ЭВМ ОДРА 1204 для расчета пространственных рамочных систем на основе геометрически нелинейной теории, учитывающей влияние осевых сил на изгибную деформацию стержней.

Для разных условий опирания концов стержня построены локальные матрицы жесткости зависящие от осевой силы. Уравнения равновесия узлов в деформируемом состоянии приводят к нелинейной системе уравнений по отношению к перемещениям и вращениям узлов, которая решена методом последовательных приближений. Применяя деформационный критерий, дается способ приближенного определения критического состояния рамочной системы.

Разработанная программа применена между прочим для статических расчетов рамочной стрелы палубного крана моделированного системой 49 стержней.

SUMMARY

ANALYSIS OF THE SPATIAL FRAME SYSTEMS WITH TAKING INTO ACCOUNT THE EFFECT OF AXIAL FORCES ON THE BENDING DEFORMATION OF RODS

The method of solution and the computing program prepared for the computer Odra 1204 are elaborated for analysis of the spatial frame systems. The geometrically nonlinear theory with taking into account the effect of axial forces on the bending deformation of rods is considered. The local stiffness matrices dependent on the axial force are constructed for different supports of the ends of rods. The equilibrium equations for the nodes in a deformed state lead to equations which are nonlinear with respect to the displacements and rotations of nodes. The method of successive approximations is applied to obtain the solution of these equations. Using deformation criterion the manner of the approximate evaluation of the critical state of the frame system is presented. The program prepared was applied to static analysis of the frame cantilever of a deck crane.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 grudnia 1975 r.