

## OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE BELKI WSPORNIKOWEJ Z MATERIAŁU NIELINIOWEGO FIZYCZNIE OBCIĄŻONEJ CIĘŻAREM WŁASNYM

ANTONI GAJEWSKI (KRAKÓW)

Przedmiotem pracy jest optymalne kształtowanie belki wspornikowej, znajdującej się w niejednorodnym polu sił grawitacyjnych (lub sił bezwładności). Rozważono belki o dwóch osiach symetrii przekroju poprzecznego, wykonane z niejednorodnego materiału, opisanego nieliniowym prawem fizycznym, które pozwala opisać materiały nieliniowo-sprężyste, sprężysto-plastyczne lub pozostające w stanie ustalonego pełzania.

Znaleziono optymalne kształty (wysokość lub szerokość) belki obciążonej ciężarem własnym, przy warunku wyrównania odkształceń (naprężeń), warunku ustalonej wartości pracy sił objętościowych, ustalonej wartości dopełniającej energii odkształcenia oraz ugięcia swobodnego końca belki. Jako funkcję celu (koszt) przyjęto ciężar belki.

Zbadano wpływ postaci prawa fizycznego (w szczególnym przypadku wykładnika  $n$  w prawie potęgowym) na optymalny kształt belki.

Zagadnienie rozwiązano, korzystając z klasycznych metod rachunku wariacyjnego.

### 1. UWAGI WSTĘPNE

W większości opublikowanych prac, dotyczących optymalnego kształtowania liniowo-sprężystych elementów konstrukcji, siły masowe (np. ciężar własny, siły odśrodkowe), które zależą od poszukiwanego kształtu elementu, są na ogół pomijane. Uwzględnienie tych sił znacznie komplikuje zagadnienie, lecz jest niekiedy niezbędne.

Optymalne kształtowanie liniowo-sprężystych belek wspornikowych, obciążonych ciężarem własnym, przy warunku minimalizacji ugięcia końca belki, było po raz pierwszy przedmiotem pracy R. L. BARNETTA [2]. Podano w niej jednak błędne rozwiązanie podstawiając wyrażenie na moment zginający, pochodzący od ciężaru własnego, do otrzymanego wcześniej w pracy [1] równania Eulera-Lagrange'a, nie uwzględniającego zależności momentu zginającego od poszukiwanego pola przekroju poprzecznego.

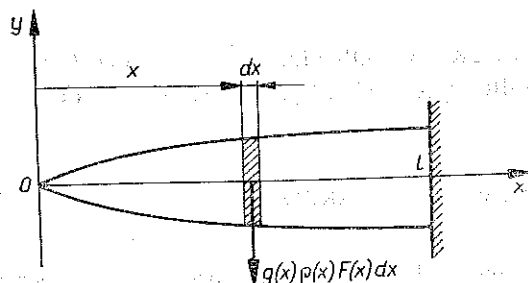
Również w pracy L. C. DIXONA [4] poszukuje się zmiany przekroju poprzecznego belki wspornikowej przy wymaganiu, aby pod działaniem ciężaru własnego ugięcie końca belki było najmniejsze. Jako zmienną optymalizacji przyjęto wysokość belki (o dwóch osiach symetrii przekroju poprzecznego), na którą nałożono warunki ograniczające od góry i od dołu. W celu rozwiązania zagadnienia stosowano zasadę maksimum Pontriagina. Niestety, przedstawione rozwiązanie jest również błędne z powodu przyjęcia błędnego wyrażenia na moment zginający.

Poprawne rozwiązanie zagadnienia (jednak bez warunków ograniczających wysokość) w zakresie liniowo-sprężystym przedstawiono w pracy J. M. CHERNA [3]. Otrzymano je opierając się na zasadzie minimum wzajemnej energii potencjalnej

R. T. SHIELDA i W. PRAGERA [9], odnoszącej się do przypadków liniowo-sprężystych.

W niniejszej pracy przedstawimy rozwiązanie analogicznego problemu optymalizacji kształtu belki wspornikowej, znajdującej się w niejednorodnym polu sił grawitacyjnych (jednak bez ograniczenia wysokości lub szerokości).

Przyjmujemy zatem, że siła działająca na jednostkę objętości belki



Rys. 1

$q(x)$  (rys. 1) jest z góry daną funkcją, określoną iloczynem natężenia pola  $g(x)$  i gęstości  $\rho(x)$ :

$$(1.1) \quad q(x) = g(x) \rho(x)$$

Założenie powyższe pozwoli na równoczesne uwzględnienie niejednorodności gęstości materiału  $\rho(x)$ , niejednorodności zewnętrznego pola grawitacyjnego lub niejednorodności pola sił bezwładności (występujących np. w ruchu obrotowym belki dookoła osi przechodzącej przez jej koniec).

Uwzględnimy ponadto nieliniowość fizyczną materiału, zakładając nieliniową zależność między naprężeniem i odkształceniem (w jednoosiowym stanie naprężenia i odkształcenia) oraz biorąc również pod uwagę podłużną niejednorodność materiału. Przyjęte dalej nieliniowe prawo fizyczne pozwoli nam opisać materiały nieliniowo-sprężyste, sprężysto-plastyczne (bez odciążenia) lub pozostające w stanie ustalonego pełzania [5]. W ostatnim przypadku odkształcenie należy zastąpić przez prędkość odkształcenia, energię przez moc, a ugięcie przez prędkość ugięcia.

## 2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Ograniczymy się do rozważania belek wspornikowych o wysokości  $2h$  i dwóch osiach symetrii przekroju poprzecznego, wykonanych z materiału niejednorodnego, opisanego prawem fizycznym

$$(2.1) \quad \sigma^* = f(\varepsilon^*),$$

w którym przyjęto następujące oznaczenia:

$$(2.2) \quad \sigma^* = \sigma/\sigma_0, \quad \varepsilon^* = \varepsilon/\varepsilon_0, \quad \sigma_0 = \sigma_0(x), \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_0(x),$$

a funkcja  $f$  została określona doświadczalnie.

Wprowadzenie dwóch funkcji  $\sigma_0$  i  $\varepsilon_0$  (stałych materiałowych w danym punkcie ciała) zamiast jednej, może okazać się zbędne (np. w przypadku prawa potęgowego),

lecz ogólnie daje ono możliwość niezależnej zmiany skali obu osi  $\sigma$  i  $\varepsilon$  oraz możliwość rozróżnienia ciał wytrzymałościowo i wydłużeniowo niejednorodnych [8].

Założymy, że szerokość belki w każdym przekroju jest określona za pomocą danej funkcji  $\beta(z/h)$ , tzn. że

$$(2.3) \quad b(x) = b_0(x) \beta\left(\frac{z}{h}\right),$$

gdzie  $b_0(x)$  oznacza szerokość na pewnej na ogół dowolnie wybranej wysokości  $z$ . Przyjmując hipotezę płaskich przekrojów Bernoulliego ( $\varepsilon = \kappa z$ ), maksymalne odkształcenie w skrajnych włóknach oznaczmy za pomocą nadkreślenia:

$$(2.4) \quad \bar{\varepsilon} = \kappa h, \quad \bar{\varepsilon}^* = \bar{\varepsilon}/\varepsilon_0,$$

gdzie  $\kappa$  oznacza krzywiznę linii ugięcia belki.

Punktem wyjścia do dalszych rozważań będzie podstawowa zależność momentu zginającego od krzywizny belki (lub zależność odwrotna), którą w naszym przypadku przyjmijmy w postaci [5]

$$(2.5) \quad M^* \operatorname{sgn} M = \mathcal{F}(\bar{\varepsilon}^*),$$

gdzie wprowadzono bezwymiarowe wielkości:

$$(2.6) \quad M^* = \frac{|M(x)|}{2b_0 h^2 \sigma_0(x)}, \quad \bar{\varepsilon}^* = \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_0} = \frac{\kappa(x) h(x)}{\varepsilon_0(x)}$$

oraz funkcję  $\mathcal{F}$  określoną wzorem

$$(2.7) \quad \mathcal{F}(\bar{\varepsilon}^*) = \frac{1}{\bar{\varepsilon}^{*2}} \int_0^{\bar{\varepsilon}^*} f(\varepsilon^*) \beta\left(\frac{\varepsilon^*}{\bar{\varepsilon}^*}\right) \varepsilon^* d\varepsilon^*.$$

Zależność odwrotną, krzywizny belki od momentu, będziemy zapisywali w postaci

$$(2.8) \quad \bar{\varepsilon}^* = \mathcal{F}_{-1}(M^*) \operatorname{sgn} M \quad \text{lub} \quad \kappa = \frac{\varepsilon_0(x)}{h(x)} \mathcal{F}_{-1}(M^*) \operatorname{sgn} M,$$

w której  $\mathcal{F}_{-1}$  oznacza funkcję odwrotną do  $\mathcal{F}$ .

Celem pracy jest znalezienie takiego sposobu zmiany wysokości belki wzdłuż długości  $h(x)$  (przy stałej szerokości  $b_0$ ), szerokości  $b_0(x)$  (przy stałej wysokości) lub wysokości i szerokości (gdy są do siebie proporcjonalne  $b_0 = \alpha_2 h$ ), aby określona funkcja celu («koszt») przyjmowała wartość minimalną, przy warunku ograniczającym, ustalającym całkowity «ciężar» belki:

$$(2.9) \quad 2\alpha_1 \int_0^l q(x) b_0(x) h(x) dx = W = \text{const},$$

gdzie

$$(2.10) \quad \alpha_1 = \int_0^1 \beta(u) du$$

jest parametrem charakteryzującym kształt belki w przekroju poprzecznym.

W dalszym ciągu wyznaczmy kształt belek o wyrównanych odkształceniach (naprężeniach) oraz optymalne kształty przy funkcjach celu w postaci pracy sił masowych (właściwie iloczynu sił masowych i końcowych przemieszczeń konstrukcji), całkowitej dopełniającej energii odkształcenia oraz ugięcia swobodnego końca belki. Metoda rozwiązania będzie oparta na klasycznym rachunku wariacyjnym.

### 3. WARUNEK WYRÓWNANIA ODKSZTAŁCEŃ (NAPRĘŻEŃ)

Moment zginający pochodzący od obciążenia siłami objętościowymi  $q(x)$  w odległości  $x$  od swobodnego końca belki, przedstawionej na rys. 1, wyrażony jest znanym wzorem

$$(3.1) \quad M_q = -2\alpha_1 \int_0^x (x-\xi) q(\xi) b_0(\xi) h(\xi) d\xi$$

lub, po dwukrotnym zróżniczkowaniu (3.1), spełnia następujące równanie różniczkowe:

$$(3.2) \quad M_q'' + 2\alpha_1 q b_0 h = 0.$$

Wzory (3.1), (3.2) i (2.5) będą dla nas punktem wyjścia do dalszych rozważań w tej części pracy; porównując bowiem bezwzględną wartość momentu zginającego, określoną wzorem (3.1) z wartością określoną wzorami (2.5), (2.6) i (2.7) otrzymujemy równanie całkowe

$$(3.3) \quad \alpha_1 \int_0^x (x-\xi) q(\xi) b_0(\xi) h(\xi) d\xi = b_0 h^2 \sigma_0 \mathcal{F}(\bar{\varepsilon}^*),$$

które teoretycznie pozwala znaleźć poszukiwane funkcje  $b_0(x)$  lub  $h(x)$  przy warunku wyrównania naprężeń (lub odkształceń). Równanie (3.3) po dwukrotnym zróżniczkowaniu przybiera postać

$$(3.4) \quad [b_0 h^2 \sigma_0 \mathcal{F}(\bar{\varepsilon}^*)]'' - \alpha_1 q(x) b_0 h = 0.$$

Znalezienie rozwiązania równania (3.4), nawet przy najprostszych typach funkcji  $q(x)$ ,  $\sigma_0(x)$ ,  $\varepsilon_0(x)$ , nie jest proste; jeśli jednak przyjmiemy, że zarówno siły objętościowe  $q(x) = q_0 = \text{const}$ , jak i współczynniki  $\sigma_0$  i  $\varepsilon_0$  w prawie fizycznym są stałe (warunek wyrównania odkształceń jest wówczas równoważny warunkowi wyrównania naprężeń), a więc i  $\mathcal{F}(\bar{\varepsilon}^*) = \mathcal{F}_0 = \text{const}$ , to z (3.4) otrzymujemy proste równanie różniczkowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach na niewiadome  $b_0(x)$  lub  $h(x)$ :

$$(3.5) \quad (b_0 h^2)'' - \frac{\alpha_1 q_0}{\sigma_0 \mathcal{F}_0} b_0 h = 0.$$

Przedstawimy rozwiązania w trzech przypadkach szczególnych.

$$1. h(x) = h_0 = \text{const}, \quad b_0 = b_0(x).$$

Równanie (3.5) staje się w tym przypadku równaniem liniowym, którego całka

$$(3.6) \quad b_0 = C_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\alpha_1 q_0}{\sigma_0 \mathcal{F}_0 h_0}} x + C_2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\alpha_1 q_0}{\sigma_0 \mathcal{F}_0 h_0}} x$$

nie spełnia jednak pierwotnego równania całkowego (3.3) dla niezerowych wartości  $C_1$  i  $C_2$ . Rozwiązaniem zagadnienia jest funkcja  $b_0 \equiv 0$ .

$$2. b_0 = \text{const}, \quad h = h(x).$$

Równanie (3.5) ma tu postać równania różniczkowego nieliniowego drugiego rzędu

$$(3.7) \quad (h^2)'' - \frac{\alpha_1 q_0}{\sigma_0 \mathcal{F}_0} h = 0.$$

Przez kolejne podstawienia:

$$(3.8) \quad h^2 = u, \quad u' = p, \quad u'' = p \frac{dp}{du},$$

można (3.7) sprowadzić do równania liniowego pierwszego rzędu

$$(3.9) \quad (p^2)' - \frac{2\alpha_1 q_0}{\sigma_0 \mathcal{F}_0} u^{1/2} = 0,$$

którego całką jest funkcja

$$(3.10) \quad p = \left( \frac{4\alpha_1 q_0}{3\sigma_0 \mathcal{F}_0} u^{3/2} + C_1 \right)^{1/2}.$$

Przez kolejne całkowanie i uwzględnienie warunku (3.3) otrzymujemy w końcu

$$(3.11) \quad h(x) = \frac{\alpha_1 q_0 x^2}{12\sigma_0 \mathcal{F}_0}.$$

$$3. b_0(x) = \alpha_2 h(x).$$

W tym przypadku otrzymujemy równanie

$$(3.12) \quad (h^3)'' - \frac{\alpha_1 q_0 h^2}{\sigma_0 \mathcal{F}_0} = 0,$$

którego całka szczególna, spełniająca również równanie całkowe (3.3), ma postać

$$(3.13) \quad h(x) = \frac{\alpha_1 q_0 x^2}{30\sigma_0 \mathcal{F}_0}.$$

Przedstawione rozwiązania (3.11) i (3.13) nie zależą w sposób istotny od postaci prawa fizycznego; typ funkcji pozostaje taki sam dla dowolnego prawa fizycznego (2.1), a zmienia się tylko stały czynnik  $\mathcal{F}_0$ .

4. OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE PRZY PEWNYCH GLOBALNYCH  
FUNKCJACH CELU

Założmy początkowo, że pewna funkcja celu może być określona funkcjonałem:

$$(4.1) \quad I = \int_0^l \psi [x, M_a, b_0, h, \mathcal{F}_{-1}(M^*)] dx,$$

w którym  $\psi$  jest przynajmniej dwukrotnie różniczkowalną funkcją zmiennych  $x, M_a, b_0, h, \bar{\varepsilon}^*$ . Symbol  $M_a(x)$  oznacza moment zginający, pochodzący od sił objętościowych (3.1),  $M^*$  określone jest wzorem (2.6).

Celem naszym jest znalezienie kształtu belki minimalizującego funkcjonał (4.1) przy izoperymetrycznym warunku ograniczającym (2.9) oraz warunku w postaci równania różniczkowego (3.2). Zgodnie ze znanymi regułami rachunku wariacyjnego tworzymy funkcjonał

$$(4.2) \quad I^* = \int_0^l \psi dx + \int_0^l \lambda_1(x) (M_a'' + qF) dx + \lambda_2 \int_0^l qF dx.$$

Równanie Eulera-Lagrange'a oraz warunek poboczny (3.2) tworzą układ trzech równań różniczkowych, pozwalających na wyznaczenie poszukiwanych funkcji  $b_0(x)$  lub  $h(x)$ ,  $M_a(x)$  i  $\lambda_1(x)$ :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} + q \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \lambda_1(x) + q \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \lambda_2 &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial M_a} + \frac{d^2 \lambda_1}{dx^2} &= 0, \quad M_a'' + qF = 0, \end{aligned}$$

gdzie  $F = 2\alpha_1 b_0 h$  jest polem powierzchni przekroju belki,  $\varphi_i$  oznaczają zmienne optymalizacji:  $\varphi_1 = b_0(x)$ , gdy  $h = \text{const}$ ,  $\varphi_2 = h(x)$ , gdy  $b_0 = \text{const}$  lub  $\varphi_3 = h(x)$ , gdy  $b_0(x) = \alpha_2 h(x)$ .

Eliminując mnożniki Lagrange'a otrzymujemy

$$(4.4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial M_a} - \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1}}{q \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}} \right) = 0, \quad M_a'' + qF = 0.$$

Dalszy ciąg obliczeń zależy od przyjętej funkcji celu i prawa fizycznego. W celu otrzymania efektywnych wyników, ograniczymy się do prostego prawa fizycznego (potęgowego)

$$(4.5) \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad \text{lub} \quad \frac{\sigma}{\sigma_0} = \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^\mu,$$

w którym  $n$  oznacza całkowitą, nieparzystą liczbą dodatnią, a  $\mu = 1/n$ . Gdy  $n = 1$ , otrzymujemy liniowo-sprężyste zachowanie się materiału, gdy natomiast  $n \rightarrow \infty$ ,

opisany jest materiał sztywno-plastyczny. Dla prawa (4.5) i prostokątnego przekroju poprzecznego belki związek między krzywizną i momentem zginającym określony jest za pomocą funkcji

$$(4.6) \quad \mathcal{F}_{-1} = (\mu + 2)^n M^{*n}.$$

#### 4.1. Minimalizacja pracy sił grawitacyjnych $\tilde{A}$

Praca wykonana przez działające siły zewnętrzne na całkowitym przemieszczeniu belki (a właściwie suma iloczynów sił i końcowych przemieszczeń) może być pewnym wskaźnikiem jej sztywności (np. [6 i 7]). W przypadku belek zginanych można ją obliczyć ze wzoru [5]

$$(4.7) \quad \tilde{A} = \int_0^l \kappa(x) M(x) dx = \int_0^l A dx,$$

w którym liniowa gęstość pracy  $A$ , przy nieliniowym prawie fizycznym (2.5), ma postać

$$(4.8) \quad A = 2\sigma_0 \varepsilon_0 b_0 h \bar{\varepsilon}^* \mathcal{F}(\bar{\varepsilon}^*) = 2\sigma_0 \varepsilon_0 b_0 h M^* \mathcal{F}_{-1}(M^*).$$

Korzystając ze wzorów (4.8) i (4.6) obliczamy liniową gęstość pracy sił grawitacyjnych (lub bezwładności), która będzie teraz funkcją celu  $\psi$ :

$$(4.9) \quad \psi = A = \frac{(\mu + 2)^n}{\alpha_1} \sigma_0 \varepsilon_0 F M_q^{*n+1}.$$

Podstawiając (4.9) do (4.4) i eliminując z otrzymanego w ten sposób układu równań kolejno  $b_0(x)$ ,  $h(x)$  i  $b_0 = \alpha_2 h$ , dostajemy równania różniczkowe na nieświadomą  $M_q$ :

$$(4.10) \quad M_q'' t_i - \delta_i M_q t_i'' = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

w których przyjęto oznaczenia

$$(4.11) \quad \begin{aligned} t_1 &= \frac{\varepsilon_0 q^n}{\sigma_0^n} \frac{M_q^{n+1}}{M_q''^{n+1}}, & \delta_1 &= \frac{n}{n+1}, & \text{gdy } h &= \text{const}; \\ t_2 &= \frac{\varepsilon_0 q^{2n+1}}{\sigma_0^n} \frac{M_q^{n+1}}{M_q''^{2(n+1)}}, & \delta_2 &= \frac{2n+1}{n+1}, & \text{gdy } b_0 &= \text{const}; \\ t_3 &= \frac{\varepsilon_0 q^{(3n+1)/2}}{\sigma_0^n} \frac{M_q^{n+1}}{M_q''^{3(n+1)/2}}, & \delta_3 &= \frac{3n+1}{2(n+1)}, & \text{gdy } b_0 &= \alpha_2 h. \end{aligned}$$

Ogólne, ścisłe rozwiązanie równań (4.10) wydaje się niemożliwe; jednak w szczególnych przypadkach belek jednorodnych i potęgowo zmieniającym się rozkładzie sił objętościowych można ograniczyć się do całki szczególnej o postaci funkcji potęgowej  $x^\alpha$ . Przykłady liczbowe oraz szczegółową analizę otrzymanych rozwiązań podamy dla innej funkcji celu w p. 4.3.

#### 4.2. Minimalizacja całkowitej, dopełniającej energii odkształcenia

W przypadku belek zginanych całkowitą dopełniającą energię odkształcenia obliczamy ze wzoru [5]

$$(4.12) \quad \tilde{\Lambda} = \int_0^l \Lambda dx = \int_0^l \left[ \int_0^M \kappa(M) dM \right] dx.$$

Jest ona równa całkowitej energii potencjalnej odkształcenia ze znakiem przeciwnym i bywa zazwyczaj wyrażana przez uogólnione zmienne stanu naprężenia (np. moment zginający). Może być przyjęta jako miara sztywności konstrukcji (np. [5 i 7]). Dla potęgowego prawa fizycznego (4.5) otrzymujemy

$$(4.13) \quad \psi = \Lambda = \frac{(\mu+2)^n}{\alpha_1(n+1)} \sigma_0 \varepsilon_0 F M^{*n+1}.$$

Wyrażenie to prowadzi do równania (4.10); optymalny kształt jest zatem taki sam, jak poprzednio (przy potęgowym prawie fizycznym). Oczywiście dla innych praw fizycznych każda z powyższych funkcji celu daje inny kształt optymalny, który zawsze zależy jednak od postaci tych praw.

#### 4.3. Minimalizacja ugięcia swobodnego końca belki

Ugięcie swobodnego końca belki wspornikowej jest określone wzorem

$$(4.14) \quad w(0) = - \int_0^j x \frac{\varepsilon_0}{h} \mathcal{F}_{-1}(M^*) dx = \int_0^j \psi dx,$$

w którym, w przypadku potęgowego prawa fizycznego (4.5), należy przyjąć

$$(4.15) \quad \psi = -(\mu+2)^n x \frac{\varepsilon_0}{h} M^{*n}.$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do (4.4) i eliminując niewiadomą  $b_0(x)$  lub  $h(x)$ , dostajemy równanie na niewiadomą  $M_q$ :

$$(4.16) \quad M_q'' \cdot f_i - \delta_i M_q f_i'' = 0, \quad i=1, 2, 3,$$

w którym

$$(4.17) \quad \begin{aligned} f_1 &= \frac{\varepsilon_0 q^n}{\sigma_0^n} \frac{x M_q^n}{M_q''^{n+1}}, & \delta_1 &= 1 \quad \text{dla} \quad h = \text{const}; \\ f_2 &= \frac{\varepsilon_0 q^{2n+1}}{\sigma_0^n} \frac{x M_q^n}{M_q''^{2(n+1)}}, & \delta_2 &= \frac{2n+1}{n} \quad \text{dla} \quad b_0 = \text{const}; \\ f_3 &= \frac{\varepsilon_0 q^{(3n+1)/2}}{\sigma_0^n} \frac{x M_q^n}{M_q''^{3(n+1)/2}}, & \delta_3 &= \frac{3n+1}{2n} \quad \text{dla} \quad b_0 = \alpha_2 h. \end{aligned}$$

Równania różniczkowe (4.10) i (4.16), które stanowią warunki konieczne stacjonarności funkcjonalów (4.7) i (4.14), wyprowadzono formalnie, stosując metodę mnożników Lagrange'a; wydaje się jednak, że więcej informacji o rozwiązaniu



można uzyskać badając pierwszą wariację funkcjonałów (4.7) i (4.14), w których bezpośrednio podstawiono wyrażenie (3.1). Ograniczmy się tu do obliczenia pierwszej wariacji funkcjonału (4.14) dla potęgowego prawa fizycznego (4.5), uwzględniając oczywiście izoperymetryczny warunek stałego ciężaru (2.9). Utworzymy w tym celu pomocniczy funkcjonał

$$(4.18) \quad J^* = \frac{(\mu+2)^n}{2^n} \int_0^l \frac{\varepsilon_0 x |M|^n}{\sigma_0^n b_0^n h^{2n+1}} dx + \lambda_1 \left( 2\alpha_1 \int_0^l qb_0 h dx - W \right),$$

w którym moment zginający  $M(x)$  określony jest wzorem (3.1). W przypadku zmiennej szerokości ( $h = \text{const}$ ) mamy

$$(4.19) \quad \delta J^* = C \int_0^l \frac{\varepsilon_0 x |M|^{n-1}}{\sigma_0^n b_0^{n+1}} \left\{ b_0 \int_0^x (x-\xi) q \delta b_0 d\xi - \left[ \int_0^x (x-\xi) qb_0 d\xi \right] \delta b_0 \right\} dx + \\ + 2\lambda_1 \alpha_1 h \int_0^l q \delta b_0 dx,$$

lub po przecałkowaniu przez części

$$(4.20) \quad \delta J^* = C \left[ \left( \int_{x_0}^l \frac{\varepsilon_0 \xi^2 |M|^{n-1}}{\sigma_0^n b_0^n} d\xi \right) \left( \int_0^l q \delta b_0 d\xi \right) - \right. \\ \left. - \left( \int_{x_0}^l \frac{\varepsilon_0 \xi |M|^{n-1}}{\sigma_0^n b_0^n} d\xi \right) \left( \int_0^l \xi q \delta b_0 d\xi \right) \right] - C \int_0^l \left\{ \left[ \int_{x_0}^x \frac{\varepsilon_0 |M|^{n-1}}{\sigma_0^n b_0^n} \xi (\xi-x) d\xi \right] - \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon_0 x M |M|^{n-1}}{\sigma_0^n b_0^{n+1} q} + 2\lambda_2 \alpha_1 h \right\} q \delta b_0 dx,$$

gdzie  $C = 2n(\mu+2)^n \alpha_1 / 2^n h^{2n}$ ,  $x_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  są pewnymi stałymi.

Warunek konieczny istnienia ekstremum przyjmuje tu (po podstawieniu  $b_0 = -M''/2\alpha_1 qh$ ) formę równania całkowego

$$(4.21) \quad \int_{x_0}^x \frac{\varepsilon_0 q^n}{\sigma_0^n} \frac{M^{n-1}}{M''^n} \xi (\xi-x) d\xi + \frac{\varepsilon_0 q^n}{\sigma_0^n} \frac{x M^n}{M''^{n+1}} = \lambda$$

oraz dwóch dodatkowych warunków ograniczających dopuszczalne wariacje  $b_0(x)$ :

$$(4.22) \quad \int_0^l q \delta b_0 dx = 0,$$

$$(4.23) \quad \int_0^l x q \delta b_0 dx = 0.$$

Pierwszy z nich wynika z warunku stałego ciężaru (2.9), drugi zawęża jednak klasę funkcji porównawczych do takich, dla których wariacje siły poprzecznej i momentu zginającego w punkcie utwierdzenia znikają:  $\delta Q(l) = \delta M(l) = 0$ .

Łatwo można sprawdzić, że całkowite równanie (4.21) i analogiczne równania, otrzymane w pozostałych przypadkach  $b_0 = \text{const}$  i  $b_0 = \alpha_2 h$  przechodzą po zróżniczkowaniu w równania różniczkowe (4.16). Ograniczymy się w dalszym ciągu do rozwiązania równań (4.16), zdając sobie jednak sprawę z tego, że otrzymane wyniki prowadzą do minimalizacji funkcji celu tylko w klasie funkcji porównawczych, spełniających warunki (4.22) i (4.23).

Najprostszy przypadek otrzymujemy, gdy zmienna jest tylko szerokość belki  $b_0(x)$ ; wówczas  $\bar{\delta}_1 = 1$  i równanie (4.16) można zapisać w postaci

$$(4.24) \quad (M'_q \bar{t}_1 - M_q \bar{t}'_1)' = 0$$

lub po jednokrotnym scałkowaniu

$$(4.25) \quad M'_q \bar{t}_1 - M_q \bar{t}'_1 = C_1,$$

gdzie  $C_1$  jest stałą całkowania.

Uwzględniając równanie (3.1) widzimy, że funkcja  $M_q(x)$  spełnia następujące warunki brzegowe:

$$(4.26) \quad M_q(0) = M'_q(0) = 0,$$

które wyznaczają stałą  $C_1$ ; jak wynika z równania (4.25), musi ona być równa zeru:  $C_1 = 0$ . Kolejne całkowanie równania (4.25) daje

$$(4.27) \quad M_q = \bar{C} \bar{t}_1,$$

lub

$$(4.28) \quad M''_q = \bar{C} \left( \frac{\varepsilon_0 q^n x}{\sigma_0^n} \right)^{1/(n+1)} M_q^{(n-1)/(n+1)},$$

gdzie  $\bar{C}$  i  $\bar{C}$  są stałymi całkowania,

Korzystając ponadto z równań (3.1) i (3.2) otrzymujemy nieliniowe równanie całkowe na niewiadomą szerokość belki optymalnej:

$$(4.29) \quad b_0 = C \left( \frac{\varepsilon_0 x}{\sigma_0^n q} \right)^{\frac{1}{n+1}} \left[ \int_0^x (x-\xi) q(\xi) b_0(\xi) d\xi \right]^{\frac{n-1}{n+1}}, \quad C = \text{const.}$$

Zakładając w dalszym ciągu, że materiał belki jest jednorodny, tzn.  $\sigma_0 = \text{const}$ ,  $\varepsilon_0 = \text{const}$  oraz że rozkład sił objętościowych opisany jest funkcją potęgową

$$(4.30) \quad q(x) = q_1 x^\delta,$$

gdzie  $q_1$  i  $\delta$  są pewnymi stałymi, rozwiążemy równanie (4.29) metodą kolejnych przybliżeń. W pierwszym kroku, po prawej stronie równania przyjmiemy  $b_0 = b_{00} = \text{const}$  i obliczymy w ten sposób  $b_{01}$

$$(4.31) \quad b_{01} = C_1 x^{\alpha_1},$$

gdzie

$$\alpha_1 = \frac{(1-\delta) + (n-1)(\delta+2)}{n+1}, \quad C_1 = \text{const.}$$

Podstawiając (4.31) do prawej strony (4.29) otrzymujemy znowu

$$(4.32) \quad b_{02} = C_2 x^{\alpha_2},$$

gdzie

$$\alpha_2 = \alpha_1 \left( 1 + \frac{n-1}{n+1} \right).$$

W kolejnym  $m$ -tym kroku mamy

$$(4.33) \quad b_{0m} = C_m x^{\alpha_m},$$

gdzie

$$\alpha_m = \alpha_1 \left[ 1 + \frac{n-1}{n+1} + \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2 + \dots + \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{m-1} \right].$$

W nawiasie kwadratowym otrzymujemy szereg potęgowy, którego suma przy  $m \rightarrow \infty$  jest równa  $(n+1)/2$ . Zatem poszukiwane rozwiązanie ma postać

$$(4.34) \quad b_0(x) = C_\infty x^{\alpha_\infty},$$

gdzie

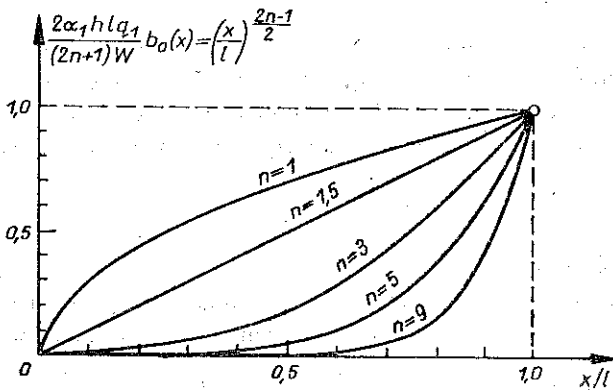
$$\alpha_\infty = \frac{(2n-1) + (n-2)\delta}{2}.$$

Stała  $C_\infty$  musi być wyznaczona z warunku stałego «ciężaru» (2.9):

$$(4.35) \quad C_\infty = \frac{(\delta + 1 + \alpha_\infty) W}{2\alpha_1 q_1 h l^{\delta+1}} \frac{1}{l^{\alpha_\infty}}.$$

Otrzymujemy więc

$$(4.36) \quad b_0(x) = \frac{(\delta + 1 + \alpha_\infty) W}{2\alpha_1 q_1 h l^{\delta+1}} \left( \frac{x}{l} \right)^{\alpha_\infty}.$$



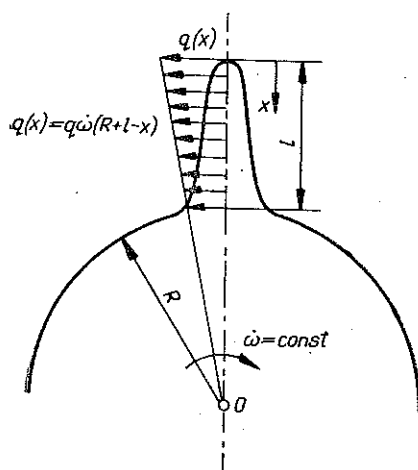
Rys. 2

Na rys. 2 przedstawiono szereg optymalnych kształtów belki o tym samym ciężarze, długości, wysokości oraz stałym  $q(x)$  ( $\delta=0$ ), lecz wykonanej z różnych materiałów opisywanych potęgowym prawem fizycznym o różnych wartościach wykładnika  $n$ . Wpływ wykładnika  $n$  na optymalny kształt jest tu bardzo istotny.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że w przypadku liniowo-sprężystego materiału belki ( $n=1$ ) optymalny kształt jest określony wzorem

$$(4.37) \quad b_0 = C \left( \frac{\varepsilon_0 x}{\sigma_0 q} \right)^{1/2},$$

uwzględniając dowolny typ niejednorodności materiału. Przykładem zastosowania tego wzoru może być problem kształtowania sprężystej łopatki wirnika



Rys. 3

poruszającego się z pewnym chwilowym przyspieszeniem kątowym  $\dot{\omega}$ . Jeśli łopatka o długości  $l$  jest umieszczona na wirniku o promieniu  $R$  (rys. 3), wówczas przyspieszenie liniowe w podanym układzie współrzędnych wyrażone jest wzorem

$$(4.38) \quad a = \dot{\omega}(R+l-x),$$

z którego wynika

$$(4.39) \quad q(x) = \rho a = \rho \dot{\omega}(R+l-x).$$

Przy stałej gęstości materiału  $\rho$ , stałych wartościach  $\sigma_0$  i  $\varepsilon_0$ , długości  $l$ , wysokości  $h$ , ciężarze  $W$  — optymalny kształt łopatki obliczymy ze wzoru (4.37):

$$(4.40) \quad b_0(x) = C \left( \frac{x}{R+l-x} \right)^{1/2},$$

w którym stałą  $C$  należy wyznaczyć z warunku (2.9).

#### 4.4. Rozwiązanie ogólne

Na podstawie przedstawionego rozwiązania (dla  $\delta_1 = 1$ ) można sądzić, że również dla innych wartości  $\delta_i$  równanie (4.16) będzie miało całkę szczególną o postaci prostej funkcji potęgowej typu  $x^\alpha$ , gdy tylko funkcje  $\sigma_0$ ,  $\varepsilon_0$  i  $q$  będą podobnej postaci. Załóżmy, że  $\sigma_0 = \text{const}$ ,  $\varepsilon_0 = \text{const}$ ,  $q(x) = q_1 x^\delta$  i przyjmijmy rozwiązanie (4.16) w postaci

$$(4.41) \quad M_q(x) = Cx^\alpha,$$

w której wykładnik  $\alpha$  należy wyznaczyć.

Podstawiając (4.41) do jednorodnego równania (4.16) i przyrównując do zera współczynnik przy tej samej potędze  $x$ , otrzymujemy równania kwadratowe na  $\alpha$ :

$$(4.42) \quad \alpha^2 [(2n+1)(n+2)^2 - n] - \alpha \{ (2n+1)(n+2)[8(n+1)+1+2(2n+1)\delta] - n \} + (2n+1)[4(n+1)+(2n+1)\delta][4(n+1)+1+(2n+1)\delta] = 0,$$

gdy  $b_0 = \text{const}$  oraz

$$(4.43) \quad \alpha^2 [(3n+1)(n+3)^2 - 8n] - 2\alpha \{ (3n+1)(n+3)[(3n+1)\delta + (6n+8) - 1] - 4n \} + (3n+1)[(3n+1)\delta + (6n+8)][(3n+1)\delta + 6(n+1)] = 0,$$

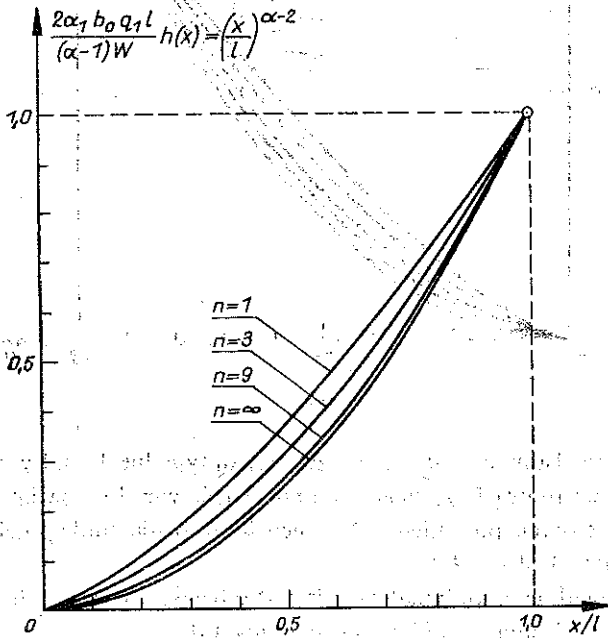
gdy  $b_0(x) = \alpha_2 h(x)$ .

Tylko jeden z dwóch pierwiastków powyższych równań kwadratowych określa kształt optymalny (minimalizujący ugięcie końca belki); w każdym przypadku szczególnym należy dodatkowo zbadać, który z nich daje poszukiwane rozwiązanie. Można łatwo wykazać, że dla  $\delta \geq 0$  i dowolnych wartości  $n$  pierwiastki równań (4.42) i (4.43) spełniają wymagany ze względu na (4.26) warunek  $\alpha > 1$ . Tak więc kształt belki jest wyznaczony przez równania (3.2):

$$(4.44) \quad h(x) = \frac{(\alpha-1)W}{2\alpha_1 b_0 q_1 l^{\delta+1}} \left(\frac{x}{l}\right)^{\alpha-\delta-2}, \quad \text{gdy } b_0 = \text{const};$$

$$(4.45) \quad h(x) = \left[ \frac{(\alpha-1)W}{2\alpha_1 \alpha_2 q_1 l^{\delta+1}} \left(\frac{x}{l}\right)^{\alpha-\delta-2} \right]^{1/2}, \quad \text{gdy } b_0 = \alpha_2 h.$$

Równania te spełniają oczywiście również odpowiednie równania całkowe typu (4.21).



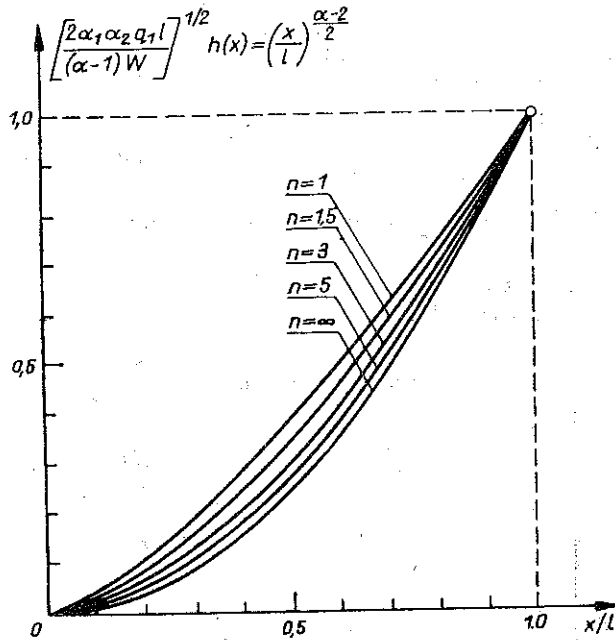
Rys. 4

Wykresy funkcji (4.42) i (4.43) przedstawiono na rysunkach 4 i 5 dla kilku wartości  $n$  przy założeniu, że  $\delta=0$ . Rozwiązaniem zadania dla belki sztywno-plastycznej (gdy  $n \rightarrow \infty$  i  $\delta=0$ ) w obu przypadkach jest funkcja  $h(x) = Cx^2$ .

Należy się również spodziewać, że analogiczne rozwiązania otrzymamy w przypadkach przedstawionych w punktach 4.1 i 4.2, bowiem równania (4.10) mogą być rozwiązane w podobny sposób.

Aby przekonać się, czy otrzymane kształty belek rzeczywiście minimalizują badane funkcjonały dla dopuszczalnych tu funkcji porównawczych, wystarczy przeprowadzić tzw. optymalizację parametryczną np. w klasie funkcji  $x^\alpha$  opisujących

kształt [nie spełniających jednak warunków (4.22) i (4.23)]. Wybrany funkcjonal staje się w ten sposób funkcją jednej zmiennej  $\alpha$ , która, jak łatwo się przekonać, posiada minimum. Na przykład dla belki o stałej szerokości  $b_0 = \text{const}$  parametryczna minimalizacja ugięcia belki prowadzi do wyniku  $\alpha = 1,36$  dla  $n = 1$  i  $\delta = 0$ , podczas gdy optymalizacja wariacyjna — do bardzo zbliżonej wartości  $\alpha = 1,42$ .



Rys. 5

Wszystkie przedstawione w części czwartej optymalne kształty zależą w sposób istotny od postaci prawa fizycznego (w przeciwieństwie do rozwiązań otrzymanych w pracy [5], w których pominięto siły objętościowe) dla funkcji celu, przedstawionych w punktach 3, 4.1 i 4.2.

Pokrewne zagadnienia optymalizacji kształtu belek, obciążonych siłami zewnętrznymi i ciężarem własnym, omówiono w pracy [5].

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. R. L. BARNETT, *Minimum weight design of beams for deflection*, J. of Eng. Mech., Proc. ASCE, EM 1, 87, 75–109, 1961.
2. R. L. BARNETT, *Minimum deflection design of a uniformly accelerating cantilever beam*, J. Appl. Mech., 30, 466–467, 1963.
3. J. M. CHERN, *Optimal structural design for given deflection in presence of body forces*, Int. J. Solid Structures, 7, 373–382, 1971.
4. L. C. W. DIXON, *Pontryagin's maximum principle applied to the profile of a beam*, J. of the Royal Aeronautical Society, 71, 513–515, 1967.
5. A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie wytrzymałościowe w przypadku materiału o nieliniowości fizycznej*, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, Nr. 5, Kraków 1975.

6. J. M. MARTIN, *The optimal design of beams and frames with compliance constraints*, Int. J. Solids Structures, 7, 63-81, 1971.
7. Z. MRÓZ, *Multiparameter optimal design of plates and shells*, J. Structural Mech., 3, 1, 371-392, 1973.
8. W. OLSZAK, M. ŻYCZKOWSKI, *Podstawy teorii sprężystości ciał fizykalnie nieliniowych o strukturze niejednorodnej*, Arch. Mech. Stos., 7, 1, 151-168, 1955.
9. R. T. SHIELD, W. PRAGER, *Optimal structural design for given deflection*, ZAMP, 21, 4, 513-523, 1970.

## Резюме

## ОПТИМАЛЬНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ, НАГРУЖЕННОЙ СОБСТВЕННЫМ ВЕСОМ, ПРИ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ МАТЕРИАЛА

Предметом работы является оптимальное формирование консольной балки, находящейся в неоднородном поле гравитационных сил (или сил инерции). Рассмотрены балки с двумя осями симметрии поперечного сечения, изготовленные из неоднородного материала описанного нелинейным физическим законом, который позволяет описывать нелинейно-упругие, упруго-пластические материалы или материалы находящиеся в состоянии установившейся ползучести.

Найдены оптимальные формы (высота или ширина) балки, нагруженной собственным весом, при условии выравнивания деформаций (напряжений), условия заданного значения работы объемных сил, заданного значения дополнительной энергии деформации и прогиба свободного конца балки. Как функция цели (стоимость) принят вес балки.

Исследовано влияние вида физического закона (в частном случае — показателя  $n$  в степенном законе) на оптимальную форму балки.

Задача решена, используя классические методы вариационного исчисления.

## SUMMARY

## OPTIMUM DESIGN OF PHYSICALLY NON-LINEAR CANTILEVER BEAM UNDER OWN WEIGHT

The paper deals with the optimal design of a cantilever beam being in a nonhomogeneous field of gravity forces (or inertia forces). The beams are considered which have two axes of symmetry of the cross section and are made of a nonhomogeneous material described by a general nonlinear physical law permitting for description of nonlinear elastic material, elastic-plastic material and steady state of creep.

The optimal shapes (height or width) of a beam loaded by own weight under conditions of uniforming strains (or stresses) and fixed value of the work of volume forces, fixed value of the complementary energy of the strain and deflection of the free end of beam are presented. The weight of a beam was chosen as the cost function.

The effect of the physical law (in particular of the exponent in a power law) on the optimal shape of a beam is examined. The problem was solved by the classical methods of variational calculus.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
INSTYTUT FIZYKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 czerwca 1975 r.