ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 24, 2, 363—380, 1976
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

O PEWNYCH ZAGADNIENIACH SZCZELINY W PRZESTRZENI MIKROPOLARNEJ

STANISŁAW MATYSIAK (WARSZAWA)

W ramach liniowej teorii niesymetrycznej sprężystości [1] rozpatrzono przestrzeń sprężystą osłabioną szczeliną. Założono, że ciało znajduje się w płaskim stanie odkształcenia opisywanym przez wektory: przemieszczenia $\mathbf{u}(x_1, x_2) = (u_1, u_2, 0)$ i obrotu $\boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2) = (0, 0, \varphi_3)$. W pierwszym z rozważanych w pracy zagadnień przyjmując, że znany jest kształt, do jakiego została rozszerzona szczelina i rozkład obrotów na niej (warunki brzegowe (2.2)), wyznaczono rozkład przemieszczeń, obrotów i naprężeń w całej przestrzeni. Przedyskutowano dwa przypadki szczególne, w których założono, że $\varphi_3(0, x_2) = 0$ dla $x_2 \in R$ oraz w pierwszym przypadku $u_1(0, x_2) = \varepsilon_1 \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{a^2}}\, H(a - |x_2|)$ (eliptyczny kształt szczeliny), a w drugim przypadku $u_1(0, x_2) = \varepsilon_1 \left(1 - \frac{x_2^2}{a^2}\right) H(a - |x_2|)$, (szczelina o kształcie dwóch symetrycznych względem osi $0x_1$ parabol). W drugim z rozpatrzonych zagadnień przyjęto, że znany jest kształt szczeliny (przemieszczenie $u_1(0, x_2) = w(x_2) H(a - |x_2|)$, naprężenie momentowe $\mu_{13}(0, x_2) = 0$ dla $x_2 \in \langle -a, a \rangle$, obrót $\varphi_3(0, x_2) = 0$ dla $|x_2| > a$ i naprężenie $\sigma_{12}(0, x_2) = 0$). Zagadnienie to sprowadzono do dualnych równań całkowych (5.5), a następnie do równania całkowego typu Fredholma drugiego rodzaju (5.13). Wyniki uzyskane w pracy porównano z wynikami dla odpowiednich zagadnień rozpatrywanych w ramach klasycznej teorii sprężystości.

1. Wprowadzenie

W ramach liniowej teorii niesymetrycznej sprężystości [1 i 2] rozpatrzmy sprężystą, mikropolarną, jednorodną, izotropową i centrosymetryczną przestrzeń osłabioną szczeliną. Przyjmiemy, że ciało znajduje się w płaskim stanie odkształcenia, opisywanym przez wektory przemieszczenia $\mathbf{u}$ i obrotu $\boldsymbol{\varphi}$, które w prostokątnym układzie współrzędnych x_1, x_2, x_3 mają postać

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) \equiv (u_1, u_2, 0), \qquad \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2) \equiv (0, 0, \varphi_3). \tag{1.1}$$

Założymy, że szczelina zajmująca obszar $D = \{(x_1, x_2, x_3);\ x_1 = 0,\ -a \leqslant x_2 \leqslant a,\ x_3 \in R\}$ jest rozwierana ciśnieniem, przyłożonym symetrycznie do dolnej i górnej jej powierzchni, niezależnym od x_3. Ze względu na symetrię względem osi $0x_1$ i niezależność od x_3 zagadnienie sprowadzi się do zagadnienia brzegowego dla półpłaszczyzny $\Omega = \{(x_1, x_2),\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \in R\}$.

W p. 2 pracy będziemy zakładać, że na brzegu półpłaszczyzny Ω znane są następujące funkcje:

$$u_1(0, x_2) = w(x_2)\, H(a - |x_2|), \qquad \varphi_3(0, x_2) = \psi(x_2)\, H(a - |x_2|),$$

$$\sigma_{12}(0, x_2) = 0 \ \text{dla}\ x_2 \in R,$$

(gdzie $H(x)$ oznacza funkcję Heaviside'a); oznacza to, że znany jest kształt szczeliny oraz rozkład obrotów na niej. Szukać będziemy przemieszczeń, obrotów i naprężeń w całej półpłaszczyźnie Ω, co sprowadzi się do rozwiązania układu równań równowagi (2.1) z warunkami brzegowymi (2.2) i warunkami regularności w nieskończoności (2.3) (rozwiązanie podamy w p. 3). W p. 4 rozpatrzymy dwa przypadki szczególne przyjmując w obydwu, że $\varphi_3(0, x_2)=0$ dla $x_2 \in R$; w pierwszym przypadku brzeg szczeliny ma kształt elipsy (wzory (4.1) i (4.2)), a w drugim brzeg szczeliny składa się z dwóch symetrycznych paraboli (wzory (4.13) i (4.14)). Dla przypadków tych zbadamy osobliwość naprężeń (w punktach $x_2=-a, a$) oraz porównamy uzyskane wyniki z wynikami dla analogicznego zagadnienia w ośrodku Hooke'a. W p. 5 rozpatrzymy warunki brzegowe określone wzorami (5.1). Zagadnienie to różni się od rozpatrywanego w p. 2 tym, że nieznany jest tu w szczelinie rozkład obrotów, a naprężenia momentowe $\mu_{13}(0, x_2)$ są równe zeru. Warunki brzegowe (5.1) prowadzą do dualnych równań całkowych (5.5), które sprowadzimy do równania Fredholma drugiego rodzaju. W p. 6 omówimy uzyskane w pracy wyniki i wnioski.

Rozważane w pracy zagadnienia są uogólnieniem tzw. prostego zagadnienia szczeliny rozpatrywanego w ramach klasycznej teorii sprężystości w [3], str. 426 i [6], str. 53. W pracy [7] rozważono zagadnienie płaskiej szczeliny kołowej w przestrzeni sprężystej (osiowo-symetryczny stan odkształcenia) rozwieranej pod wpływem nieznanego ciśnienia do danego kształtu. Przedyskutowano przypadki, gdy składowa wektora przemieszczenia jest równa $u_z(\rho, 0)=\varepsilon(1-\rho^2/r^2)^\alpha$ (gdzie ρ, θ, z oznaczają współrzędne biegunowe, ε, α stałe, r promień szczeliny); w przypadku gdy $\alpha>1/2$ okazało się, że współczynnik intensywności naprężeń $K=0$, naprężenia zaś działające na szczelinę są ściskające, a w pobliżu jej brzegu rozciągające.

W dalszej części pracy stosować będziemy następujące oznaczenia: $H(x)$ funkcja Heaviside'a, σ_{ij} składowe tensora naprężeń siłowych, μ_{ij} składowe tensora naprężeń momentowych, $\lambda, \mu, \alpha, \gamma, \varepsilon$ stałe materiałowe.

Transformacje całkowe Fouriera oznaczać będziemy w następujący sposób:

$$
(1.2)\qquad
\begin{aligned}
\tilde{f}_s(x_1, \xi) &\equiv \mathscr{F}_s\{f(x_1, x_2); x_2 \to \xi\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x_1, x_2)\sin(\xi x_2)\,dx_2,\\
\tilde{f}_c(x_1, \xi) &\equiv \mathscr{F}_c\{f(x_1, x_2); x_2 \to \xi\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x_1, x_2)\cos(\xi x_2)\,dx_2,\\
\mathscr{F}_s^{-1}\{\tilde{f}_s(x_1, \xi); \xi \to x_2\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{f}_s(x_1, \xi)\sin(\xi x_2)\,d\xi,\\
\mathscr{F}_c^{-1}\{\tilde{f}_c(x_1, \xi); \xi \to x_2\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{f}_c(x_1, \xi)\cos(\xi x_2)\,d\xi.
\end{aligned}
$$

2. Matematyczne sformułowanie zagadnienia

Równania równowagi dla płaskiego stanu odkształcenia (1.1) mają postać [1 i 2] (pomijamy siły masowe i momenty masowe)

$$
\begin{aligned}
&(\mu+\alpha)\nabla^2 u_1+(\lambda+\mu-\alpha)\partial_1 e+2\alpha\varphi_3=0,\\
(2.1)\qquad &(\mu+\alpha)\nabla^2 u_2+(\lambda+\mu-\alpha)\partial_2 e-2\alpha\varphi_3=0,\\
&[(\gamma+\varepsilon)\nabla^2-4\alpha]\varphi_3+2\alpha(\partial_1 u_1-\partial_2 u_2)=0,
\end{aligned}
$$

gdzie

$$\partial_1\equiv\frac{\partial}{\partial x_1},\qquad \partial_2\equiv\frac{\partial}{\partial x_2},\qquad \nabla^2\equiv\partial_1^2+\partial_2^2,\qquad e\equiv\partial_1 u_1+\partial_2 u_2.$$

Ze względu na przyjęte w p. 1 pracy założenia o symetrii zagadnienia względem płaszczyzny $x_1=0$ problem możemy sprowadzić do określenia w półpłaszczyźnie Ω funkcji u_1, u_2, φ_3, spełniających układ równań cząstkowych (2.1) wraz z następującymi warunkami brzegowymi:

$$
\begin{aligned}
(2.2)\qquad &u_1(0,x_2)=w(x_2)H(a-|x_2|),\qquad \sigma_{12}(0,x_2)=0,\\
&\varphi_3(0,x_2)=\psi(x_2)H(a-|x_2|)
\end{aligned}
$$

dla $x_2\in\mathscr{R}$ i warunkami regularności w nieskończoności

$$(2.3)\qquad u_1, u_2, \varphi_3, \sigma_{ij}, \mu_{ij}\to 0,\quad \text{jeżeli}\ r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\to\infty,\qquad i,j=1,2,3.$$

Zakładamy, że $w(x_2)$ [wzór (2.2)] jest daną funkcją ciągłą dla $x_2\in\langle -a, a\rangle$ (określa ona kształt szczeliny) oraz

$$(2.4)\qquad w(-x_2)=w(x_2),\qquad w(a)=w(-a)=0$$

(kształt szczeliny jest symetryczny względem osi $0x_1$), a funkcja $\psi(x_2)$ jest daną funkcją ciągłą dla $x_2\in\langle -a, a\rangle$ i spełnia warunek

$$(2.5)\qquad \psi(-x_2)=-\psi(x_2),\qquad \psi(-a)=\psi(a)=0.$$

Żądamy, aby rozwiązanie u_1, u_2, φ_3 było różniczkowalne w półpłaszczyźnie Ω.

Aby rozwiązać układ równań (2.1) wraz z warunkami (2.2) i (2.3), wykorzystamy zagadnienie pomocnicze z następującymi warunkami brzegowymi:

$$
\begin{aligned}
(2.6)\qquad &\sigma_{11}(0,x_2)=-p(x_2),\qquad \sigma_{12}(0,x_2)=0,\\
&\mu_{13}(0,x_2)=-m(x_2)\qquad \text{dla}\ x_2\in\mathscr{R}
\end{aligned}
$$

i warunkami regularności (2.3). O funkcjach $p(x_2)$ i $m(x_2)$ zakładamy, że są przedziałami ciągłe i bezwzględnie całkowalne w przedziale $(-\infty,\infty)$ oraz że

$$(2.7)\qquad p(-x_2)=p(x_2)\qquad m(-x_2)=-m(x_2)\qquad \text{dla}\ x_2\in\mathscr{R}.$$

Rozwiązanie układu równań (2.1) z warunkami brzegowymi (2.6) przy założeniu, że spełnione są (2.7) i (2.3) ma postać [4]:

(2.8)
$$
\begin{aligned}
u_1(x_1,x_2) &= \frac{1}{2\mu}\mathscr{F}_c^{-1}\left\{\frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0}\left[\left(\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu}\frac{1}{\xi}+x_1\right)e^{-\xi x_1}+\right.\right.\\
&\quad\left.+\frac{2a_0\xi^2}{\rho}(e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1})\right]-\frac{1}{2a_0}\frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\xi\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)\left(\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu}\frac{1}{\xi}+x_1\right)e^{-\xi x_1}+\right.\\
&\quad\left.\left.+\frac{2a_0\xi^2}{\rho}(e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1})\right];\ \xi\to x_2\right\},\\
u_2(x_1,x_2) &= \frac{1}{2\mu}\mathscr{F}_s^{-1}\left\{\frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0}\left[\left(-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{\xi}+x_1\right)e^{-\xi x_1}+\right.\right.\\
&\quad\left.+\frac{2a_0\xi^2}{\rho}\left(\frac{\rho}{\xi}e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1}\right)\right]-\frac{1}{2a_0}\frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\xi\Delta_0}\times\\
&\quad\times\left[(1-\Delta_0)\left(-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{\xi}+x_1\right)e^{-\xi x_1}+\right.\\
&\quad\left.\left.+\frac{2a_0\xi^2}{\rho}\left(\frac{\rho}{\xi}e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1}\right)\right];\ \xi\to x_2\right\},\\
\varphi_3(x_1,x_2) &= \frac{1}{2\mu}\mathscr{F}_s^{-1}\left\{\frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0}\frac{2\mu+\lambda}{2(\lambda+\mu)}\left(e^{-\xi x_1}-\frac{\xi}{\rho}e^{-\rho x_1}\right)-\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{2a_0}\frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\xi\Delta_0}\frac{2\mu+\lambda}{2(\lambda+\mu)}\left[1-\Delta_0)e^{-\xi x_1}-\frac{\xi}{\rho}e^{-\rho x_1}\right];\ \xi\to x_2\right\}.
\end{aligned}
$$

Składowe tensorów naprężeń siłowych i momentowych możemy zapisać następująco:

(2.9)
$$
\begin{aligned}
\sigma_{11}(x_1,x_2) &= -\mathscr{F}_c^{-1}\left\{\frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0}\left[(1+\xi x_1)e^{-\xi x_1}+2a_0\xi^2\times\right.\right.\\
&\quad\left.\times\left(e^{-\rho x_1}-\frac{\xi}{\rho}e^{-\xi x_1}\right)\right]-\frac{1}{2_0}\frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\xi\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)(1+\xi x_1)e^{-\xi x_1}+\right.\\
&\quad\left.\left.+2a_0\xi^2\left(e^{-\rho x_1}-\frac{\xi}{\rho}e^{-\xi x_1}\right)\right];\ \xi\to x_2\right\},\\
\sigma_{12}(x_1,x_2) &= -\mathscr{F}_s^{-1}\frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0}\left[x_1\xi e^{-\xi x_1}+2a_0\xi^2(e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1})\frac{\xi}{\rho}\right]-\\
&\quad-\frac{1}{2a_0}\frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\xi\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)x_1\xi e^{-\xi x_1}+2a_0\xi^2(e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1})\frac{\xi}{\rho}\right];\ \xi\to x_2\Big\},\\
\sigma_{21}(x_1,x_2) &= -\mathscr{F}_s^{-1}\left\{\frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0}\left[x_1\xi e^{-\xi x_1}+2a_0\xi^2\frac{\xi}{\rho}\left(\frac{\rho^2}{\xi^2}e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1}\right)\right]-\right.\\
&\quad-\frac{1}{2a_0}\frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\xi\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)\xi x_1e^{-\xi x_1}+2a_0\xi^2\frac{\xi}{\rho}\times\right.\\
&\quad\left.\left.\times\left(\frac{\rho^2}{\xi^2}e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1}\right)\right];\ \xi\to x_2\right\},
\end{aligned}
$$

(2.9) [cd.]

$$\sigma_{22}(x_1, x_2) = \mathscr{F}_c^{-1}\left\{\frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0}\left[(1+\xi x_1)e^{-\xi x_1} + 2a_0\xi^2\left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\rho}e^{-\xi x_1}\right)\right] - \right.$$
$$-\frac{1}{2a_0}\frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\xi\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)(-1+\xi x_1)e^{-\xi x_1} + 2a_0\xi^2 \times\right.$$
$$\left.\left.\times\left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\rho}e^{-\xi x_1}\right)\right]; \xi \to x_2\right\},$$

$$\mu_{13}(x_1, x_2) = -2a_0\mathscr{F}_s^{-1}\left\{\frac{\xi\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0}(e^{-\xi x_1} - e^{-\rho x_1}) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2a_0}\frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\Delta_0}[(1-\Delta_0)e^{-\xi x_1} - e^{-\rho x_1}]; \xi \to x_2\right\},$$

$$\mu_{23}(x_1, x_2) = 2a_0\mathscr{F}_c^{-1}\left\{\frac{\xi\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0}\left(e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\rho}e^{-\rho x_1}\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2a_0}\frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\rho}e^{-\rho x_1}\right]; \xi \to x_2\right\}.$$

Pozostałe składowe naprężenia σ_{33}, μ_{31}, μ_{32} wyznaczamy ze wzorów

$$\sigma_{33} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(\sigma_{11}+\sigma_{22}), \qquad \mu_{3i} = \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\mu_{i3}, \qquad i=1,2. \tag{2.10}$$

We wzorach (2.8) i (2.9) użyliśmy następujących oznaczeń:

$$\rho \equiv \rho(\xi) = \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{l^2}}, \tag{2.11}$$

$$\Delta_0 \equiv \Delta_0(\xi) = 1 + 2a_0\xi^2\left(1 - \frac{\xi}{\rho}\right), \tag{2.12}$$

$$l^2 = \frac{(\gamma+\varepsilon)(\alpha+\mu)}{4\alpha\mu}, \qquad a_0 = \frac{(\gamma+\varepsilon)(\lambda+2\mu)}{4\mu(\lambda+\mu)}. \tag{2.13}$$

3. Rozwiązanie równań równowagi (2.1) z warunkami (2.2) i (2.3)

Wykorzystamy rozwiązanie zagadnienia pomocniczego sformułowanego wzorami (2.8) i (2.9). Rozwiązanie to spełnia warunki regularności w nieskończoności (2.3), a na brzegu $x_1=0$ mamy $\sigma_{12}(0, x_2)=0$ dla $x_2 \in \mathscr{R}$. Aby spełnić postawione zagadnienie szczeliny, należy tak dobrać funkcje $\tilde{p}_c(\xi)$ i $\tilde{m}_s(\xi)$, aby spełnione były pozostałe warunki (2.2).

Z warunku $(2.2)_1$, wykorzystując $(2.8)_1$ oraz wzór na odwracanie transformacji kosinusowej $(1.2)_4$, mamy

$$\tilde{p}_c(\xi) = \xi\Delta_0 W(\xi) + \frac{\tilde{m}_s(\xi)}{2a_0\xi}(1-\Delta_0), \tag{3.1}$$

gdzie

$$W(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+2\mu}\int_0^a w(x_2)\cos(\xi x_2)\,dx_2. \tag{3.2}$$

Następnie uwzględniając $(2.2)_3$ i wykorzystując $(2.8)_3$ otrzymujemy

$$\frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0}\left(1-\frac{\xi}{\rho}\right)-\frac{1}{2a_0}\,\frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\xi\Delta_0}\left(1-\Delta_0-\frac{\xi}{\rho}\right)=\Psi(\xi), \tag{3.3}$$

gdzie

$$\Psi(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\int_0^a \psi(x_2)\sin(\xi x_2)\,dx_2. \tag{3.4}$$

Równania (3.1) i (3.3) tworzą układ równań algebraicznych, którego rozwiązaniem są funkcje

$$\tilde{m}_s(\xi)=-2a_0\,\xi(\rho-\xi)\,W(\xi)+2a_0\,\rho\Psi(\xi), \tag{3.5}$$

$$\tilde{p}_c(\xi)=[\xi\Delta_0-(\rho-\xi)(1-\Delta_0)]\,W(\xi)+\frac{\rho}{\xi}(1-\Delta_0)\,\Psi(\xi). \tag{3.6}$$

Podstawiając (3.5) i (3.6) do (2.8) i (2.9) otrzymamy poszukiwane składowe wektorów przemieszczenia i obrotu oraz tensorów naprężeń siłowych i momentowych w półpłaszczyźnie Ω wyrażone w postaci całek Fouriera następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
u_1(x_1,x_2)&=\frac{1}{2\mu}\mathscr{F}_c^{-1}\left\{\left(\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu}+\xi x_1\right)e^{-\xi x_1}W(\xi)+\right.\\
&\qquad\left.+2a_0\,\xi\,(e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1})\,[\xi W(\xi)-\Psi(\xi)];\ \xi\to x_2\right\},\\
u_2(x_1,x_2)&=\frac{1}{2\mu}\mathscr{F}_s^{-1}\left\{\left(-\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\xi x_1\right)e^{-\xi x_1}W(\xi)+\right.\\
&\qquad\left.+2a_0\,\xi\left(\frac{\rho}{\xi}e^{-\rho x_1}-e^{\xi x_1}\right)[\xi W(\xi)-\Psi(\xi)];\ \xi\to x_2\right\},\\
\varphi_3(x_1,x_2)&=\frac{1}{4\mu}\,\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu}\mathscr{F}_s^{-1}\left\{\xi e^{-\xi x_1}W(\xi)-\right.\\
&\qquad\left.-e^{-\rho x_1}[\xi W(\xi)-\Psi(\xi)];\ \xi\to x_2\right\}
\end{aligned}\tag{3.7}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(x_1,x_2)&=-\mathscr{F}_c^{-1}\left\{\xi(1+\xi x_1)\,e^{-\xi x_1}W(\xi)+2a_0\,\xi^2\times\right.\\
&\qquad\left.\times\left(e^{-\rho x_1}-\frac{\xi}{\rho}e^{-\xi x_1}\right)\left[\rho W(\xi)-\frac{\rho}{\xi}\Psi(\xi)\right];\ \xi\to x_2\right\},\\
\sigma_{12}(x_1,x_2)&=-\mathscr{F}_s^{-1}\{x_1\,\xi^2\,e^{-\xi x_1}W(\xi)+2a_0\,\xi^2\,(e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1})\times\\
&\qquad\times[\xi W(\xi)-\Psi(\xi)];\ \xi\to x_2\},\\
\sigma_{21}(x_1,x_2)&=-\mathscr{F}_s^{-1}\{x_1\,\xi^2\,e^{-\xi x}W(\xi)+2a_0\,(\rho^2\,e^{-\rho x_1}-\xi^2\,e^{-\xi x_1})\times\\
&\qquad\times[\xi W(\xi)-\Psi(\xi)];\ \xi\to x_2\},\\
\sigma_{22}(x_1,x_2)&=\mathscr{F}_c^{-1}\{(-1+\xi x_1)\,\xi e^{-\xi x_1}W(\xi)+\\
&\qquad+2a_0\,\xi\,(\rho e^{-\rho x_1}-\xi e^{-\xi x_1})\,[\xi W(\xi)-\Psi(\xi)];\ \xi\to x_2\}.
\end{aligned}\tag{3.8}$$

(3.8) [cd.]

$$\mu_{13}(x_1, x_2) = -2a_0 \mathscr{F}_s^{-1}\Big\{\xi^2 e^{-\xi x} W(\xi) - \xi e^{-\rho x_1}\Big[\rho W(\xi) - \frac{\rho}{\xi}\Psi(\xi)\Big]; \xi \to x_2\Big\},$$

$$\mu_{23}(x_1, x_2) = 2a_0 \mathscr{F}_c^{-1}\{\xi^2 e^{-\xi x_1} W(\xi) - \xi e^{-\rho x_1}[\xi W(\xi) - \Psi(\xi)]; \xi \to x_2\}.$$

Składowe wektorów przemieszczenia i obrotu (37) oraz tensorów naprężeń (3.8) są rozwiązaniem prostego zagadnienia szczeliny, postawionego w p. 2 i charakteryzującego się warunkami brzegowymi (2.2).

4. Przypadki szczególne

Przypadek 1

Rozpatrzymy teraz szczelinę zajmującą obszar D, która pod wpływem pewnego ciśnienia została rozszerzona do kształtu elipsy. Przyjmujemy, że

$$w(x_2) = \varepsilon_1 \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{a^2}} \quad \text{dla } x_2 \in \langle -a, a\rangle, \tag{4.1}$$

gdzie ε_1 oznacza dany współczynnik oraz że

$$\psi(x_2) \equiv 0 \quad \text{dla } x_2 \in \langle -a, a\rangle, \tag{4.2}$$

to jest zakładamy, że na powierzchni szczeliny nie występują obroty.

Wykorzystując (4.2) i (3.4) mamy

$$\Psi(\xi) \equiv 0 \quad \text{dla } \xi \geqslant 0. \tag{4.3}$$

Ponieważ wiadomo, że całka [5]

$$\int_0^\infty J_1(a\xi)\cos(\xi x_2)\frac{d\xi}{\xi} = \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{a^2}}\, H(a - |x_2|) \quad \text{dla } x_2 \in \mathscr{R}, \tag{4.4}$$

przeto otrzymujemy

$$\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{a^2}} \cos(\xi x_2)\, dx_2 = \frac{1}{\xi} J_1(\xi a), \tag{4.5}$$

gdzie $J_1(\cdot)$ jest funkcją Bessela.

Dalej na podstawie wzorów (3.2), (4.1) i (4.5) funckję $W(\xi)$ możemy zapisać w postaci

$$W(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{2(\lambda+\mu)\mu\varepsilon_1}{\lambda + 2\mu}\, \frac{1}{\xi} J_1(a\xi). \tag{4.6}$$

Podstawiając funkcje $\Psi(\xi)$ i $W(\xi)$, dane wzorami (4.3) i (4.6), do (3.7) i (3.8) oraz wykorzystując $(1.2)_3$ i $(1.2)_4$ znajdziemy

$$
\begin{aligned}
u_1(x_1, x_2) &= \frac{2}{\pi} \frac{(\lambda+\mu)\varepsilon_1}{\lambda+2\mu} \int_0^\infty \left[\left(\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu} + \xi x_1\right) e^{-\xi x_1} + \right. \\
&\qquad \left. + 2a_0 \xi^2 (e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1})\right] \frac{1}{\xi} J_1(a\xi) \cos(\xi x_2)\, d\xi, \\
u_2(x_1, x_2) &= \frac{2}{\pi} \frac{(\lambda+\mu)\varepsilon_1}{\lambda+2\mu} \int_0^\infty \left[\left(-\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \xi x_1\right) e^{-\xi x_1} + \right. \\
&\qquad \left. + 2a_0 \xi^2 \left(\frac{\rho}{\xi} e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1}\right)\right] \frac{1}{\xi} J_1(a\xi) \sin(\xi x_2)\, d\xi, \\
\varphi_3(x_1, x_2) &= \frac{1}{\pi} \varepsilon_1 \int_0^\infty [e^{-\xi x_1} - e^{-\rho x_1}] J_1(a\xi) \sin(\xi x_2)\, d\xi
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11}(x_1, x_2) &= -\frac{4}{\pi} \frac{(\lambda+\mu)\mu\varepsilon_1}{\lambda+2\mu} \int_0^\infty \left[(1+\xi x_1) e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi\rho \times \right. \\
&\qquad \left. \times \left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi x_1}\right)\right] J_1(a\xi) \cos(\xi x_2)\, d\xi, \\
\sigma_{12}(x_1, x_2) &= -\frac{4}{\pi} \frac{(\lambda+\mu)\mu\varepsilon_1}{\lambda+2\mu} \int_0^\infty [x_1 \xi e^{-\xi x} + \\
&\qquad + 2a_0 \xi^2 (e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1})] J_1(a\xi) \sin(\xi x_2)\, d\xi, \\
\sigma_{21}(x_1, x_2) &= -\frac{4}{\pi} \frac{(\lambda+\mu)\mu\varepsilon_1}{\lambda+2\mu} \int_0^\infty [x_1 \xi e^{-\xi x_1} + \\
&\qquad + 2a_0 (\rho^2 e^{-\rho x_1} - \xi^2 e^{-\xi x_1})] J_1(a\xi) \sin(\xi x_2)\, d\xi, \\
\sigma_{22}(x_1, x_2) &= \frac{4}{\pi} \frac{(\lambda+\mu)\mu\varepsilon_1}{\lambda+2\mu} \int_0^\infty [(-1+\xi x_1) e^{-\xi x_1} + \\
&\qquad + 2a_0 \xi(\rho e^{-\rho x_1} - \xi e^{-\xi x_1})] J_1(a\xi) \cos(\xi x_2)\, d\xi, \\
\mu_{13}(x_1, x_2) &= -\frac{8}{\pi} \frac{(\lambda+\mu)\mu\varepsilon_1 a_0}{\lambda+2\mu} \int_0^\infty (\xi e^{-\xi x_1} - \rho e^{-\rho x_1}) J_1(a\xi) \sin(\xi x_2)\, d\xi, \\
\mu_{23}(x_1, x_2) &= \frac{8}{\pi} \frac{(\lambda+\mu)\mu\varepsilon_1 a_0}{\lambda+2\mu} \int_0^\infty \xi (e^{-\xi x_1} - e^{-\rho x_1}) J_1(a\xi) \cos(\xi x_2)\, d\xi.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Wzory (4.7) i (4.8) opisują stan przemieszczenia, obrotu i naprężenia w półpłaszczyźnie Ω, na brzegu której przyjęto warunki (2.2) zakładając przy tym, że funkcja $w(x_2)$ dana jest wzorem (4.1), a $\psi(x_2)$ wzorem (4.2). Całki występujące we wzorach (4.7) i (4.8) są zbieżne w półpłaszczyźnie $\{(x_1, x_2);\ x_1 > 0,\ x_2 \in \mathscr{R}\}$. Ich osobliwości zależą od zachowania się funkcji podcałkowych dla $x_1=0$ i $\xi\to\infty$, mianowicie od tych części funkcji podcałkowych, które przy $x_1=0$ i $\xi\to\infty$ są rzędu $O(\xi^{-1/2})$ lub większego, gdyż funkcja Bessela $J_1(x)$ ma następujące rozwinięcie asymptotyczne:

$$J_1(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)\quad \text{przy } x\to\infty.$$

W celu wyznaczenia charakteru osobliwości całek opisujących stan przemieszczenia, obrotu i naprężenia w półpłaszczyźnie Ω, a więc całek występujących we wzorach (4.7) i (4.8), wykorzystamy następujące rozwinięcie asymptotyczne:

$$\rho\equiv\sqrt{\xi^2+\frac{1}{l^2}}=\xi+\frac{1}{2\xi l^2}+O(\xi^{-3}),\quad \text{gdy } \xi\to\infty, \tag{4.9}$$

oraz całki [5]

$$\int\limits_0^\infty J_1(a\xi)\cos(\xi x_2)\,d\xi=\frac{1}{a}H(a-|x_2|)+\frac{1}{a}\left(\frac{|x_2|}{\sqrt{x_2^2-a^2}}-1\right)H(|x_2|-a)\quad \text{dla } x_2\in\mathscr{R},$$

$$\int\limits_0^\infty J_1(a\xi)\sin(\xi x_2)\,d\xi=\frac{x_2}{a\sqrt{a^2-x_2^2}}H(a-|x_2|)\quad \text{dla } x_2\in\mathscr{R}, \tag{4.10}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{\xi}J_1(a\xi)\sin(\xi x_2)\,d\xi=\frac{|x_2|}{a}H(a-|x_2|)+\frac{a}{|x_2|+\sqrt{x_2^2-a^2}}H(|x_2|-a)\quad \text{dla } x_2\in\mathscr{R}.$$

Składowe naprężeń siłowych i momentowych dla $x_1=0$ możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(0,x_2)&=-\frac{4}{\pi}\frac{(\lambda+\mu)\mu\varepsilon_1}{\lambda+2\mu}\frac{1}{a}\left[\frac{l^2+a_0}{l^2}H(a-|x_2|)+\right.\\
&\quad\left.+\left(\frac{|x_2|}{\sqrt{x_2^2-a^2}}-1\right)\frac{l^2+a_0}{l^2}H(|x_2|-a)\right]+O(1)\quad \text{dla } x_2\in\mathscr{R},\\
\sigma_{12}(0,x_2)&\equiv 0\quad \text{dla } x_2\in\mathscr{R},\\
\sigma_{21}(0,x_2)&=-\frac{8}{\pi}\frac{(\lambda+\mu)\mu\varepsilon_1}{\lambda+2\mu}\frac{a_0}{l^2}\frac{x_2}{a\sqrt{a^2-x_2^2}}H(a-|x_2|)\quad \text{dla } x_2\in\mathscr{R},\\
\sigma_{22}(0,x_2)&=\sigma_{11}(0,x_2)+O(1)\quad \text{dla } x_2\in\mathscr{R},\\
\mu_{13}(0,x_2)&=\frac{4}{\pi}\frac{(\lambda+\mu)\mu\varepsilon_1}{\lambda+2\mu}\frac{a_0}{l^2}\left[\frac{x_2}{a}H(a-|x_2|)+\right.\\
&\quad\left.+\frac{a}{x_2+\sqrt{x_2^2-a^2}}H(|x_2|-a)\right]+O(1)\quad \text{dla } x_2\in\mathscr{R}\\
\mu_{23}(0,x_2)&\equiv 0\quad \text{dla } x_2\in\mathscr{R}.
\end{aligned}\tag{4.11}$$

Symbolem $O(1)$ oznaczyliśmy część regularną rozwiązania. Całki występujące we wzorach opisujących składowe wektorów przemieszczenia i obrotu (wzory (4.7)) są zbieżne w całej półpłaszczyźnie Ω.

Przytoczymy z kolei wyniki dla analogicznego zagadnienia w ramach klasycznej teorii sprężystości, mianowicie wypiszemy składowe tensora naprężenia (na prostej $x_1=0$) w ośrodku Hooke'a zawierającym szczelinę zajmującą obszar $D=\{(x_1, x_2, x_3); x_1=0, \; -a\leqslant x_2\leqslant a, x_3 \in \mathscr{R}\}$ i rozszerzoną do kształtu elipsy (wzór (4.1)) [3 i 6]:

$$\begin{gathered}\overset{\circ}{\sigma}_{11}(0, x_2)=-\frac{4}{\pi}\frac{(\overset{\circ}{\lambda}+\overset{\circ}{\mu})\overset{\circ}{\mu}\varepsilon_1}{\overset{\circ}{\lambda}+2\overset{\circ}{\mu}}\Bigg[\frac{1}{a}H(a-|x_2|)+ \\ \tag{4.12} +\frac{1}{a}\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-a^2}}-1\right)H(|x_2|-a)\Bigg] \quad \text{dla } x_2\in\mathscr{R}, \\ \overset{\circ}{\sigma}_{12}(0, x_2)\equiv\overset{\circ}{\sigma}_{21}(0, x_2)\equiv 0 \quad \text{dla } x_2\in\mathscr{R}, \\ \overset{\circ}{\sigma}_{22}(0, x_2)\equiv\overset{\circ}{\sigma}_{11}(0, x_2) \quad \text{dla } x_2\in\mathscr{R}.\end{gathered}$$

We wzorach tych $\overset{\circ}{\lambda}$, $\overset{\circ}{\mu}$ oznaczają stałe Lamégo, σ_{ij} tensor naprężenia w ośrodku Hooke'a.

Porównując wyniki uzyskane dla ośrodka Cosseratów [wzory (4.11)] z wynikami dla ośrodka Hooke'a [wzory (4.12)] można zauważyć, że w punktach $x_2=-a$ i $x_2=a$ rząd osobliwości składowych $\sigma_{11}(0, x_2)$, $\sigma_{22}(0, x_2)$ jest taki sam jak składowych $\overset{\circ}{\sigma}_{11}(0, x_2)$ i $\overset{\circ}{\sigma}_{22}(0, x_2)$. Istotna różnica tkwi tu we współczynniku intensywności nieskończonej koncentracji naprężeń. Składowa tensora naprężenia $\sigma_{21}(0, x_2)$ w mikropolarnym ośrodku (w odróżnieniu od $\overset{\circ}{\sigma}_{21}(0, x_2)\equiv 0$ dla $\varphi_2\in\mathscr{R}$ w ośrodku Hooke'a) staje się nieograniczona, gdy $x_2\to -a^+$ lub $x_2\to a^-$, a składowa tensora naprężeń momentowych $\mu_{13}(0, x_2)$ jest ograniczona dla $x_2\in\mathscr{R}$.

Przypadek 2

Przyjmiemy, że

$$\psi(x_2)\equiv 0 \quad \text{dla } x_2\in\langle -a, a\rangle, \tag{4.13}$$

a funkcja $w(x_2)$ ma postać

$$w(x_2)=\varepsilon_1\left(1-\frac{x_2^2}{a^2}\right) \quad \text{dla } x_2\in\langle -a, a\rangle. \tag{4.14}$$

Wykorzystując (4.13) i (3.4) mamy

$$\Psi(\xi)\equiv 0 \quad \text{dla } \xi\geqslant 0; \tag{4.15}$$

podstawiając do (3.2) wzór (3.14) znajdziemy

$$W(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{4(\lambda+\mu)\mu\varepsilon_1}{\lambda+2\mu}\frac{1}{a\xi^2}\left[\frac{\sin(a\xi)}{a\xi}-\cos(a\xi)\right]. \tag{4.16}$$

Podstawiając $\Psi(\xi)$ dane z (4.15) oraz $W(\xi)$ z (4.16) do (3.7) i (3.8) otrzymamy przemieszczenie, obrót i naprężenie w półpłaszczyźnie Ω w postaci całkowej. Całki te są zbieżne dla $x_1>0$ i $x_2 \in \mathscr{R}$.

Podstawiając (4.15) i (4.16) do (3.8) i przyjmując $x_1=0$ znajdziemy składowe tensorów naprężeń siłowych i momentowych

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11}(0, x_2) = -\frac{8}{\pi}\frac{(\lambda+\mu)\mu\varepsilon_1}{(\lambda+2\mu)a}\Bigg\{\int_0^\infty \frac{1}{\xi}\left[\frac{\sin(a\xi)}{a\xi}-\cos(a\xi)\right]\cos(\xi x_2)\,d\xi + \\
&\qquad\qquad + 2a_0\int_0^\infty (\rho-\xi)\left[\frac{\sin(a\xi)}{a\xi}-\cos(a\xi)\right]\cos(\xi x_2)\,d\xi\Bigg\},\\
&\sigma_{12}(0, x_2)\equiv 0 \quad \text{dla } x_2\in\mathscr{R},\\
&\sigma_{21}(0, x_2) = -\frac{16}{\pi}\frac{(\lambda+\mu)\mu\varepsilon_1}{(\lambda+2\mu)a}\frac{a_0}{l^2}\int_0^\infty \frac{1}{\xi}\left[\frac{\sin(a\xi)}{a\xi}-\cos(a\xi)\right]\sin(\xi x_2)\,d\xi,\\
&\sigma_{22}(0, x_2) = \sigma_{11}(0, x_2) \quad \text{dla } x_2\in\mathscr{R},\\
&\mu_{13}(0, x_2) = \frac{16}{\pi}\frac{(\lambda+\mu)\mu\varepsilon_1 a_0}{(\lambda+2\mu)a}\int_0^\infty \frac{1}{\xi}(\rho-\xi)\times\\
&\qquad\qquad \times\left[\frac{\sin(a\xi)}{a\xi}-\cos(a\xi)\right]\sin(\xi x_2)\,d\xi,\\
&\mu_{23}(0, x_2)\equiv 0 \quad \text{dla } x_2\in\mathscr{R}.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Wykorzystując następujące wzory na całki [5]:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{1}{\xi}\left[\frac{\sin(a\xi)}{a\xi}-\cos(a\xi)\right]\cos(\xi x_2)\,d\xi = \\
&\qquad\qquad = 1-\frac{x_2}{2a}\log\left(\frac{a+x_2}{a-x_2}\right) \quad \text{dla } |x_2|<a,\\
&\int_0^\infty \frac{1}{\xi}\left[\frac{\sin(a\xi)}{a\xi}-\cos(a\xi)\right]\sin(\xi x_2)\,d\xi = \frac{\pi}{2}\frac{x_2}{a}H(a-|x_2|)
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

oraz rozwinięcie asymptotyczne (4.9) możemy zapisać składowe tensorów naprężeń [określone przez (4.17)] w postaci

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11}(0, x_2) = -\frac{8}{\pi}\frac{(\lambda+\mu)\mu\varepsilon_1}{(\lambda+2\mu)a}\left[1-\frac{x_2}{2a}\log\left(\frac{a+x_2}{a-x_2}\right)\right]\frac{a_0+l^2}{l^2}+O(1)\\
&\qquad\qquad \text{dla } |x_2|<a,\\
&\sigma_{12}(0, x)\equiv 0 \quad \text{dla } x_2\in\mathscr{R},\\
&\sigma_{21}(0, x_2) = -\frac{8(\lambda+\mu)\mu\varepsilon_1}{(\lambda+2\mu)a}\frac{a_0}{l^2}\frac{x_2}{a}H(a-|x_2|),\\
&\sigma_{22}(0, x_2) = \sigma_{11}(0, x_2) \quad \text{dla } x_2\in\mathscr{R},\\
&\mu_{13}(0, x_2) = O(1) \quad \text{dla } x_2\in\mathscr{R},\\
&\mu_{23}(0, x_2)\equiv 0 \quad \text{dla } x_2\in\mathscr{R}.
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Analogiczne zagadnienie do rozważanego tutaj przykładu w ramach klasycznej teorii sprężystości można znaleźć np. w [3 i 6]. Przytoczymy wyniki:

$$
(4.20)\qquad
\begin{aligned}
&\overset{\circ}{\sigma}_{11}(0, x_2) = -\frac{8(\lambda+\overset{\circ}{\mu})\overset{\circ}{\mu}\varepsilon_1}{\pi(\overset{\circ}{\lambda}+2\overset{\circ}{\mu})a}\left[1-\frac{x_2}{2a}\log\left(\frac{a+x_2}{a-x_2}\right)\right] \quad \text{dla} |x_2|<a,\\
&\overset{\circ}{\sigma}_{12}(0, x_2) = \overset{\circ}{\sigma}_{21}(0, x_2) \equiv 0 \quad \text{dla } x_2 \in \mathscr{R},\\
&\overset{\circ}{\sigma}_{22}(0, x_2) \equiv \overset{\circ}{\sigma}_{11}(0, x_2) \quad \text{dla } x_2 \in \mathscr{R}.
\end{aligned}
$$

Porównując (4.19) z (4.20) można zauważyć, że w ośrodku Cosseratów na prostej $x_1=0$ pojawiają się naprężenia $\sigma_{21}(0, x_2)$ i w tym przypadku (w odróżnieniu od przykładu 1) są one ograniczone. Składowa $\sigma_{11}(0, x_2)$ ma w punktach $x_2=a$ i $x_2=-a$ osobliwość tego samego rzędu co $\overset{\circ}{\sigma}_{11}(0, x_2)$ (różnica tkwi we współczynniku intensywności naprężenia). Ze wzorów (4.19) widać, że jeżeli szczelina zajmująca obszar D ma rozszerzyć się do kształtu opisanego przez (4.16), to naprężenie $\sigma_{11}(0, x_2)$ musi być rozciągające i bardzo duże w pobliżu brzegów $x_2=a$ i $x_2=-a$.

5. Inne zagadnienia

Rozważymy teraz zagadnienie analogiczne do rozpatrywanego w p. 2 przyjmując jednak, że na powierzchni szczeliny nie ma naprężeń momentowych μ_{13}.

Warunki brzegowe są następujące:

$$
(5.1)\qquad
\begin{aligned}
&u_1(0, x_2) = w(x_2)\,H(a-|x_2|), \qquad \sigma_{12}(0, x_2)=0 \quad \text{dla } x_2 \in \mathscr{R},\\
&\mu_{13}(0, x_2) = 0 \quad \text{dla } |x_2|<a,\\
&\varphi_3(0, x_2) = 0 \quad \text{dla } |x_2|>a,
\end{aligned}
$$

gdzie $w(x_2)$ jest funkcją znaną spełniającą warunki (2.4). Aby rozwiązać układ równań równowagi (2.1) wraz z warunkami brzegowymi (5.1) i warunkami regularności w nieskończoności (2.3), posłużymy się rozwiązaniem zagadnienia pomocniczego określonego wzorami (2.8) i (2.9).

Przyjmując za niewiadome funkcje $\tilde{p}_c(\xi)$ i $\tilde{m}_s(\xi)$, należy tak je dobrać, by spełnione były warunki (5.1).

Ze wzoru $(2.8)_1$ mamy

$$
(5.2)\qquad u_1(0, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2\mu+\lambda}{(\lambda+\mu)\mu}\int_0^\infty \frac{1}{\xi\Delta_0}\left[\tilde{p}_c(\xi) - \frac{\tilde{m}_s(\xi)}{2a_0\xi}(1-\Delta_0)\right]\cos(\xi x_2)\,d\xi.
$$

Stąd na podstawie $(5.1)_1$ i wzoru na odwrotną transformację kosinusową $(1.2)_4$ znajdujemy

$$
(5.3)\qquad \tilde{p}_c(\xi) = \xi\Delta_0\,W(\xi) + \frac{\tilde{m}_s(\xi)}{2a_0\xi}(1-\Delta_0),
$$

gdzie $W(\xi)$ jest określone wzorem (3.2), a_0 — wzorem (2.13) i Δ_0 — (2.12).

Z warunków brzegowych $(5.1)_{3,4}$ oraz z (2.8) i (2.9) otrzymujemy

$$\int_0^\infty \tilde{m}_s(\xi)\sin(\xi x_2)\,d\xi=0 \quad \text{dla } 0\leqslant x_2<a,$$

$$(5.4)\qquad \int_0^\infty \frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0}\left(1-\frac{\xi}{\rho}\right)\sin(\xi x_2)\,d\xi-\frac{1}{2a_0}\int_0^\infty \frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\xi\Delta_0}\times$$
$$\times\left(1-\Delta_0-\frac{\xi}{\rho}\right)\sin(\xi x_2)\,d\xi=0 \quad \text{dla } x_2>a.$$

Podstawiając (5.3) do (5.4) uzyskujemy układ dualnych równań całkowych służących do wyznaczenia niewiadomej funkcji $\tilde{m}_s(\xi)$ w następującej postaci:

$$\int_0^\infty \tilde{m}_s(\xi)\sin(\xi x_2)\,d\xi=0 \quad \text{dla } 0\leqslant x_2<a,$$

$$(5.5)\qquad \int_0^\infty \frac{\tilde{m}_s(\xi)}{\rho}\sin(\xi x_2)\,d\xi=-2a_0\int_0^\infty \xi W(\xi)\left(1-\frac{\xi}{\rho}\right)\sin(\xi x_2)\,d\xi \quad \text{dla } x_2>a.$$

Dualne równania całkowe (5.5) należą do znanego typu równań rozpatrywanego np. w [8 i 9].

Sprowadzimy (5.5) do jednego równania całkowego Fredholma drugiego rodzaju. W tym celu zróżniczkujemy stronami równanie $(5.5)_2$ względem x_2, co daje następujący związek:

$$(5.6)\qquad \mathscr{F}_c\left\{\frac{\xi}{\rho}\tilde{m}_s(\xi);\,\xi\to x_2\right\}=-2a_0\,\mathscr{F}_c\left\{\xi^2\left(1-\frac{\xi}{\rho}\right)W(\xi);\,\xi\to x_2\right\} \quad \text{dla } x_2>a.$$

Wprowadzimy z kolei oznaczenia

$$(5.7)\qquad A(\xi)=\frac{\xi}{\rho}\tilde{m}_s(\xi)+2a_0\,\xi^2\left(1-\frac{\xi}{\rho}\right)W(\xi);$$

układ dualnych równań całkowych (5.5) możemy przedstawić w formie następującej

$$(5.8)\qquad \begin{aligned} &\mathscr{F}_s\{A(\xi)\,[1+k(\xi)];\,\xi\to x_2\}=2a_0\,\mathscr{F}_s\{\xi(\rho-\xi)\,W(\xi);\,\xi\to x_2\} \quad \text{dla } 0\leqslant x_2<a,\\ &\mathscr{F}_c\{A(\xi);\,\xi\to x_2\}=0 \quad \text{dla } x_2>a,\end{aligned}$$

gdzie

$$(5.9)\qquad k(\xi)=\frac{\rho-\xi}{\xi}=\frac{1}{l^2\xi\left[\sqrt{\xi^2+\frac{1}{l^2}}+\xi\right]}.$$

Wprowadzając zmienne bezwymiarowe

$$(5.10)\qquad a\xi=\eta,\; x_2=ay,$$

układ równań (5.8) doprowadzimy do postaci:

$$(5.11)\quad \begin{aligned} &\mathscr{F}_s\{A(\eta/a)[1+k(\eta/a)];\eta\to y\}=2a_0\mathscr{F}_s\{\eta/a(\rho-\eta/a)\times\\ &\qquad\qquad\times W(\eta/a);\eta\to y\}\quad \text{dla } 0\leqslant y<1,\\ &\mathscr{F}_c\{A(\eta/a);\eta\to y\}=0\quad \text{dla } y>1.\end{aligned}$$

Przedstawiając funkcję $A(\eta/a)$ w postaci

$$(5.12)\qquad A(\eta/a)=\int_0^1 g(t)J_0(\eta t)\,dt$$

i podstawiając do równań (5.11), otrzymamy po przekształceniach następujące równania całkowe ([10], str. 51):

$$(5.13)\qquad g(t)+\int_0^1 g(u)M(t,u)\,du=F(t),\qquad 0\leqslant t<1,$$

gdzie

$$(5.14)\quad M(t,u)=\frac{2t}{\pi}\int_0^\infty \xi k(\xi)J_0(u\xi)J(t\xi)\,d\xi=$$
$$=\frac{2t}{\pi l^2}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\frac{1}{l^2}}+\xi}J_0(u\xi)J_0(t\xi)\,d\xi,$$

$$(5.15)\qquad F(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{xf(x)\,dx}{\sqrt{t^2-x^2}}.$$

Funkcja $f(x)$ wyraża się wzorem

$$(5.16)\qquad f(x)=2a_0\mathscr{F}_s\{\eta/a[\rho(\eta/a)-\eta/a]W(\eta/a);\eta\to x\}.$$

Wykorzystując (5.7) i (5.12) możemy zapisać

$$(5.17)\qquad \tilde{m}_s(\xi)=\frac{\rho}{\xi}\int_0^1 g(t)J_0(\xi at)\,dt-2a_0\xi(\rho-\xi)W(\xi),$$

a dalej na podstawie (5.3) i (5.7) mamy:

$$(5.18)\qquad \tilde{p}_c(\xi)=(\xi-\rho+\rho\Delta_0)W(\xi)-(\rho-\xi)\int_0^1 g(t)J_0(\xi at)\,dt.$$

Podstawiając funkcje $\tilde{m}_s(\xi)$ określoną wzorem (5.17) i $\tilde{p}_c(\xi)$ wzorem (5.18) do (2.8) i (2.9) otrzymamy składowe wektorów przemieszczenia i obrotu oraz składowe tensorów naprężeń siłowych i momentowych w półpłaszczyźnie Ω w następującej postaci:

$$(5.19)\quad \begin{aligned} u_1(x_1,x_2)=\frac{1}{2\mu}\mathscr{F}_c^{-1}\Bigg\{&\left(\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu}+\xi x_1\right)e^{-\xi x_1}W(\xi)+\\ &+(e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1})\Bigg[2a_0\xi^2W(\xi)+\frac{1}{\Delta_0}\left(-2a_0\xi^2+\frac{2a_0\xi^3}{\rho}-1\right)\times\\ &\times\int_0^1 g(t)J_0(\xi at)\,dt\Bigg];\ \xi\to x_2\Bigg\},\end{aligned}$$

(5.19) [cd.]
$$u_2(x_1,x_2)=\frac{1}{2\mu}\mathscr{F}_s^{-1}\Bigg\{\left(-\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\xi x_1\right)e^{-\xi x_1}W(\xi)+\left(\frac{\rho}{\xi}e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1}\right)\left[2a_0\xi^2W(\xi)+\frac{1}{\Delta_0}\left(-2a_0\xi^2+\frac{2a_0\xi^3}{\rho}-1\right)\times\int_0^1 g(t)J_0(\xi at)\,dt\right];\ \xi\to x_2\Bigg\},$$

$$\varphi_3(x_1,x_2)=\frac{1}{4\mu}\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\mathscr{F}_s^{-1}\Bigg\{\xi e^{-\xi x_1}W(\xi)-e^{-\rho x_1}\left[\xi W(\xi)+\frac{1}{\Delta_0}\left(-\xi+\frac{\xi^2}{\rho}-\frac{1}{2a_0\xi}\right)\int_0^1 g(t)J_0(\xi at)\,dt\right];\ \xi\to x_2\Bigg\};$$

oraz

$$\sigma_{11}(x_1,x_2)=-\mathscr{F}_c^{-1}\Bigg\{(1+\xi x_1)\xi e^{-\xi x}W(\xi)+\left(e^{-\rho x_1}-\frac{\xi}{\rho}e^{-\xi x_1}\right)\times\left[2a_0\xi^2\rho W(\xi)+\frac{1}{\Delta_0}(-2a_0\xi^2\rho+2a_0\xi^3-\rho)\int_0^1 g(t)J_0(\xi at)\,dt\right];\ \xi\to x_2\Bigg\},$$

$$\sigma_{12}(x_1,x_2)=-\mathscr{F}_s^{-1}\Bigg\{x_1\xi^2e^{-\xi x_1}W(\xi)+(e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1})\times\left[2a_0\xi^3W(\xi)+\left(-2a_0\xi^3+\frac{2a_0\xi^4}{\rho}-\xi\right)\int_0^1 g(t)J_0(\xi at)\,dt\right];\ \xi\to x_2\Bigg\},$$

$$\sigma_{21}(x_1,x_2)=-\mathscr{F}_s^{-1}\Bigg\{x_1\xi^2e^{-\xi x_1}W(\xi)+\left(\frac{\rho^2}{\xi^2}e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1}\right)\times\left[2a_0\xi^3W(\xi)+\left(-2a\xi^3+\frac{2a_0\xi^4}{\rho}-\xi\right)\int_0^1 g(t)J_0(\xi at)\,dt\right];\ \xi\to x_2\Bigg\},$$

(5.20)
$$\sigma_{22}(x_1,x_2)=\mathscr{F}_c^{-1}\Bigg\{(-1+\xi x_1)\xi e^{-\xi x}W(\xi)+\left(e^{-\rho x_1}-\frac{\xi}{\rho}e^{-\xi x_1}\right)\times\left[2a_0\xi^2\rho W(\xi)+\frac{1}{\Delta_0}(-2a_0\xi^2\rho+2a_0\xi^3-\rho)\times\int_0^1 g(t)J_0(\xi at)\,dt\right];\ \xi\to x_2\Bigg\},$$

$$\mu_{13}(x_1,x_2)=-2a_0\mathscr{F}_s^{-1}\Bigg\{\xi^2e^{-\xi x_1}W(\xi)-e^{-\rho x_1}\left[\rho\xi W(\xi)+\frac{1}{\Delta_0}\left(-\xi\rho+\xi^2-\frac{\rho}{2a_0\xi}\right)\int_0^1 g(t)J_0(\xi at)\,dt\right];\ \xi\to x_2\Bigg\},$$

$$\mu_{23}(x_1,x_2)=2a_0\mathscr{F}_c^{-1}\Bigg\{\xi^2e^{-\xi x_1}W(\xi)-e^{-\rho x_1}\left[\xi^2W(\xi)+\frac{1}{\Delta_0}\left(-\xi^2+\frac{\xi^3}{\rho}-\frac{1}{2a_0}\right)\int_0^1 g(t)J_0(\xi at)\,dt\right];\ \xi\to x_2\Bigg\}.$$

Aby wyznaczać stan odkształcenia i naprężenia w półpłaszczyźnie Ω, należy (obierając funkcję $w(x_2)$ określającą kształt rozwarcia szczeliny) wyznaczyć ze wzoru (3.2) funkcje $W(\xi)$, następnie rozwiązać równania całkowe (5.13), a potem podstawić do wzorów (5.19) i (5.20) funkcje $W(\xi)$ i $g(t)$ i wyznaczyć odpowiednie całki.

Równanie całkowe (5.13) jest równaniem Fredholma drugiego rodzaju z ciągłym jądrem $M(t,u)$ określonym za pomocą wzoru (5.14) i można je rozwiązywać numerycznie.

Nie rozwiązując równania (5.13), a tylko wykorzystując postać dualnych równań całkowych (5.5) można otrzymać składowe $\sigma_{21}(0,x_2)$ i $\mu_{23}(0,x_2)$ dla $x_2>a$. W tym celu podstawiając $\tilde{p}_c(\xi)$ określone przez wzór (5.3) do $(2.9)_{3,6}$ i przyjmując $x_1=0$, otrzymujemy

$$
(5.21)\qquad
\begin{aligned}
\sigma_{21}(0,x_2)&=-\frac{2a_0}{l^2}\mathscr{F}_s^{-1}\left\{\frac{\xi}{p}\left[\xi W(\xi)-\frac{\tilde{m}_s(\xi)}{2a_0\,\xi}\right];\ \xi\to x_2\right\},\\
\mu_{23}(0,x_2)&=2a_0\,\mathscr{F}_c^{-1}\left\{\xi^2\left(1-\frac{\xi}{p}\right)W(\xi)+\frac{\xi\tilde{m}_s(\xi)}{2a_0\,p};\ \xi\to x_2\right\}.
\end{aligned}
$$

Z $(5.21)_1$ i $(5.5)_2$ wynika, że

$$
(5.22)\qquad \sigma_{21}(0,x_2)=-\frac{2a_0}{l^2}\mathscr{F}_s^{-1}\{\xi W(\xi);\ \xi\to x_2\}.
$$

Jeżeli zróżniczkujemy równanie $(5.5)_2$ względem x_2, a następnie wykorzystamy je do $(5.21)_2$, to otrzymamy

$$
(5.23)\qquad \mu_{23}(0,x_2)=0\quad \text{dla } x_2>a.
$$

6. Wnioski końcowe

Rozpatrzone w pracy zagadnienia są odwrotne do dwóch zagadnień statycznych szczelin, w których znając ciśnienie rozwierające szczelinę szuka się jej kształtu. Rozpatrzone zagadnienie w p. 2 i 3 jest odwrotne do zagadnienia mieszanego dla półpłaszczyzny Ω o następujących warunkach brzegowych:

$$
(6.1)\qquad
\begin{aligned}
&\sigma_{11}(0,x_2)=-p(x_2) && \text{dla } 0\leqslant|x_2|<a;\\
&\mu_{13}(0,x_2)=-m(x_2) && \text{dla } 0\leqslant|x_2|<a;\\
&\sigma_{12}(0,x_2)=0 && \text{dla } x_2\in\mathscr{R},\\
&u_1(0,x_2)=0 && \text{dla } |x_2|>a,\\
&\varphi_3(0,x_2)=0 && \text{dla } |x_2|>a.
\end{aligned}
$$

Natomiast zagadnienie rozpatrzone w p. 5 jest odwrotne do zagadnienia szczeliny nierozszerzanej za pomocą naprężenia μ_{13} (w warunku $(6.1)_2$ należy przyjąć $m(x_2)\equiv\equiv 0$). Warunki brzegowe (6.1) prowadzą do układu dualnych równań całkowych z dwiema niewiadomymi funkcjami.

Można zauważyć, że podstawiając funkcję

$$\Psi(\xi) = -\frac{1}{\Delta_0}\left(-\xi + \frac{\xi^2}{p} - \frac{1}{2a_0\xi}\right)\int_0^1 g(t)\, J_0(\xi a t)\, dt \tag{6.2}$$

do wzorów (3.7) i (3.8) [a więc do rozwiązania zagadnienia charakteryzującego się warunkami brzegowymi (2.2)], otrzymamy rozwiązanie zagadnienia rozpatrywanego w p. 5 [wzory (5.19) i (5.20)].

W p. 3 pracy przejmując kształt szczeliny w postaci

$$w(x_2) = \varepsilon_1\left(1 - \frac{x_2^2}{a^2}\right)^b,$$

gdzie $b = 1/2$ lub $b = 1$ i że obrót na szczelinie znika, stwierdzono, że składowe tensora naprężenia $\sigma_{11}(0, x_2)$ i $\sigma_{22}(0, x_2)$ mają w punktach $x_2 = a$ i $x_2 = -a$ osobliwość tego samego rzędu, co składowe $\overset{\circ}{\sigma}_{11}(0, x_2)$ i $\overset{\circ}{\sigma}_{22}(0, x_2)$ w analogicznych zagadnieniach rozpatrywanych w ramach klasycznej teorii sprężystości. Różnica tkwi we współczynniku intensywności naprężenia, który dla ciała mikropolarnego zależy od stałych a_0 i l^2.

Dla ośrodka Cosseratów (w odróżnieniu od ośrodka Hooke'a) w rozważanych w p. 3 przykładach na szczelinie nie zeruje się składowa $\sigma_{21}(0, x_2)$; w pierwszym z przykładów ($b = 1/2$) jest ona przy $x_2 \to a-$ lub $x_2 \to -a+$ nieograniczona (wzór $(4.11)_3$), a w drugim ($b = 1$) ma przy $x_2 \to a^-$ lub $x_2 \to -a^+$ skończoną granicę (wzór $(4.19)_3$).

Z otrzymanych w pracy wyników [wzory (3.7) i (3.8) lub (5.19) i (5.20)] można uzyskać przez przejście graniczne $a_0 \to 0$ i $l^2 \to 0$ wyniki odpowiadające analogicznym zagadnieniom rozpatrywanym w ramach klasycznej teorii sprężystości.

Literatura cytowana w tekście

1. W. Nowacki, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN., Warszawa 1971.
2. W. Nowacki, *Plane problems of micropolar elasticity*, Arch. Mech. Stos., **23**, 5, 587–611, 1971.
3. I. N. Sneddon, *Fourier transforms*, Mc. Graw-Hill Book Company, INC. New York-Toronto-London 1951.
4. J. Dyszlewicz, S. Matysiak, *Osobliwość naprężeń silowych i momentowych w ciele mikropolarnym wywołana obciążeniami skupionymi*, Mech. Teor. i Stos., **11**, 4, 363–391, 1973.
5. И. С. Градштейн, И. М. Рижик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Изд. Наука, Москва 1971.
6. I. N. Sneddon, *Zagadnienie szczelin w matematycznej teorii sprężystości*, PAN Biuro Kształcenia i Doskonalenia Kadr Naukowych, Warszawa 1962.
7. Z. Olesiak, I. N. Sneddon, *The distribution of surface stress necessary to produce a penny-shaped crak of prescribed shape*, Int. J. Engng. Sci., 7, 863–873, 1969.
8. G. Szefer, *Solution of certain dual integral equations*, Arch. Mech. Stos., **16**, 4, 1964.
9. I. N. Sneddon, *Mixed boundary value problems in potential theory*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1966.
10. I. N. Sneddon, *The use of transform methods in elasticity*, Technical Report AFOSR 64–1789 University of North Carolina at Raleigh, 6, 1964.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТРЕЩИНЫ В МИКРОПОЛЯРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В рамках линейной теории несимметричной упругости [1] рассмотрено упругое пространство, ослабленное трещиной. Предполагается, что тело находится в плоском деформационном состоянии, описываемом векторами: перемещения $\mathbf{u}(x_1, x_2)=(u_1, u_2, 0)$ и вращения $\boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2)=(0, 0, \varphi_3)$. В первой из рассматриваемых в работе задач, принимая, что известна форма до которой расширена трещина и распределение вращений на ней (граничные условия (2.2)), определены распределение перемещений, вращений и напряжений в целом пространстве. Обсуждены два частных случая, в которых предположено, что $\varphi_3(0, x_2)=0$ для $x_2 \in R$ и в первом случае $u_1(0, x_2)=\varepsilon_1\sqrt{1-x_2^2/a}\,H(a-|x_2|)$ (эллимптическая форма трещины), а во втором случае $u_1(0, x_2)=\varepsilon_1\left(1-\dfrac{x_2^2}{a_2}\right)H(a-|x_2|)$ (трещина о форме двух симметричных по отнишению к оси $0x_1$ парабол). Во второй из рассматриваемых задач принято, что известна форма трещины (перемещение $u_1(0, x_2)=w(x_2)\,H(a-|x_2|)$, моментное напряжение $\mu_{13}(0, x_2)=0$ для $x_2 \in \langle -a, a\rangle$, вращение $\varphi_3(0, x_2)=0$ для $|x_2| \geqslant a$ и напряжение $\sigma_{12}(0, x_2)=0$). Эта задача сведена к парным интегральным уравнениям (5.5), а затем к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода (5.13). Результаты, полученные в работе, сравнены с результатами для соответствующих задач рассматриваемых в рамках классической теории упругости.

Summary

ON CERTAIN CRACK PROBLEMS IN A MICROPOLAR SPACE

In a frame of linear asymmetric theory of elasticity the elastic space weakened by c crack is considered. It is assumed that a body is in a plane strain of state described by the displacement vector $\mathbf{u}(x_1, x_2)=(u_1, u_2, 0)$ and rotation $\boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2)=(0, 0, \varphi_3)$.

Two boundary-value problems are considered. Assuming in the first problem that both, the shape of the crack in a deformed state, and the distribution of the rotations along the crack boundary are known [the boundary conditions (2.2)], the distribution of the displacements, rotations and stresses in a whole space are determined. Two particular cases, in which $\varphi_3(0, x_2)=0$ for $x_2 \in R$ is assumed, are disscussed in detail: the first case with $u_1(0, x_2)=\varepsilon_1\sqrt{1-x_2^2/a^2}\;H(a-|x_2|)$ (eliptic shape of a crack) and the second case with $u_1(0, x_2)=\varepsilon_1\left(1-\dfrac{x_2^2}{a_2}\right)H(a-|x_2|)$, (a crack having a shape of two parabolas symmetric with respect to $0x_1$ axis). In a second problem the shape of crack (displacement $u_1(0, x_2)=w(x_2)\,H(a-|x_2|)$, the couple stress $\mu_{13}(0, x_2)=0$ for $x_2 \in \langle -a, a\rangle$, the rotation $\varphi_3(0, x_2)=0$ for $|x_2|>a$ and the stress $\sigma_{12}(0, x_2)=0$ are assumed to be known. This problem was reduced, first to the dual integral equations (5.5), and then to the Fredholm integral equations of the second kind (5.13). The results obtained are compared with the solutions of the corresponding problem considered in a frame of the classical theory of elasticity.

INSTYTUT MECHANIKI UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 października 1975 r.