

OBROTOWO-SYMETRYCZNE WYMUSZONE DRGANIA TŁUMIONE POWŁOKI STOŻKOWEJ Z MATERIAŁU ŚCIŚLIWEGO NIELINIOWO SPRĘŻYSTEGO

FERDYNAND TWARDOSZ I TADEUSZ WEGNER (POZNAŃ)

W pracy poddano analizie obrotowo-symetryczne wymuszone drgania tłumione cienkiej powłoki stożkowej ze ściętym wierzchołkiem, swobodnie podpartej na obu krawędziach, wykonanej z materiału jednorodnego, izotropowego, nieliniowo sprężystego i ściśliwego. Ograniczono się do analizy małych drgań co pozwoliło zastosować liniowe związki geometryczne. Uzyskano układ dwu nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych czwartego rzędu, który sprowadzono do równań zwyczajnych za pomocą metody Bubnowa-Galerkina i rozwiązano metodą małego parametru ograniczając się do drugiego przybliżenia. Uzyskane rozwiązania ilustrujące wpływ nieliniowości sprężystej na drgania powłoki przedstawiono w postaci graficznej.

W pracy zajmiemy się zagadnieniem drgań cienkiej powłoki stożkowej wykonanej z materiału nieliniowo sprężystego, jednorodnego, izotropowego i ściśliwego, dla którego zależność pomiędzy naprężeniami i odkształceniami jest nieliniowa, ale odwracalna. Rozpatrzymy problem obrotowo-symetrycznych tłumionych drgań wymuszonych o małej amplitudzie przy obciążeniu wymuszającym okresowym, działającym prostopadle do powierzchni środkowej powłoki. Wszystkie związki geometryczne przyjmujemy w postaci liniowej, zakładając przy tym stosowalność hipotezy Kirchhoffa-Love'a.

Uwzględnimy również własności tłumiące materiału, które m.in. objawiają się istnieniem pętli histerezy sprężystej. Wielkość pola pętli histerezy jest proporcjonalna do energii właściwej rozproszonej w ciągu jednego cyklu obciążenia. To rozproszenie jest jedną z przyczyn tłumienia drgań sprężystych.

Zagadnienie tłumienia przy drganiach swobodnych i wymuszonych było przedmiotem prac wielu badaczy i nie jest dotychczas całkowicie wyjaśnione. Złożoność procesów zachodzących przy rozpraszaniu energii podczas drgań, a także wielu czynników towarzyszących temu zjawisku, których uwzględnienie przy budowaniu rozwiązań zagadnień dynamicznych napotyka na duże trudności natury matematycznej, było przyczyną wprowadzenia szeregu modeli zastępczych, opisujących efekty tłumienia i dających się stosować do różnych materiałów (por. [2, 5, 7, 12 i 15] i inne). Każdemu modelowi odpowiada pewien kształt i szerokość pętli histerezy, uzależnionej od odkształcenia, a niekiedy i od prędkości odkształcenia.

W pracy posłużono się hipotezą E. S. SOROKINA, który przyjmuje eliptyczny kształt pętli histerezy; jest to hipoteza prosta i dość dobrze zgadzająca się z doświadczeniem (omówiona jest ona wyczerpująco w pracy [15]).

Zagadnienia drgań płyt i powłok z materiałów nieliniowo sprężystych analizowane były w licznych pracach ([4, 8, 9, 10, 11] i inne). W artykułach [10 i 11] rozpatrywano wymuszone drgania tłumione małowyniosłych powłok. Uzyskano rozwiązania w postaci związku między częstością siły wymuszającej a amplitudą drgań dla powłok wykonanych z materiału nieściśliwego.

W pracy [4] badano małe obrotowo-symetryczne drgania powłoki stożkowej z materiału ściśliwego nieliniowo sprężystego. Zadanie rozwiązano posługując się wariacyjną zasadą Hamiltona-Ostrogradskiego oraz metodą Rayleigha-Ritza. Nie uwzględniono zjawiska rozpraszania energii, a uzyskane rozwiązanie, w którym pominięto wpływ stycznych sił bezwładności, zilustrowano wykresem rezonansowym dla różnych wartości okresowej siły wymuszającej.

1. PODSTAWOWE RÓWNANIA I WZORY

Równania opisujące obrotowo-symetryczne drgania wymuszone powłoki stożkowej mają postać [16 i 18]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial s} s - N_2 = 2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} s, \\ 2 \frac{\partial M_1}{\partial s} + \frac{\partial^2 M_1}{\partial s^2} s - \frac{\partial M_2}{\partial s} + N_2 \operatorname{tg} \alpha = \left(-2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_z \right) s, \end{aligned}$$

gdzie symbole N_1, N_2, M_1, M_2 oznaczają odpowiednio siły normalne i momenty zginające odniesione do jednostki długości powierzchni środkowej, p_z składową obciążenia zewnętrznego, działającą w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej, $u(s, t), w(s, t)$ składowe przemieszczenia punktów powierzchni środkowej odpowiednio w kierunkach stycznym i normalnym, s odległość dowolnego punktu powłoki od wierzchołka stożka, α kąt pomiędzy normalną do powierzchni środkowej i osią powłoki, $2h$ grubość powłoki oraz ρ gęstość materiału powłoki.

Zgodnie z hipotezą Kirchhoffa-Love'a składowe obrotowo-symetrycznego stanu odkształcenia w kierunkach podłużnym i obwodowym warstwy odległej o z od powierzchni środkowej wyrażają się wzorami

$$(1.2) \quad \varepsilon_{iz} = \varepsilon_i + z\kappa_i, \quad i = 1, 2,$$

gdzie

$$(1.3) \quad \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{s} (u + w \operatorname{tg} \alpha)$$

są składowymi stanu odkształcenia powierzchni środkowej powłoki, a wzory

$$(1.4) \quad \kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s}$$

określają zmiany głównych krzywizn.

Założenie cienkościenności powłoki pozwala tak samo jak w teorii płyt cienkich pomijać naprężenia σ_{3z} jako wartość małą, co jest równoważne założeniu, iż ele-

menty powłoki znajdują się w dwuwymiarowym stanie naprężenia; stąd z uogólnionego prawa Hooke'a, przyjmując $\sigma_{3z} = 0$, dostaniemy

$$(1.5) \quad \varepsilon_{3z} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{1z} + \varepsilon_{2z}).$$

Zajmiemy się z kolei określeniem składowych stanu naprężenia. Potencjał sprężystości ciała izotropowego przedstawia wyrażenie [3]

$$(1.6) \quad V = \frac{1}{2} K \theta^2 + \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i,$$

gdzie

$$(1.7) \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

oznacza moduł ściśliwości, a

$$(1.8) \quad \theta = \varepsilon_{1z} + \varepsilon_{2z} + \varepsilon_{3z}$$

jest względną zmianą objętości oraz ε_i intensywnością odkształceń i σ_i intensywnością naprężeń. Nieliniowy związek pomiędzy intensywnością odkształceń a intensywnością naprężeń napiszemy w postaci

$$(1.9) \quad \sigma_i = E(1 - b\varepsilon_i^2)\varepsilon_i,$$

gdzie b jest stałą zależną od materiału. Tego rodzaju zależność bardzo dobrze aproksymuje rzeczywisty charakter krzywej $\sigma_i - \varepsilon_i$ dla wielu technicznie ważnych materiałów (miedzi, aluminium, stopów miedzi itp.).

Dla płaskiego stanu naprężenia, uwzględniając związek (1.5), uzyskamy

$$(1.10) \quad \theta = \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{1z} + \varepsilon_{2z})$$

oraz

$$(1.11) \quad \varepsilon_i^2 = \frac{4}{3} \left[\nu_1 (\varepsilon_{1z}^2 + \varepsilon_{2z}^2) + \nu_2 \varepsilon_{1z} \varepsilon_{2z} + \frac{1}{4} \nu_0 \gamma_{12z}^2 \right],$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

$$(1.12) \quad \nu_1 = \frac{1}{3} \left[\frac{\nu}{(1-\nu)^2} + 1 \right] \nu_0, \quad \nu_2 = \frac{1}{3} \left[\frac{2\nu}{(1-\nu)^2} - 1 \right] \nu_0,$$

$$(1.13) \quad \nu_0 = \frac{3}{2(1+\nu)}.$$

Dla drgań obrotowo-symetrycznych podłużnych i poprzecznych $\gamma_{12z} = 0$. Wykorzystując wzory (1.2) mamy ostatecznie

$$(1.14) \quad \varepsilon_i^2 = \frac{4}{3} (a_0 + z a_1 + z^2 a_2),$$

przy czym

$$(1.15) \quad \begin{aligned} a_0 &= \nu_1 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \nu_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2, \\ a_1 &= 2\nu_1 (\varepsilon_1 \kappa_1 + \varepsilon_2 \kappa_2) + \nu_2 (\varepsilon_1 \kappa_2 + \varepsilon_2 \kappa_1), \\ a_2 &= \nu_1 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + \nu_2 \kappa_1 \kappa_2. \end{aligned}$$

Dla wymienionych materiałów nieliniowy związek między naprężeniem σ a podłużnym odkształceniem ε przy jednoosiowym rozciąganiu (ściskaniu) bardzo dobrze aproksymuje wzór

$$(1.16) \quad \varepsilon = \frac{1}{E} (1 + a_3 \sigma^2) \sigma.$$

Współczynnik a_3 jest stałą materiałową wyznaczaną doświadczalnie, określającą nieliniowość sprężystą materiału. Między stałą b w równaniu (1.9) a współczynnikiem a_3 zachodzi związek [3]

$$(1.17) \quad b = a_3 E^2 \nu_0^2.$$

Moduł Younga E i współczynnik Poissona ν , występujące w powyższych wzorach, są stałymi materiałowymi wyznaczonymi przy małych odkształceniach.

Pochodne cząstkowe funkcji $V(\varepsilon_{1z}, \varepsilon_{2z})$ określają składowe stanu naprężenia:

$$(1.18) \quad \sigma_{iz} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{iz}}, \quad i=1, 2,$$

stąd

$$(1.19) \quad \begin{aligned} \sigma_{iz} &= \frac{4}{3} E [\nu_3 \varepsilon_i + \nu_4 \varepsilon_j + z(\nu_3 \kappa_i + \nu_4 \kappa_j)] - \frac{16}{9} E b \left\{ a_0 \left(\nu_1 \varepsilon_i + \frac{1}{2} \nu_2 \varepsilon_j \right) + \right. \\ &+ z \left[a_0 \left(\nu_1 \kappa_i + \frac{1}{2} \nu_2 \kappa_j \right) + a_1 \left(\nu_1 \varepsilon_i + \frac{1}{2} \nu_2 \varepsilon_j \right) \right] + z^2 \left[a_1 \left(\nu_1 \kappa_i + \frac{1}{2} \nu_2 \kappa_j \right) + \right. \\ &\left. \left. + a_2 \left(\nu_1 \varepsilon_i + \frac{1}{2} \nu_2 \varepsilon_j \right) \right] + z^3 a_2 \left(\nu_1 \kappa_i + \frac{1}{2} \nu_2 \kappa_j \right) \right\}, \quad (i, j) = (1, 2), (2, 1), \end{aligned}$$

gdzie

$$(1.20) \quad \nu_3 = \nu_1 + \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)^2}, \quad \nu_4 = \frac{1}{2} \nu_2 + \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)^2}.$$

Przejdziemy teraz do określenia wielkości charakteryzujących własności tłumiące materiału.

Związek pomiędzy naprężeniem i odkształceniem dla liniowego modelu tłumienia w jednoosiowym stanie naprężenia ma według hipotezy SOROKINA [15] następującą postać:

$$(1.21) \quad \bar{\sigma} = E\varepsilon + \frac{\psi}{2\pi} E\varepsilon_0 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2}},$$

gdzie ψ jest współczynnikiem tłumienia materiałowego, a ε_0 amplitudą odkształcenia.

Zakładając, że ruch drgający jest w przybliżeniu harmoniczny i jego częstość wynosi ω , możemy wzór (1.21) napisać w postaci

$$(1.22) \quad \bar{\sigma} = E\varepsilon + \frac{\eta}{\omega} E \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \sigma + \frac{\eta}{\omega} \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

gdzie

$$(1.23) \quad \eta = \frac{\psi}{2\pi}.$$

Ta liniowa zależność została wyprowadzona przez G. BOKA [1] dla ustalonych drgań wymuszonych i do takich ograniczymy nasze rozwiązanie. Poza tym przyjmemy, że współczynnik tłumienia materiałowego jest wielkością stałą i nie zależy ani od częstości drgań, ani od amplitudy odkształcenia [1 i 15]. Jest to założenie przybliżone, ale zupełnie wystarczające dla drgań o niewielkich amplitudach odkształcenia (zagadnienie geometrycznie liniowe).

W przypadku płaskiego stanu naprężenia mamy

$$(1.24) \quad \bar{\sigma}_{iz} = \sigma_{iz} + \frac{\eta}{\omega} \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial t}, \quad i=1, 2.$$

W dalszym ciągu ze względu na złożoność problemu ograniczymy rozważania do wyrazów liniowych w drugich składnikach sumy (1.24).

Po uwzględnieniu własności tłumiących materiału składowe stanu naprężenia wyrażają wzory

$$(1.25) \quad \bar{\sigma}_{iz} = \sigma_{iz} + \frac{\eta}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{4}{3} E [v_3 \varepsilon_i + v_4 \varepsilon_j + z(v_3 \kappa_i + v_4 \kappa_j)] \right\}, \quad (i, j) = (1, 2), (2, 1).$$

Dla cienkich powłok siły i momenty działające w przekrojach powłoki na jednostkę długości powierzchni środkowej związane są (w przybliżeniu) z naprężeniami zależnościami

$$(1.26) \quad N_i = \int_{-h}^h \bar{\sigma}_{iz} dz, \quad M_i = - \int_{-h}^h \bar{\sigma}_{iz} z dz, \quad i=1, 2;$$

stąd po wykonaniu całkowania mamy

$$(1.27) \quad N_i = \bar{B}(v_3 \varepsilon_i + v_4 \varepsilon_j) + \frac{\eta}{\omega} \bar{B} \frac{\partial}{\partial t} (v_3 \varepsilon_i + v_4 \varepsilon_j) - \bar{B}_1 a_0 \left(v_1 \varepsilon_i + \frac{1}{2} v_2 \varepsilon_j \right) - \bar{B}_2 \left[a_1 \left(v_1 \kappa_i + \frac{1}{2} v_2 \kappa_j \right) + a_2 \left(v_1 \varepsilon_i + \frac{1}{2} v_2 \varepsilon_j \right) \right],$$

$$M_i = -\bar{D}(v_3 \kappa_i + v_4 \kappa_j) - \frac{\eta}{\omega} \bar{D} \frac{\partial}{\partial t} (v_3 \kappa_i + v_4 \kappa_j) + \bar{B}_2 \left[a_0 \left(v_1 \kappa_i + \frac{1}{2} v_2 \kappa_j \right) + a_1 \left(v_1 \varepsilon_i + \frac{1}{2} v_2 \varepsilon_j \right) \right] + \bar{B}_3 a_2 \left(v_1 \kappa_i + \frac{1}{2} v_2 \kappa_j \right), \quad (i, j) = (1, 2), (2, 1),$$

gdzie

$$(1.28) \quad \bar{B} = \frac{8}{3} Eh, \quad \bar{D} = \frac{8}{9} Eh^3, \quad \bar{B}_1 = \frac{32}{9} Ebh, \quad \bar{B}_2 = \frac{32}{27} Ebh^3, \quad \bar{B}_3 = \frac{32}{45} Ebh^5.$$

Jeżeli podstawimy powyższe zależności do układu równań (1.1), a występujące w nich wielkości $a_0, a_1, a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \kappa_1, \kappa_2$ wyrazimy przez u i w za pomocą wzorów (1.15), (1.3) i (1.4), to otrzymamy poszukiwane równania obrotowo-symetrycznych drgań powłoki stożkowej w następującej postaci:

$$(1.29) \quad R_1 [u, v, w] + \frac{\eta}{\omega} \bar{B} \frac{\partial}{\partial t} \left[v_3 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \left(v_3 \frac{\partial u}{\partial s} + v_4 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial w}{\partial s} \right) - \frac{1}{s^2} v_3 (u + \operatorname{tg} \alpha w) \right] = 2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$R_2 [u, v, w] + \frac{\eta}{\omega} \bar{B} \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{s} v_4 \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{s^2} v_3 (u + \operatorname{tg} \alpha w) \right] + \frac{\eta}{\omega} \bar{D} v_3 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \frac{2}{s} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{s^3} \frac{\partial w}{\partial s} \right) = -2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_z,$$

gdzie R_i ($i=1, 2$) są nieliniowymi operatorami różniczkowymi stopnia trzeciego, których ze względu na bardzo dużą ilość składników nie przytaczamy. Jeżeli przyjmiemy, że p_z oraz η są równe zeru, to uzyskamy układ równań opisujący drgania swobodne nietłumione, który w pełnej postaci przedstawiono w pracy [17].

2. PRZYBLIŻONE CAŁKOWANIE RÓWNAŃ RUCHU

Układ równań (1.29) scałkujemy w sposób przybliżony metodą Bubnowa-Galerkina. W przypadku powłoki stożkowej z wierzchołkiem ściętym o swobodnie podpartych krawędziach obieramy funkcje u i w w postaci szeregów

$$(2.1) \quad u(s, t) = \sum_{m=1}^{\infty} U_m(t) f_m(s), \quad w(s, t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(t) g_m(s),$$

gdzie $U_m(t)$, $W_m(t)$ są nieznanymi funkcjami czasu, natomiast $f_m(s)$ i $g_m(s)$ przyjmujemy w postaci

$$(2.2) \quad f_m(s) = \cos \frac{m\pi(s-s_1)}{l}, \quad g_m(s) = \sin \frac{m\pi(s-s_1)}{l}.$$

Funkcje (2.2) spełniają tylko kinematyczne warunki na brzegach powłoki, natomiast warunki statyczne są spełnione w przybliżeniu. Dla małych zbieżności stożka ($\alpha > 70^\circ$) aproksymacja funkcjami (2.2) jest wystarczająco dokładna.

Po wykonaniu całkowań i uporządkowaniu oraz wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych

$$(2.3) \quad X = \frac{U_m}{l}, \quad Z = \frac{W_m}{l}, \quad \tau = \omega t, \quad \theta = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad Q = \frac{p_z}{p_0},$$

gdzie $\omega_0 = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $p_0 = \chi E$, $\chi = \frac{2h}{l}$ oraz gdzie Q jest bezwymiarową siłą wymuszającą, a θ bezwymiarową częstością drgań wymuszonych, otrzymamy

dla każdego m dwa nieliniowe równania różniczkowe zwyczajne względem funkcji X, Z :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \theta^2 \frac{d^2 X}{d\tau^2} + \beta_0 X - \beta_1 Z &= b(\beta_2 X^3 - \beta_3 X^2 Z + \beta_4 X Z^2 - \beta_5 Z^3) - \\ &- \eta \left(\beta_0 \frac{dX}{d\tau} - \beta_1 \frac{dZ}{d\tau} \right), \\ \theta^2 \frac{d^2 Z}{d\tau^2} + \gamma_0 Z - \gamma_1 X &= b(-\gamma_2 X^3 + \gamma_3 X^2 Z - \gamma_4 X Z^2 + \gamma_5 Z^3) - \\ &- \eta \left(\gamma_0 \frac{dZ}{d\tau} - \gamma_1 \frac{dX}{d\tau} \right) + \gamma_6 Q(\tau). \end{aligned}$$

Współczynniki β_i, γ_i ($i=0, 1, 2, \dots, 5$) zależą od następujących parametrów: m, χ, β, μ i ν , przy czym $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\mu = \frac{R_1}{l}$. Szczegółową ich postać podano w pracy [17]. Współczynnik

$$\gamma_6 = \frac{d_{13}}{d_1},$$

gdzie

$$\begin{aligned} d_1 &= 1 + \frac{5}{2}k + \frac{10}{3} \left(1 - \frac{3}{2p^2} \right) k^2 + \frac{5}{2} \left(1 - \frac{3}{p^2} \right) k^3 + \\ &+ \left(1 - \frac{5}{p^2} + \frac{15}{2p^4} \right) k^4 + \frac{1}{6} \left(1 - \frac{15}{2p^2} + \frac{45}{2p^4} \right) k^5, \\ d_{13} &= (-1)^{m+1} \frac{2}{p} \left\{ 1 + (-1)^{m+1} + 5k + 10 \left[1 - \frac{2}{p^2} (1 + (-1)^{m+1}) \right] k^2 + \right. \\ &+ 10 \left(1 - \frac{6}{p^2} \right) k^3 + 5 \left[1 - \frac{12}{p^2} + \frac{24}{p^4} (1 + (-1)^{m+1}) \right] k^4 + \\ &\left. + \left(1 - \frac{20}{p^2} + \frac{120}{p^4} \right) k^5 \right\}, \\ p &= m\pi, \quad k = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\mu}. \end{aligned}$$

Założmy, że powłoka stożkowa poddana jest działaniu harmonicznie zmiennego wymuszenia

$$(2.5) \quad Q(\tau) = Q \cos(\tau + \vartheta) = Q_c \cos \tau - Q_s \sin \tau, \quad Q > 0,$$

gdzie ϑ jest przesunięciem fazowym między funkcją wymuszającą a rozwiązaniem, co uwzględniają amplitudy składowych -cosinusowej i sinusowej funkcji wymuszającej,

$$(2.6) \quad Q_c = Q \cos \vartheta, \quad Q_s = Q \sin \vartheta.$$

Oczywiście amplitudy składowych funkcji wymuszającej spełniają warunek

$$(2.7) \quad Q_c^2 + Q_s^2 = Q^2.$$

Ponieważ poszukujemy rozwiązania dla stanu ustalonego, więc przyjęliśmy, że częstość drgań układu równa jest częstości siły wymuszającej.

Zajmiemy się z kolei wyznaczeniem drgań wymuszonych, opisanych układem równań (2.4). Zastosujemy do rozwiązania metodę małego parametru [6 i 13]. W tym celu pomnożymy prawe strony równań (2.4) przez bezwymiarowy parametr ε :

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \theta^2 \frac{d^2 X}{d\tau^2} + \beta_0 X - \beta_1 Z = \varepsilon & \left[b(\beta_2 X^3 - \beta_3 X^2 Z + \beta_4 X Z^2 - \beta_5 Z^3) - \right. \\ & \left. - \eta \left(\beta_0 \frac{dX}{d\tau} - \beta_1 \frac{dZ}{d\tau} \right) \right], \\ \theta^2 \frac{d^2 Z}{d\tau^2} + \gamma_0 Z - \gamma_1 X = \varepsilon & \left[b(-\gamma_2 X^3 + \gamma_3 X^2 Z - \gamma_4 X Z^2 + \gamma_5 Z^3) - \right. \\ & \left. - \eta \left(\gamma_0 \frac{dZ}{d\tau} - \gamma_1 \frac{dX}{d\tau} \right) + \gamma_6 Q(\tau) \right]. \end{aligned}$$

Rozwiązania układu (2.8) poszukiwać będziemy w postaci rozwinięć

$$(2.9) \quad \begin{aligned} X = X_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i X_i, \quad Z = Z_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i Z_i, \quad \theta^2 = \theta_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \theta_i, \\ Q_c = Q_{c_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i Q_{c_i}, \quad Q_s = Q_{s_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i Q_{s_i}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu szeregów (2.9) do układu (2.8) i rozwinięciu lewej i prawej strony równań w szeregi względem potęg parametru oraz przyrównaniu do siebie wyrazów stojących przy tych samych potęgach, uzyskamy rekurencyjne układy równań różniczkowych (w obliczeniach ograniczymy się do potęg ε nie przekraczających drugiej):

$$(2.10) \quad \theta_0^2 \frac{d^2 X_0}{d\tau^2} + \beta_0 X_0 - \beta_1 Z_0 = 0, \quad \theta_0^2 \frac{d^2 Z_0}{d\tau^2} + \gamma_0 Z_0 - \gamma_1 X_0 = 0;$$

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \theta_0^2 \frac{d^2 X_1}{d\tau^2} + \beta_0 X_1 - \beta_1 Z_1 = -\theta_1 \frac{d^2 X_0}{d\tau^2} + b(\beta_2 X_0^3 - \beta_3 X_0^2 Z_0 + \\ + \beta_4 X_0 Z_0^2 - \beta_5 Z_0^3) - \eta \left(\beta_0 \frac{dX_0}{d\tau} - \beta_1 \frac{dZ_0}{d\tau} \right), \\ \theta_0^2 \frac{d^2 Z_1}{d\tau^2} + \gamma_0 Z_1 - \gamma_1 X_1 = -\theta_1 \frac{d^2 Z_0}{d\tau^2} + b(-\gamma_2 X_0^3 + \gamma_3 X_0^2 Z_0 - \\ - \gamma_4 X_0 Z_0^2 + \gamma_5 Z_0^3) - \eta \left(\gamma_0 \frac{dZ_0}{d\tau} - \gamma_1 \frac{dX_0}{d\tau} \right) + Q_{c_0} \gamma_6 \cos \tau - Q_{s_0} \gamma_6 \sin \tau; \end{aligned}$$

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \theta_0^2 \frac{d^2 X_2}{d\tau^2} + \beta_0 X_2 - \beta_1 Z_2 = -\theta_2 \frac{d^2 X_0}{d\tau^2} - \theta_1 \frac{d^2 X_1}{d\tau^2} + b [3\beta_2 X_0^2 X_1 - \\ - \beta_3 (X_0^2 Z_1 + 2X_0 X_1 Z_0) + \beta_4 (X_1 Z_0^2 + 2X_0 Z_0 Z_1) - 3\beta_5 Z_0^2 Z_1] - \\ - \eta \left(\beta_0 \frac{dX_1}{d\tau} - \beta_1 \frac{dZ_1}{d\tau} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_0^2 \frac{d^2 Z_2}{d\tau^2} + \gamma_0 Z_2 - \gamma_1 X_2 = -\theta_2 \frac{d^2 Z_0}{d\tau^2} - \theta_1 \frac{d^2 Z_1}{d\tau^2} + b [-3\gamma_2 X_0^2 X_1 + \\ + \gamma_3 (X_0^2 Z_1 + 2X_0 X_1 Z_0) - \gamma_4 (X_1 Z_0^2 + 2X_0 Z_0 Z_1) + 3\gamma_5 Z_0^2 Z_1] - \\ - \eta \left(\gamma_0 \frac{dZ_1}{d\tau} - \gamma_1 \frac{dX_1}{d\tau} \right) + Q_{c_1} \gamma_6 \cos \tau - Q_{s_1} \gamma_6 \sin \tau. \end{aligned}$$

Poszukujemy zatem rozwiązania w otoczeniu częstości własnych θ_0 układu zlinearyzowanego ($b=0$).

Niech funkcja $Z(\tau)$ spełnia warunki początkowe

$$(2.13) \quad Z(0) = B \text{ oraz } \dot{Z}(0) = 0, \quad \text{gdzie } B > 0;$$

wtedy

$$Z_0(0) = B, \quad Z_1(0) = 0, \quad Z_2(0) = 0, \dots$$

oraz

$$\dot{Z}_0(0) = 0, \quad \dot{Z}_1(0) = 0, \quad \dot{Z}_2(0) = 0, \dots;$$

kropka oznacza pochodną funkcji względem bezwymiarowego czasu. Dla jednoczęściowych drgań wymuszonych warunki początkowe dla funkcji $X(\tau)$ zależą od warunków dla funkcji $Z(\tau)$ i wynikają z rozwiązania zagadnienia.

Rozwiązania szczególnego układu równań (2.10) poszukujemy w postaci

$$(2.14) \quad X_0 = C_1 \cos \tau + \bar{C}_1 \sin \tau, \quad Z_0 = D_1 \cos \tau + \bar{D}_1 \sin \tau.$$

Podstawiając założone rozwiązanie do (2.10) uzyskamy dwa algebraiczne układy równań

$$(2.15) \quad \begin{cases} (\beta_0 - \theta_0^2) C_1 - \beta_1 D_1 = 0, \\ -\gamma_1 C_1 + (\gamma_0 - \theta_0^2) D_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (\beta_0 - \theta_0^2) \bar{C}_1 - \beta_1 \bar{D}_1 = 0, \\ -\gamma_1 \bar{C}_1 + (\gamma_0 - \theta_0^2) \bar{D}_1 = 0. \end{cases}$$

Warunek istnienia niezerowego rozwiązania ma postać

$$(2.16) \quad \begin{vmatrix} \beta_0 - \theta_0^2 & -\beta_1 \\ -\gamma_1 & \gamma_0 - \theta_0^2 \end{vmatrix} = 0,$$

stąd

$$(2.17) \quad \theta_0^2 = \frac{\beta_0 + \gamma_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_0 - \gamma_0}{2}\right)^2 + \beta_1 \gamma_1}.$$

Układ (2.10) ma dwa szczególne rozwiązania harmoniczne o częstościach określonych wzorem (2.17). Pierwsza wyższa częstość (znak plus) odpowiada drganiom

podłużnym, druga niższa częstość (znak minus) drganiom poprzecznym powłoki. Rozważając drgania wymuszone obciążeniem normalnym do powierzchni środkowej powłoki organiczmy się do niższych częstości.

Po uwzględnieniu warunków początkowych (2.13) rozwiązanie szczególne ma postać

$$(2.18) \quad X_0 = \lambda B \cos \tau, \quad Z_0 = B \cos \tau,$$

gdzie

$$(2.19) \quad \lambda = \frac{\beta_1}{\beta_0 - \theta_0^2} = \frac{\gamma_0 - \theta_0^2}{\gamma_1}.$$

Po podstawieniu powyższego rozwiązania do układu (2.11) uzyskujemy układ równań

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \theta_0^2 \frac{d^2 X_1}{d\tau^2} + \beta_0 X_1 - \beta_1 Z_1 &= P_1 \cos \tau + P_2 \cos 3\tau + \bar{P}_1 \sin \tau, \\ \theta_0^2 \frac{d^2 Z_1}{d\tau^2} + \gamma_0 Z_1 - \gamma_1 X_1 &= R_1 \cos \tau + R_2 \cos 3\tau + \bar{R}_1 \sin \tau, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda B \theta_1 + 3bB^3 p_1, & P_2 &= bB^3 p_1, & \bar{P}_1 &= \eta B (\lambda \beta_0 - \beta_1), \\ R_1 &= B \theta_1 + 3bB^3 r_1 + Q_{c_0} \gamma_6, & R_2 &= bB^3 r_1, & \bar{R}_1 &= \eta B (\gamma_0 - \lambda \gamma_1) - Q_{s_0} \gamma_6, \\ p_1 &= \frac{1}{4} (\beta_2 \lambda^3 - \beta_3 \lambda^2 + \beta_4 \lambda - \beta_5), & r_1 &= \frac{1}{4} (-\gamma_2 \lambda^3 + \gamma_3 \lambda^2 - \gamma_4 \lambda + \gamma_5). \end{aligned}$$

Aby uzyskać periodyczne rozwiązanie powyższego układu, poszukujemy rozwiązania szczególnego w postaci

$$(2.21) \quad \begin{aligned} X_1 &= C_1 \cos \tau + C_2 \cos 3\tau + \bar{C}_1 \sin \tau + \bar{C}_2 \sin 3\tau, \\ Z_1 &= D_1 \cos \tau + D_2 \cos 3\tau + \bar{D}_1 \sin \tau + \bar{D}_2 \sin 3\tau, \end{aligned}$$

które po podstawieniu do (2.20) daje cztery algebraiczne układy równań

$$(2.22) \quad \begin{cases} (\beta_0 - \theta_0^2) C_1 - \beta_1 D_1 = P_1, \\ -\gamma_1 C_1 + (\gamma_0 - \theta_0^2) D_1 = R_1, \end{cases} \quad \begin{cases} (\beta_0 - 9\theta_0^2) C_2 - \beta_1 D_2 = P_2, \\ -\gamma_1 C_2 + (\gamma_0 - 9\theta_0^2) D_2 = R_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\beta_0 - \theta_0^2) \bar{C}_1 - \beta_1 \bar{D}_1 = \bar{P}_1, \\ -\gamma_1 \bar{C}_1 + (\gamma_0 - \theta_0^2) \bar{D}_1 = \bar{R}_1, \end{cases} \quad \begin{cases} (\beta_0 - 9\theta_0^2) \bar{C}_2 - \beta_1 \bar{D}_2 = 0, \\ -\gamma_1 \bar{C}_2 + (\gamma_0 - 9\theta_0^2) \bar{D}_2 = 0. \end{cases}$$

Wyznaczniki charakterystyczne układów równań (2.22)₁ i (2.22)₃ są równe zeru. Warunek istnienia rozwiązań układu (2.22)₁ ma więc postać

$$(2.23) \quad \begin{vmatrix} P_1, & -\beta_1 \\ R_1, & \gamma_0 - \theta_0^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_0 - \theta_0^2, & P_1 \\ -\gamma_1, & R_1 \end{vmatrix} = 0,$$

stąd

$$(2.24) \quad P_1 \lambda \gamma_1 + R_1 \beta_1 = 0.$$

Podobnie dla układu (2.22)₃

$$(2.25) \quad \bar{P}_1 \lambda \gamma_1 + \bar{R}_1 \beta_1 = 0.$$

Są to warunki okresowości rozwiązania, z których uzyskujemy wzory

$$(2.26) \quad Q_{c_0} = -B \vartheta_0 (\theta_1 + bB^2 \vartheta_1), \quad Q_{s_0} = \eta B \vartheta_0 \theta_0^2,$$

gdzie

$$\vartheta_0 = \frac{\lambda^2 \gamma_1 + \beta_1}{\beta_1 \gamma_6}, \quad \vartheta_1 = \frac{3(\lambda \gamma_1 p_1 + \beta_1 r_1)}{\lambda^2 \gamma_1 + \beta_1}.$$

Jeżeli przyjmiemy, że

$$(2.27) \quad Q_{c_0}^2 + Q_{s_0}^2 = Q_0^2,$$

gdzie Q_0 jest bliskie Q , to

$$(2.28) \quad \theta_1 = -bB^2 \vartheta_1^*,$$

przy czym

$$(2.29) \quad \vartheta_1^* = \vartheta_1 - \eta \vartheta^*, \quad \vartheta^* = \pm \frac{\theta_0^2}{bB^2} \sqrt{\left(\frac{B_{\max}}{B}\right)^2 - 1},$$

$$(2.30) \quad B_{\max} = \frac{S_0}{\vartheta_0 \theta_0^2}, \quad S_0 = \frac{Q_0}{\eta}.$$

Gwiazdkami oznaczono symbole, które są funkcjami bezwymiarowej amplitudy B drgań poprzecznych. Dla $B = B_{\max}$ mamy $\vartheta^* = 0$ oraz $\vartheta_1^* = \vartheta_1$. Wykorzystując wzory (2.28), (2.29) i (2.30) przedstawimy wzory (2.26) w postaci

$$(2.31) \quad Q_{c_0} = -\eta b B^3 \vartheta_0 \vartheta^*, \quad Q_{s_0} = Q_0 \frac{B}{B_{\max}}.$$

Oczywiście, jeżeli rozwiązanie ograniczymy do pierwszego przybliżenia, to

$$(2.32) \quad Q_c = Q_{c_0}, \quad Q_s = Q_{s_0}$$

oraz, z porównania związków (2.7) i (2.27),

$$(2.33) \quad Q_0 = Q;$$

stąd

$$(2.34) \quad B_{\max} = \frac{S}{\vartheta_0 \theta_0^2}, \quad \text{gdzie } S = \frac{Q}{\eta},$$

oraz ze wzorów (2.6)

$$(2.35) \quad \cos \vartheta = -\frac{bB^3 \vartheta_0 \vartheta^*}{S}, \quad \sin \vartheta = \frac{B}{B_{\max}}.$$

Częstość drgań w pierwszym przybliżeniu wyznaczmy ze wzoru

$$(2.36) \quad \theta^2 = \theta_0^2 - bB^2 \vartheta_1^*.$$

W powyższym rozwinięciu przyjęto $\varepsilon=1$, ponieważ tylko wtedy układy równań (2.8) i (2.4) są identyczne.

Dla $B=B_{\max}$ zachodzi zjawisko rezonansu. Wtedy kąt przesunięcia fazowego $\vartheta=90^\circ$. Związek między amplitudą drgań krytycznych B_{\max} a częstotliwością krytyczną θ_k wyraża równanie

$$(2.37) \quad \theta_k^2 = \theta_0^2 - bB_{\max}^2 \vartheta_1.$$

Dla każdej wartości $B < B_{\max}$ otrzymamy z równania (2.36) dwie rzeczywiste wartości θ^2 , które leżą po obu stronach linii szkieletowej

$$(2.38) \quad \theta^2 = \theta_0^2 - bB^2 \vartheta_1$$

w jednakowych od niej odległościach. Znak plus w wyrażeniu ϑ^* odpowiada więc drganiom nadkrytycznym (o większej z dwu możliwych częstotliwości), minus — podkrytycznym (o mniejszej częstotliwości).

Ze wzorów (2.35) wynika, iż drganiom nadkrytycznym odpowiada kąt przesunięcia fazowego $\vartheta > 90^\circ$, drganiom podkrytycznym odpowiada $\vartheta < 90^\circ$. Dla danej wartości B kąty przesunięcia fazowego rozłożone są symetrycznie względem wartości $\vartheta=90^\circ$ i zbliżają się do niej ze wzrostem stosunku B/B_{\max} .

Dla wyznaczonej wartości θ_1 równania układów (2.22)₁ i (2.22)₃ są liniowo zależne. Układy równań (2.22) zawierają więc sześć liniowo niezależnych równań. Uwzględniając warunki początkowe (2.13) uzyskujemy dwa brakujące równania.

Rozwiązanie szczególne układu (2.20) ma postać

$$(2.39) \quad \begin{aligned} X_1 &= bB^3 (x_1^* \cos \tau + x_2 \cos 3\tau) + \eta B \bar{x}_1 \sin \tau, \\ Z_1 &= bB^3 z_1 (\cos 3\tau - \cos \tau), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} x_1^* &= \lambda \left(\frac{3p_1 - \lambda \vartheta_1^*}{\beta_1} - z_1 \right), & \bar{x}_1 &= \frac{\lambda^2 \theta_0^2}{\beta_1}, \\ x_2 &= \frac{e_2 p_1 + \beta_1 r_1}{e_1 e_2 - \beta_1 \gamma_1}, & z_1 &= \frac{\gamma_1 p_1 + e_1 r_1}{e_1 e_2 - \beta_1 \gamma_1}, \\ e_1 &= \beta_0 - 9\theta_0^2, & e_2 &= \gamma_0 - 9\theta_0^2. \end{aligned}$$

Po podstawieniu rozwiązań (2.17), (2.18), (2.28) i (2.39) do układu (2.12) otrzymujemy następujący układ równań:

$$(2.40) \quad \begin{aligned} \theta_0^2 \frac{d^2 X_2}{d\tau^2} + \beta_0 X_2 - \beta_1 Z_2 &= P_1 \cos \tau + P_2 \cos 3\tau + P_3 \cos 5\tau + \\ &+ \bar{P}_1 \sin \tau + \bar{P}_2 \sin 3\tau, \\ \theta_0^2 \frac{d^2 Z_2}{d\tau^2} + \gamma_0 Z_2 - \gamma_1 X_2 &= R_1 \cos \tau + R_2 \cos 3\tau + R_3 \cos 5\tau + \\ &+ \bar{R}_1 \sin \tau + \bar{R}_2 \sin 3\tau, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \lambda B \theta_2 + b^2 B^5 p_2^* - B \eta^2 \bar{x}_1 \beta_0, & P_2 &= b^2 B^5 p_3^*, & P_3 &= b^2 B^5 p_4, \\
 R_1 &= B \theta_2 + b^2 B^5 r_2^* + B \eta^2 \bar{x}_1 \gamma_1 + Q_{c_1} \gamma_6, & R_2 &= b^2 B^5 r_3^*, & R_3 &= b^2 B^5 r_4, \\
 \bar{P}_1 &= \eta b B^3 p_7^*, & \bar{P}_2 &= \eta b B^3 p_8, & \bar{R}_1 &= \eta b B^3 r_7^* - Q_{s_1} \gamma_6, & \bar{R}_2 &= \eta b B^3 r_8, \\
 p_2^* &= -x_1^* \vartheta_1^* + (3x_1^* + x_2) p_5 - 2z_1 p_6, & r_2^* &= z_1 \vartheta_1^* + (3x_1^* + x_2) r_5 - 2z_1 r_6, \\
 p_3^* &= -9x_2 \vartheta_1^* + (x_1^* + 2x_2) p_5 + z_1 p_6, & r_3^* &= -9z_1 \vartheta_1^* + (x_1^* + 2x_2) r_5 + z_1 r_6, \\
 p_4 &= x_2 p_5 + z_1 p_6, & r_4 &= x_2 r_5 + z_1 r_6, \\
 p_5 &= \frac{1}{4} (3\beta_2 \lambda^2 - 2\beta_3 \lambda + \beta_4), & r_5 &= \frac{1}{4} (-3\gamma_2 \lambda^2 + 2\gamma_3 \lambda - \gamma_4), \\
 p_6 &= \frac{1}{4} (-\beta_3 \lambda^2 + 2\beta_4 \lambda - 3\beta_5), & r_6 &= \frac{1}{4} (\gamma_3 \lambda^2 - 2\gamma_4 \lambda + 3\gamma_5), \\
 p_7^* &= \bar{x}_1 (p_5 - \vartheta_1^*) + x_1^* \beta_0 + z_1 \beta_1, & r_7^* &= \bar{x}_1 r_5 - x_1^* \gamma_1 - z_1 \gamma_0, \\
 p_8 &= \bar{x}_1 p_5 + 3(x_2 \beta_0 - z_1 \beta_1), & r_8 &= \bar{x}_1 r_5 - 3(x_2 \gamma_1 - z_1 \gamma_0).
 \end{aligned}$$

Rozwiązania szczególnego układu (2.40) poszukujemy w postaci

$$\begin{aligned}
 (2.41) \quad X_2 &= C_1 \cos \tau + C_2 \cos 3\tau + C_3 \cos 5\tau + \bar{C}_1 \sin \tau + \bar{C}_2 \sin 3\tau + \bar{C}_3 \sin 5\tau, \\
 Z_2 &= D_1 \cos \tau + D_2 \cos 3\tau + D_3 \cos 5\tau + \bar{D}_1 \sin \tau + \bar{D}_2 \sin 3\tau + \bar{D}_3 \sin 5\tau.
 \end{aligned}$$

Postępując analogicznie do postępowania w przypadku układu równań (2.20), otrzymujemy warunki okresowości

$$(2.42) \quad Q_{c_1} = -B \vartheta_0 (\theta_2 + b^2 B^4 \vartheta_2^* - \eta^2 \vartheta_3), \quad Q_{s_1} = \eta b B^3 \vartheta_0 \vartheta_4^*,$$

gdzie

$$\vartheta_2^* = \frac{\lambda \gamma_1 p_2^* + \beta_1 r_2^*}{\lambda^2 \gamma_1 + \beta_1}, \quad \vartheta_3 = \frac{\bar{x}_1 \lambda \gamma_1 \theta_0^2}{\lambda^2 \gamma_1 + \beta_1}, \quad \vartheta_4^* = \frac{\lambda \gamma_1 p_7^* + \beta_1 r_7^*}{\lambda^2 \gamma_1 + \beta_1}.$$

Dla drugiego przybliżenia mamy

$$(2.43) \quad Q_c = Q_{c_0} + Q_{c_1}, \quad Q_s = Q_{s_0} + Q_{s_1}.$$

Wykorzystując powyższe zależności w równaniu (2.7) i przedstawiając wielkości Q_{c_0} , Q_{s_0} , Q_{c_1} i Q_{s_1} za pomocą związków (2.31) i (2.42), otrzymamy

$$(2.44) \quad \theta_2 = -b^2 B^4 \vartheta_2^* + \eta^2 \vartheta_3 + \eta b B^2 (\vartheta^{**} - \vartheta^*),$$

gdzie

$$(2.45) \quad \vartheta^{**} = \pm \frac{1}{bB^2} \sqrt{\left(\frac{S}{B\vartheta_0}\right)^2 - (\theta_0^2 + bB^2 \vartheta_4^*)^2}, \quad S = \frac{Q}{\eta};$$

znak plus odpowiada drganiom nadkrytycznym, minus — podkrytycznym.

Ze wzrostem B maleje wyrażenie pod pierwiastkiem, dla $B = B_{\max}$ osiąga zero. Warunek ten posłuży do wyznaczenia amplitudy drgań krytycznych. Pod-

stawiając w miejsce B wyrażenie (2.30) dostaniemy następujące równanie stopnia trzeciego

$$(2.46) \quad Q = Q_0 + \frac{Q_0^3}{c},$$

gdzie $c = \frac{\eta^2 \vartheta_0^2 (\theta_0^2)^3}{b \vartheta_4}$, przy czym ϑ_4 jest wartością funkcji ϑ_4^* dla $B = B_{\max}$.

Dla $c > 0$ równanie to ma jeden pierwiastek rzeczywisty

$$(2.47) \quad Q_0 = \eta \vartheta_0 \theta_0^2 B_{\max},$$

gdzie

$$(2.48) \quad B_{\max} = \sqrt[3]{\frac{1}{b \vartheta_4} \left(\sqrt[3]{\frac{S}{2 \vartheta_0}} + \sqrt[3]{\left(\frac{S}{2 \vartheta_0}\right)^2 + \frac{1}{b \vartheta_4} \left(\frac{\theta_0^2}{3}\right)^3} \right) + \sqrt[3]{\frac{S}{2 \vartheta_0} - \sqrt[3]{\left(\frac{S}{2 \vartheta_0}\right)^2 + \frac{1}{b \vartheta_4} \left(\frac{\theta_0^2}{3}\right)^3}}}$$

Kąt przesunięcia fazowego oraz częstość drgań w drugim przybliżeniu określają wzory

$$(2.49) \quad \cos \vartheta = -\frac{b B^3 \vartheta_0 \vartheta^{**}}{S}, \quad \sin \vartheta = \frac{B \vartheta_0}{S} (\theta_0^2 + b B^2 \vartheta_4^*),$$

$$(2.50) \quad \theta^2 = \theta_0^2 - b B^2 \vartheta_1 - b^2 B^4 \vartheta_2^* + \eta^2 \vartheta_3 + \eta b B^2 \vartheta^{**}.$$

Zależność między amplitudą drgań krytycznych B_{\max} a częstością krytyczną θ_k określa równanie

$$(2.51) \quad \theta_k^2 = \theta_0^2 - b B_{\max}^2 \vartheta_1 - b^2 B_{\max}^4 \vartheta_2 + \eta^2 \vartheta_3,$$

gdzie ϑ_2 jest wartością funkcji ϑ_2^* dla $B = B_{\max}$.

Rozwiązanie układu (2.40) spełniające warunki początkowe ma postać

$$(2.52) \quad \begin{aligned} X_2 &= (b^2 B^5 x_3^* + \eta b B^3 x_{31}^* + \eta^2 B x_{32}) \cos \tau + b^2 B^5 x_4^* \cos 3\tau + \\ &\quad + b^2 B^5 x_5 \cos 5\tau + \eta b B^3 x_2^* \sin \tau + \eta b B^3 \bar{x}_3 \sin 3\tau, \\ Z_2 &= b^2 B^5 z_2^* (\cos 3\tau - \cos \tau) + b^2 B^5 z_3 (\cos 5\tau - \cos \tau) + \\ &\quad + \eta b B^3 \bar{z}_1 (\sin 3\tau - 3 \sin \tau), \end{aligned}$$

gdzie

$$x_3^* = \lambda \left(\frac{p_2^* - \lambda \vartheta_2^*}{\beta_1} - z_2^* - z_3 \right), \quad x_{31}^* = \frac{\lambda^2}{\beta_1} (\vartheta^{**} - \vartheta^*), \quad x_{32} = \frac{\lambda}{\beta_1} (\lambda \vartheta_3 - \bar{x}_1 \beta_0),$$

$$x_4^* = \frac{e_2 p_3^* + \beta_1 r_3^*}{e_1 e_2 - \beta_1 \gamma_1}, \quad x_5 = \frac{e_4 p_4 + \beta_1 r_4}{e_3 e_4 - \beta_1 \gamma_1}, \quad \bar{x}_2^* = \lambda \left(\frac{p_7^*}{\beta_1} - 3 \bar{z}_1 \right),$$

$$\bar{x}_3 = \frac{e_2 p_8 + \beta_1 r_8}{e_1 e_2 - \beta_1 \gamma_1}, \quad z_2^* = \frac{\gamma_1 p_3^* + e_1 r_3^*}{e_1 e_2 - \beta_1 \gamma_1}, \quad z_3 = \frac{\gamma_1 p_4 + e_3 r_4}{e_3 e_4 - \beta_1 \gamma_1},$$

$$\bar{z}_1 = \frac{\gamma_1 p_8 + e_1 r_8}{e_1 e_2 - \beta_1 \gamma_1}, \quad e_3 = \beta_0 - 25 \theta_0^2, \quad e_4 = \gamma_0 - 25 \theta_0^2.$$

Ograniczając się do drugiego przybliżenia uzyskamy poszukiwane rozwiązanie układu (2.4) dla harmonicznie zmiennego wymuszenia (2.5), spełniające warunki początkowe (2.13)

$$(2.53) \quad X = X_0 + X_1 + X_2, \quad Z = Z_0 + Z_1 + Z_2,$$

gdzie funkcje X_i , Z_i ($i=0, 1, 2$) są określone wzorami (2.18), (2.39) i (2.52).

Częstość drgań określa równanie (2.50), a kąt przesunięcia fazowego wzory (2.49). Amplitudę drgań krytycznych wyznacza wzór (2.48), a częstość krytyczną wzór (2.51).

Powyższe rozwiązanie jest szeregiem potęgowym ze względu na wielkości bB^2 , η . Aby szereg był szybko zbieżny, co umożliwi korzystanie z kilku jego pierwszych składników, wielkości te muszą być małe.

Na podstawie prób rozciągania [3] przy naprężeniach nie przewyższających 1000 kG/cm² uzyskano dla czystej miedzi wartość $b=0,323 \cdot 10^6$. Dla $B=0,001$ mamy $bB^2=0,323$. Współczynnik tłumienia dla miedzi [14] przy odkształceniach postaciowych o amplitudzie $\gamma=0,001$ ma wartość $\psi=0,33$; stąd, (1.23), $\eta=0,0525$.

Ograniczenia amplitudy drgań wynikają również z przyjęciem związków geometrycznych w postaci liniowej. Aby wartości współczynników oznaczonych gwiazdkami były ograniczone, zakładamy, że amplituda drgań B zbliżona jest do krytycznej. Wynika stąd, (2.34), że rozwiązanie opisuje drgania w otoczeniu rezonansu powłoki stożkowej poddanej działaniu harmonicznie zmiennego wymuszenia o małej amplitudzie.

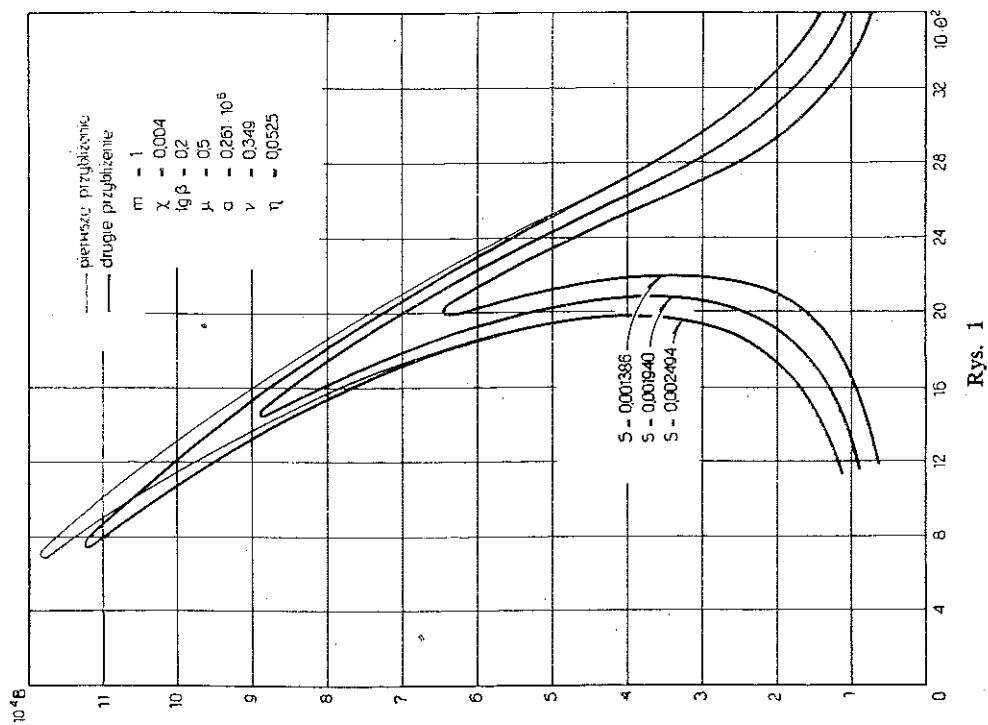
3. ANALIZA WYNIKÓW

W celu zilustrowania wpływu nieliniowości sprężystej materiału na drgania poprzeczne powłoki sporządzono opierając się na równaniach (2.36) i (2.50) wykresy zależności amplitudy od częstości. Krzywe te zależą od następujących parametrów: m oznacza liczbę określającą ilość półfal na długości powłoki (2.2), χ stosunek grubości powłoki do jej długości, β połowę kąta wierzchołkowego stożka, μ stosunek najmniejszego promienia krzywizny powłoki do jej długości, a iloczyn stałej materiałowej a_3 , określającej nieliniowość sprężystą materiału (1.16) i kwadratu modułu Younga E , ν współczynnik Poissona, η bezwymiarowy współczynnik tłumienia (1.23), S stosunek amplitudy bezwymiarowej siły wymuszającej Q (2.3) do η

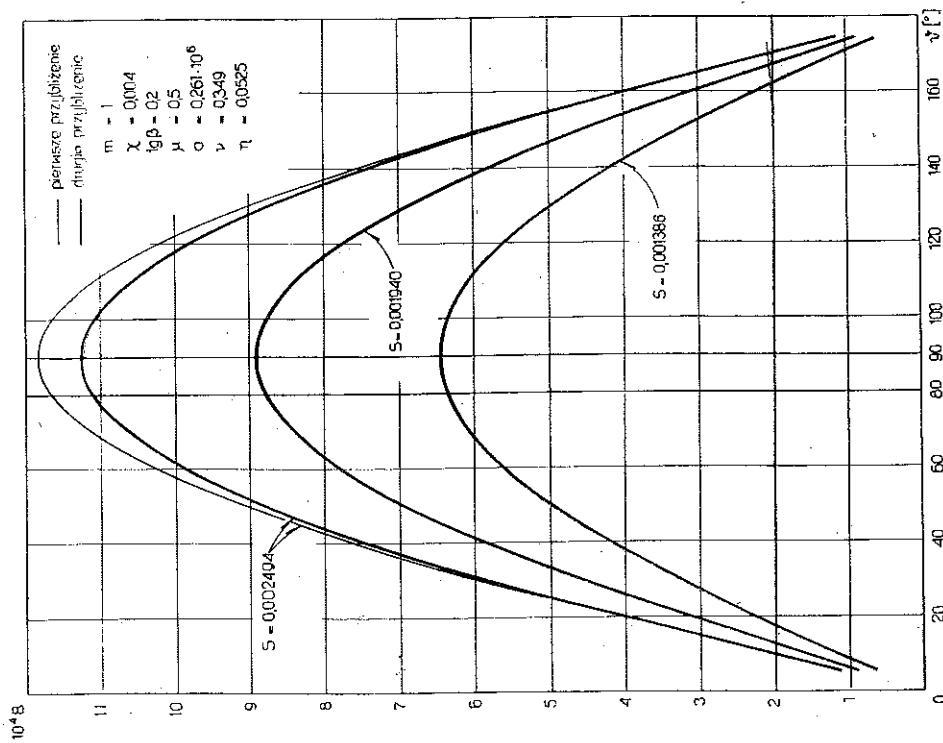
$$(3.1) \quad S = \frac{Q}{\eta} = \frac{p_z}{\chi E \eta},$$

gdzie p_z jest amplitudą obciążenia zewnętrznego normalnego do powierzchni środkowej. Bezwymiarowe współrzędne określają amplitudę drgań i kwadrat częstości:

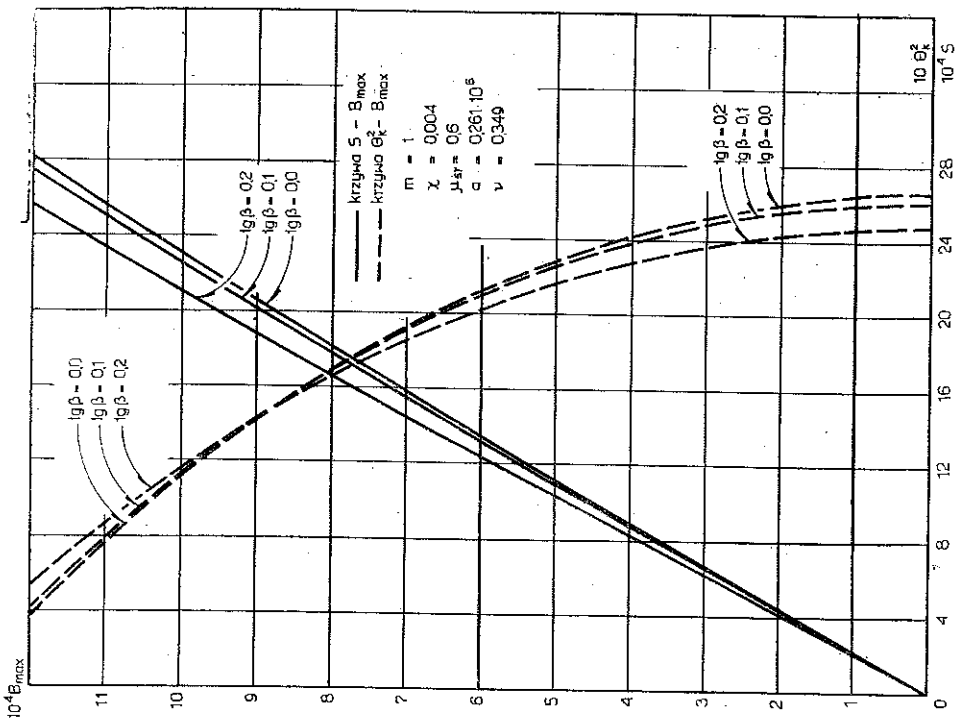
$$(3.2) \quad B = \frac{W_{\max}}{l}, \quad \theta^2 = \frac{\rho l^2}{E} \omega^2,$$



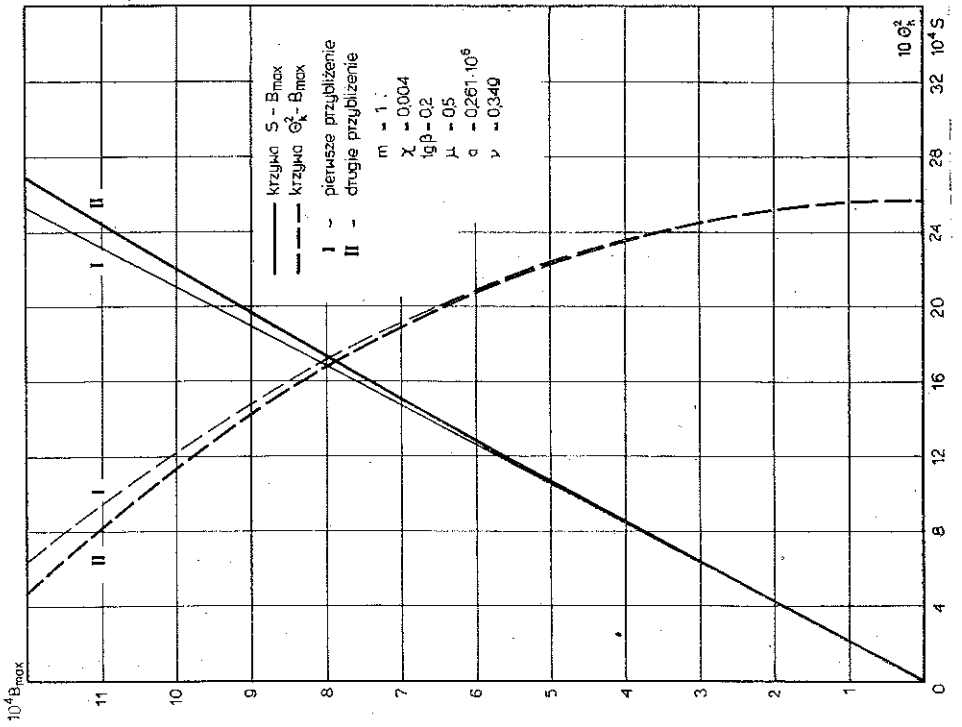
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 4



Rys. 3

gdzie W_{\max} jest amplitudą drgań poprzecznych (giętnych), ω oznacza częstość drgań wymuszonych równą częstości siły wymuszającej, l długość powłoki (mierzoną wzdłuż tworzącej stożka) oraz ρ gęstość materiału powłoki.

Na rys. 1 przedstawiono wykres rezonansowy dla różnych wartości okresowej siły wymuszającej. Ze wzrostem siły wymuszającej wzrasta amplituda drgań krytycznych B_{\max} oraz, w przypadku materiału o «miękkiej» charakterystyce sprężystej ($a_3 > 0$), maleje częstość krytyczna θ_k .

Związek między amplitudą drgań B a kątem przesunięcia fazowego ϑ przedstawiono na rys. 2. Oczywiście drganiom podkrytycznym odpowiadają kąty $\vartheta < 90^\circ$, nadkrytycznym $\vartheta > 90^\circ$, co wynika ze wzorów (2.35) i (2.49). W przypadku rezonansu ($B = B_{\max}$) kąt przesunięcia fazowego $\vartheta = 90^\circ$.

Ze wzrostem amplitudy siły wymuszającej rosną różnice między pierwszym a drugim przybliżeniem, dlatego dla największej wartości parametru S przedstawiono również wykresy otrzymane z pierwszego przybliżenia (cienka linia na rys. 1 i 2).

Następne rysunki przedstawiają zależność maksymalnej amplitudy B_{\max} od parametru S (linia ciągła) oraz związek między współrzędnymi drgań krytycznych B_{\max} , θ_k (linia przerywana). Krzywe te nie zależą od η ze względu na pomijalnie małą wartość składnika $\eta^2 \vartheta_3$ w równaniu (2.51). Ze wzrostem S różnica między pierwszym (2.34), (2.37) a drugim (2.48), (2.51) przybliżeniem powiększa się (rys. 3).

Posługując się wykresami uzyskanymi w drugim przybliżeniu, przeanalizujemy wpływ pozostałych parametrów na drgania powłoki stożkowej.

Oznaczamy przez μ_{sr} stosunek średniego promienia stożka do długości tworzącej. Z zależności geometrycznych wynika wzór

$$(3.3) \quad \mu = \mu_{sr} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} - \frac{\operatorname{tg} \beta}{2}.$$

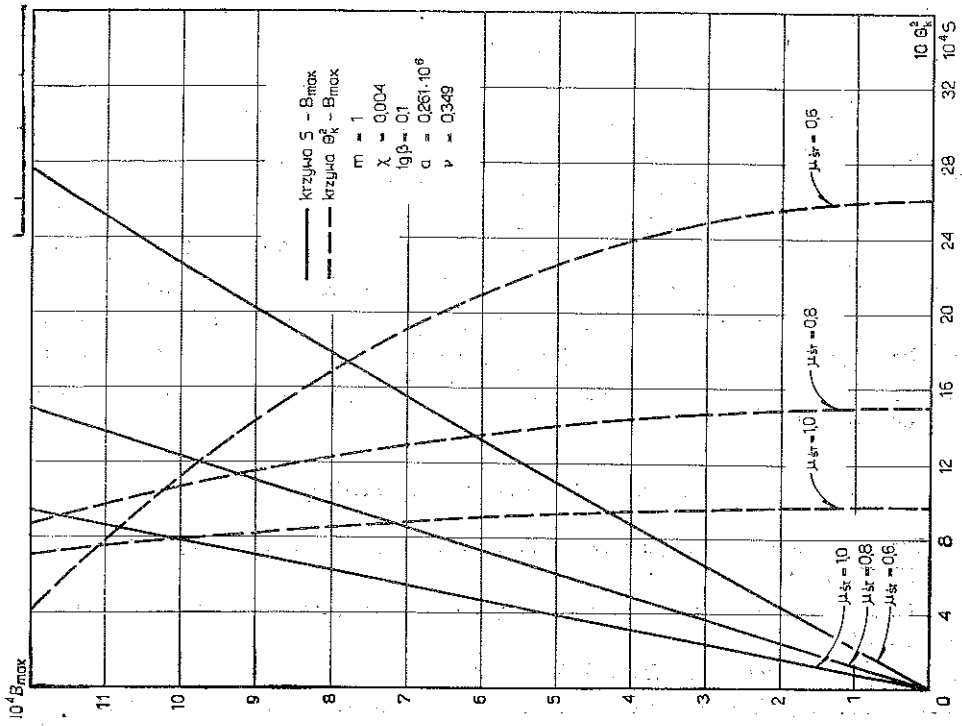
Zmiana kąta β przy stałej wartości parametru μ powoduje zmianę parametru μ_{sr} , a stąd, przy stałych l , χ i ρ , ulega zmianie masa powłoki. Aby masa powłoki nie ulegała zmianie ze zmianą parametru β , należy przyjąć parametr μ_{sr} jako stały.

Wpływ zbieżności stożka na drgania krytyczne powłoki przy stałej wartości μ_{sr} przedstawia rys. 4. W pracy niniejszej rozważa się powłoki o małych zbieżnościach ($\beta < 20^\circ$). Dla $\beta = 0$ uzyskujemy charakterystykę dla powłoki walcowej. Ze wzrostem zbieżności powłoki stożkowej wzrasta amplituda drgań krytycznych oraz maleje częstość krytyczna przy niezmiennej wartości parametru S .

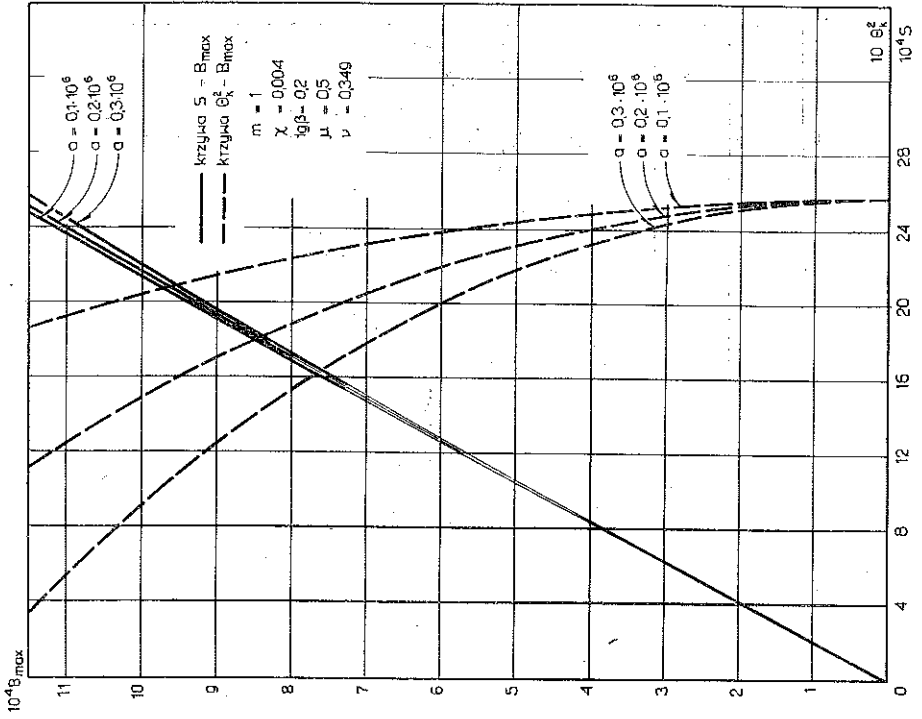
Znaczny wpływ na wielkości parametrów drgań krytycznych ma średni promień powłoki stożkowej (rys. 5). Ze wzrostem parametru μ_{sr} rośnie amplituda drgań krytycznych oraz maleje częstość rezonansowa przy stałych wartościach pozostałych parametrów.

Współczynnik a_3 , określający nieliniowość materiału, a także współczynnik Poissona ν , wpływają nieznacznie na amplitudę drgań rezonansowych (rys. 6 i 7).

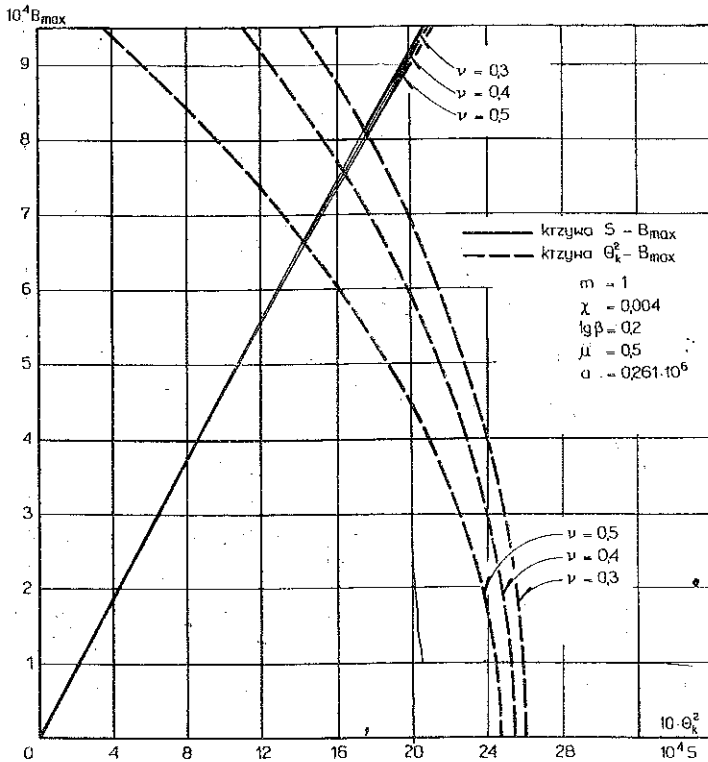
Drgania krytyczne powłok stożkowych wykonanych z materiału o większym współczynniku a_3 zachodzą przy niższych częstościach (rys. 6), natomiast wzrost ściśliwości materiału powoduje zwiększenie częstości rezonansowej (rys. 7).



Rys. 5.



Rys. 6



Rys. 7

Zmiany parametru χ w przedziale od $2 \cdot 10^{-3}$ do $8 \cdot 10^{-3}$ nie wpływają na zmianę wartości analizowanych funkcji.

Wzrost parametru S w każdym przypadku powoduje zbliżony do liniowego przyrost amplitudy drgań krytycznych B_{\max} przy jednoczesnej zmianie częstości krytycznej θ_k . Zjawisko to jest spowodowane zmianą częstości drgań własnych ze zmianą amplitudy drgań, charakterystyczną dla powłok z materiału nieliniowo sprężystego. Jeżeli w równaniu (2.51) wyrażającym związek między amplitudą drgań krytycznych B_{\max} a częstością krytyczną θ_k podstawimy $\eta = 0$ oraz na miejsce B_{\max} i θ_k odpowiednio B i θ , to uzyskamy związek między amplitudą a częstością drgań własnych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Г. Бок, *Гашение колебаний при использовании поглощающего свойства материала*, ЗАММ, cz. 12, 1927.
2. Н. Н. Давиденков, *О рассеянии энергии при вибрациях*, Журнал технической физики, 8, 16, 1938.
3. H. KAUDERER, *Nichtlineare Mechanik*, Berlin 1958.
4. Ю. П. Кичасев, И. В. Куляба, *Осесимметричные колебания конической оболочки при нелинейном законе упругости*, Динамика и прочность машин, Выпуск 19, Харьков 1974.

5. И. Л. Корчинский, *О внутреннем сопротивлении строительных материалов*, Вестник инженеров и техников, № 2, 1938.
6. N. MINORSKI, *Drgania nieliniowe*, Warszawa 1967.
7. Я. Г. Пановко, *Внутреннее трение при колебаниях упругих систем*, Физматгиз, Москва 1960.
8. В. Н. Пастушихин, *Колебания пластинок и некоторых видов оболочек из нелинейно-упругих материалов*, Аннотация докладов XXIV научно-технической конференции МИСИ имени В. В. Куйбышева, М. 1965.
9. В. Н. Пастушихин, *Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки из нелинейно-упругих материалов*, АН СССР, Механика, № 4, 1965.
10. В. Н. Пастушихин, *Колебания пологих оболочек из нелинейно-упругих материалов с учетом внутреннего неупругого сопротивления*, Расчет пространственных конструкций, Выпуск XI, Москва 1967.
11. В. Н. Пастушихин, *Колебания пологих оболочек из нелинейно-упругих материалов при конечных прогибах и внутреннем неупругом сопротивлении*, Новые методы расчета строительных конструкций, ЦНИИСК, Москва 1968.
12. Т. С. Писаренко, *Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале*, Изв. АН УССР, Киев 1955.
13. Praca zbiorowa pod redakcją S. KALISKIEGO, *Drgania i fale w ciałach stałych*, Warszawa 1966.
14. Praca zbiorowa pod redakcją S. D. PONOMARIEWA, *Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn*, Warszawa 1957.
15. Е. С. Сорокин, *Метод учета неупругого сопротивления материала при расчете конструкций на колебания*, Исследования по динамике сооружений, Стройиздат, Москва 1951.
16. F. TWARDOSZ, *Osiowo-symetryczne wymuszone drgania tłumione powłoki stożkowej przy nieliniowej sprężystości*, Poznańskie Towarzystwo Przyjaciół Nauk, zeszyt 8, Poznań 1971.
17. F. TWARDOSZ, T. WEGNER, *Obrotowo-symetryczne drgania własne powłoki stożkowej z materiału ściśliwego nieliniowo sprężystego*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, Tom 13, Zeszyt 3, PWN, W-wa 1975.
18. В. З. Власов, *Общая теория оболочек*, Москва 1949.

Резюме

ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ВЫНУЖДЕННЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ СЖИМАЕМОГО НЕЛИНЕЙНО УПРУГОГО МАТЕРИАЛА

В работе подвергнуты анализу вращательно-симметричные, вынужденные, затухающие колебания тонкой конической оболочки со срезанной вершиной, свободно подпертой на обоих краях, изготовленной из однородного, изотропного, нелинейно упругого и сжимаемого материала. Ограничились анализом малых колебаний, что позволило применить линейные геометрические соотношения. Получена система двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка, которая сведена к обыкновенным уравнениям с помощью метода Губнова-Галеркина и решена методом малого параметра, ограничиваясь вторым приближением. Полученные решения, иллюстрирующие влияние упругой нелинейности на колебания оболочки, представлены в графическом виде.

SUMMARY

FORCED AND DAMPED ROTARY-SYMMETRIC VIBRATIONS OF A CONOIDAL SHELL MADE OF NONLINEARLY ELASTIC COMPRESSIBLE MATERIAL

The paper deals with an analysis of the forced and damped rotary-symmetric vibrations of conoidal shell having cut apex boeing, freely supported on the both wedges and made of homogeneous, isotropic nonlinearly elastic and compressible material. Assuming small vibrations it was possible to apply linear geometrical vibrations. The obtained system of two nonlinear partial differential equations of the fourth order was reduced by means of the Bubnov-Galerkin method to the ordinary differential equations which by turn were solved by the small parameter method with an accuracy of the second approximation. The solutions obtained illustrating the influence of the elastic nonlinearity on the vibrations of shell were presented in a form of diagrams.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA W POZNANIU

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 kwietnia 1975 r.