

STATYKA PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH O ZMIENNYCH PRZEKROJACH OTWARTYCH

JERZY WEKZER (GDAŃSK)

Przedstawione w pracy rozwiązanie zagadnienia skręcania pręta cienkościennego o zmiennym przekroju otwartym oparte jest na liniowej teorii powłok z zastosowaniem założeń upraszczających teorii profili cienkościennych. W rozwiązaniu wykorzystano metodę elementów skończonych dzieląc powierzchnię środkową pręta na segmenty płaszczyznami prostopadłymi do osi podłużnej pręta, segmenty natomiast podzielono na klasyczne elementy trójkątne. Zastosowano dwustopniową syntezę macierzy sztywności wszystkich elementów segmentu. Założono, że każdy segment ma piętnaście stopni swobody, które odpowiadają funkcjom kształtu w postaci wielomianów o piętnastu parametrach. Przedstawioną metodę zaprogramowano na EMC ODRA 1204 w języku Algol-60. W pracy przedstawiono wyniki obliczeń dla pręta o zmiennym przekroju ceowym.

1. WSTĘP

Przedstawiona w pracy teoria prętów cienkościennych o zmiennych przekrojach otwartych stanowi próbę opisu zagadnień statycznych metodami analizy numerycznej. Zasadnicza koncepcja tego ujęcia oparta jest na wykorzystaniu metody elementów skończonych w liniowej teorii powłok z zastosowaniem założeń upraszczających teorii profili cienkościennych. Przyjęto, że pręt zbudowany jest z materiału jednorodnego i izotropowego. Założono również, że pod wpływem działania dowolnych, uogólnionych sił zewnętrznych na powierzchni pręta doznaje on małych przemieszczeń. W rozważaniach teoretycznych przyjęto trzy klasyczne założenia technicznej teorii prętów cienkościennych o stałych przekrojach poprzecznych w postaci następujących hipotez:

- 1) nieodkształcalności przekroju poprzecznego w jego płaszczyźnie,
- 2) braku odkształcenia postaciowego powierzchni środkowej pręta,
- 3) spaczenia przekrojów pręta przy skręcaniu (hipoteza Wagnera).

Do prętów cienkościennych o stałym przekroju otwartym odnosi się znany układ czterech równań różniczkowych równowagi, który w postaci podanej przez W. Z. WŁASOWA [12] opisuje zagadnienie skręcania pręta momentem $m(z)$ rozłożonym w sposób ciągły:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} F_{\xi}^{\text{II}} - S_y \xi^{\text{III}} - S_x \eta^{\text{III}} - S_{\omega} \theta^{\text{III}} &= 0, \\ -S_y \xi^{\text{III}} + I_y \xi^{\text{IV}} + I_{xy} \eta^{\text{IV}} + I_{\omega x} \theta^{\text{IV}} &= 0, \\ -S_x \xi^{\text{III}} + I_{xy} \xi^{\text{IV}} + I_x \eta^{\text{IV}} + I_{\omega y} \theta^{\text{IV}} &= 0, \\ -S_{\omega} \xi^{\text{III}} + I_{\omega x} \xi^{\text{IV}} + I_{\omega y} \eta^{\text{IV}} + I_{\omega} \theta^{\text{IV}} - \frac{GI_d}{E} \theta^{\text{IV}} &= \frac{m(z)}{E}, \end{aligned}$$

gdzie zostały przyjęte następujące oznaczenia:

F	pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta,
S_x, S_y	momenty statyczne względem osi x i y ,
S_ω	wycinkowy moment statyczny przekroju,
I_x, I_y	momenty bezwładności względem osi x i y ,
I_ω	wycinkowy moment bezwładności,
$I_{\omega x}, I_{\omega y}$	wycinkowo-liniowe momenty bezwładności przekroju względem osi x i y ,
ξ, η, ζ	przesunięcia dowolnego punktu na powierzchni pręta odpowiednio wzdłuż osi x, y, z ,
θ	kąt obrotu przekroju pręta,
E	moduł Younga,
I_d	moment bezwładności skręcania swobodnego.

W przypadku prętów o zmiennych przekrojach układ (1.1) staje się układem równań różniczkowych o współczynnikach funkcyjnych, którego w sposób ścisły rozwiązać nie można. Istnieją trzy możliwości rozwiązania:

1. *Założenie odcinkowo stałych charakterystyk przekrojowych.* Przez poszukiwanie miejsc geometrycznych środków ciężkości i środków skręcania oraz ewentualnych osi symetrii uzyskuje się redukcję niektórych współczynników i rozdzielenie układu (1.1). Kierunek ten w wersji numerycznej zmierza do zastosowania metody macierzy przeniesienia (prace [2 i 6]).

2. *Rozwiązanie układu równań (1.1) metodą różnic skończonych.* Z reguły wykorzystuje się tu również symetrię przekrojów, co upraszcza samą technikę obliczeń ([3 i 4]).

3. *Zastosowanie metody elementów skończonych.* Użycie przybliżonych funkcji przemieszczeń z numerycznego punktu widzenia prowadzi na ogół do dobrych wyników. Przyjęcie takich funkcji w równaniach (1.1) stwarza możliwości dokładniejszego wyznaczenia charakterystyk przekrojowych jako zmiennych funkcyjnych zależnych od położenia przekroju. Metodę elementów skończonych w odniesieniu do prętów o stałych przekrojach zastosowano w pracach [1 i 8].

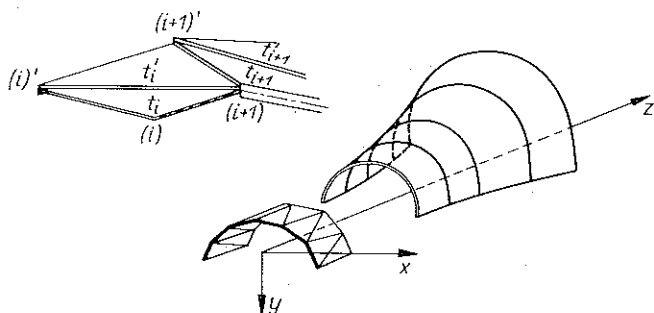
W celu rozwiązania zagadnień statycznych dla prętów cienkościennych o zmiennych przekrojach w niniejszej pracy zastosowano metodę elementów skończonych jako najbardziej uniwersalną.

2. OPIS GEOMETRYCZNY

W celu utworzenia modelu możliwie najdokładniej opisującego powierzchnię środkową pręta o osi prostej lub łagodnie zakrzywionej oraz dowolnie zmiennych w sposób ciągły przekrojach poprzecznych, oparto opis geometryczny pręta na podanych w sposób dyskretny współrzędnych punktów powierzchni środkowej w dowolnie przyjętym globalnym układzie ortokartezjańskim (rys. 1).

Pręt jako obiekt jednowymiarowy podzielony został na dowolną, skończoną ilość odcinków za pomocą płaszczyzn prostopadłych do osi z . Powstałe w ten sposób odcinki o długościach Δz_i nazwano segmentami. Idąc za propozycją J. S. PRZEMIENIECKIEGO [7], w drugim etapie powierzchnię środkową segmentu zastępuje się

modelem dyskretnym złożonym z dowolnych elementów trójkątnych za pomocą punktów w przekrojach $z=0$ oraz $z=\Delta z$. Każdy z elementów trójkątnych może mieć różną grubość, również zerową.



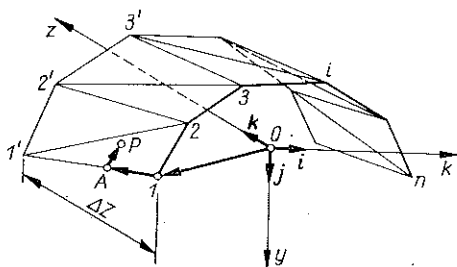
Rys. 1. Konstrukcja modelu dyskretnego dla pręta cienkościennego o zmiennym przekroju otwartym

Położenie dowolnego punktu P leżącego w płaszczyźnie pierwszego trójkąta segmentu, ograniczonego płaszczyznami $z=0$ oraz $z=\Delta z$, określa się przez sumę trzech wektorów (rys. 2):

$$(2.1) \quad \mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{01} + \mathbf{r}_{1A} + \mathbf{r}_{AP},$$

gdzie \mathbf{r}_{01} jest wektorem łączącym punkt 0 z punktem 1. Kierunek wektora \mathbf{r}_{1A} jest określony prostą 1-1', natomiast wektor \mathbf{r}_{AP} jest równoległy do prostej 1-2. Znając współrzędne wszystkich pokazanych na rys. 2 punktów, można wyznaczyć składniki wektora (2.1) jak następuje:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{r}_{01} &= x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j}, \\ \mathbf{r}_{1A} &= \frac{z}{\Delta z} [(x_1' - x_1) \mathbf{i} + \\ &\quad + (y_1' - y_1) \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k}], \\ \mathbf{r}_{AP} &= \frac{s}{s_{12}} [(x_2 - x_1) \mathbf{i} + (y_2 - y_1) \mathbf{j}]. \end{aligned}$$



Rys. 2. Opis położenia dowolnego punktu na powierzchni pierwszego trójkąta

Zmienna s stanowi miarę długości łuku w dowolnym przekroju, która na krawędzi 1-1' przybiera wartość 0. Tutaj jest ona odległością między punktami A i P . Natomiast $s_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ oznacza długość boku 1-2.

Wprowadza się oznaczenia:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} K &= \frac{y_1' - y_1}{\Delta z}, & L &= \frac{y_2 - y_1}{s_{12}}, \\ P &= \frac{x_1' - x_1}{\Delta z}, & R &= \frac{x_2 - x_1}{s_{12}}, \\ J &= y_1, & M &= x_1 \end{aligned}$$

oraz

$$(2.4) \quad \begin{aligned} W &= -PL + KR, \\ T &= -P(J - c_y) + K(M - c_x), \\ U &= R(J - c_y) - L(M - c_x). \end{aligned}$$

Jak widać, są to wielkości stałe dla określonego trójkąta, przy czym c_x i c_y oznaczają współrzędne dowolnie przyjętej osi skręcania. Za pomocą (2.3) wektor (2.1) przyjmuje zwięzłą postać

$$(2.5) \quad \mathbf{r}_p = (M + Pz + Rs)\mathbf{i} + (J + Kz + Ls)\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Wektory podstawowe powierzchni są stałe na całej płaszczyźnie trójkąta i wynoszą zgodnie z [5]

$$(2.6) \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_{p,s} = R\mathbf{i} + L\mathbf{j}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{r}_{p,z} = P\mathbf{i} + K\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Na ich podstawie znaleźć można tensor metryczny o wyznaczniku

$$(2.7) \quad a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = P^2 + K^2 + 1 - (PR + KL)^2.$$

Przyjmuje się *a priori* postać współrzędnej wycinkowej podaną w [9 i 10] dla pręta cienkościennego o zmiennym przekroju otwartym:

$$(2.8) \quad \omega(s, z) = \int \left[(x - c_x) \frac{dy}{ds} - (y - c_y) \frac{dx}{ds} \right] ds.$$

Dalej w p. 4 wykazuje się, że postać ta jest poprawna. Wprowadzając do (2.8) zmienne z, s na miejsce współrzędnych x, y , a następnie po wykonaniu całkowania tego związku w przedziale $[0, s]$ otrzymuje się

$$(2.9) \quad \omega(s, z) = -s(U + Wz),$$

przy czym wykorzystano oznaczenia (2.4).

Wartość początkową współrzędnej wycinkowej dla elementu trójkątnego 1'-2-2' określa wzór (2.9), w którym współrzędną s dobiera się tak, aby określała krawędź między trójkątami 1'-1-2 oraz 1'-2-2', tzn.

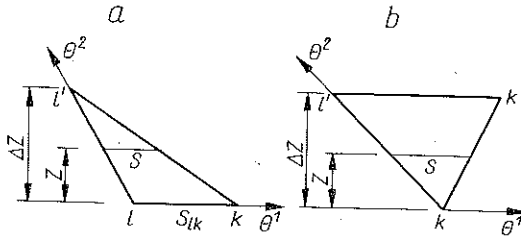
$$(2.10) \quad s = s_{12} \left(1 - \frac{z}{Az} \right).$$

Wzór ten łatwo wyprowadzić z rys. 3a. Jeśli podstawić to wyrażenie do wzoru (2.9), to otrzyma się wartość początkową współrzędnej wycinkowej dla trójkąta 1'-2-2':

$$(2.11) \quad \omega_0(z) = \frac{s_{12}}{Az} [-U\Delta z + (U - W\Delta z)z + Wz^2].$$

Wydaje się rzeczą celową wprowadzenie umowy, że trójkąty, których podstawy leżą w płaszczyźnie $z=0$, nazywane będą trójkątami typu I, te zaś, których podstawy leżą w płaszczyźnie $z=Az$, będą trójkątami typu II.

Podobnie przeprowadzić można analizę wielkości geometrycznych następnego trójkąta pamiętając o tym, że przy przejściu do każdego następnego trójkąta wystąpi przyrost współrzędnej wycinkowej. Przyrosty te muszą być sumowane



Rys. 3. Granice zmiennych z, s dla trójkątów:
a) typu I oraz b) typu II

od pierwszego do aktualnie rozważanego trójkąta. W ten sposób współrzędną wycinkową w dowolnym punkcie na konturze napisać można następująco:

$$(2.12) \quad \omega = -s(U + Wz) - \Omega_1 - \Omega_2 z - \Omega_3 z^2.$$

Trzy ostatnie składniki wyrażenia (2.12) stanowią wartość początkową współrzędnej wycinkowej dla rozważanego trójkąta i określone są w sposób następujący:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \Omega_1 &= \sum_I s_{lk} U, \\ \Omega_2 &= - \sum_I \frac{s_{lk}}{\Delta z} (U - W \Delta z) + \sum_{II} \frac{s_{l'k'}}{\Delta z} U, \\ \Omega_3 &= - \sum_I \frac{s_{lk}}{\Delta z} W + \sum_{II} \frac{s_{l'k'}}{\Delta z} W. \end{aligned}$$

Znaki sumy w (2.13) opatrzone są u dołu cyframi I lub II, które oznaczają, że sumowanie dotyczy trójkątów typu I albo II. W ten sposób opisuje się każdy element trójkątny rozważanego segmentu.

Ze względu na przyjęty dowolny kształt elementów trójkątnych wygodnie jest korzystać z ukośnokątnego układu współrzędnych na powierzchni, którego bazy podano w (2.6). Wszelkie założenia fizyczne muszą być jednak wprowadzane w ortokartezjańskim układzie współrzędnych lokalnych, przy czym początki tych układów obrać można w tym samym punkcie (rys. 4).

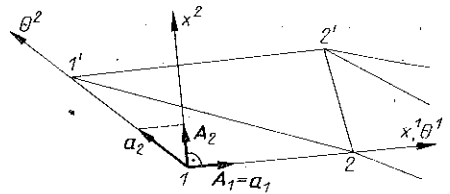
Nowe bazy układu ortonormalnego przyjmuje się w postaci

$$(2.14) \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{A}_2 = \alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2.$$

Nie znane współczynniki α i β wyznaczyć można z dwóch warunków:

a) żąda się prostopadłości wektorów \mathbf{A}_1 i \mathbf{A}_2 , czyli

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = A_{12} = 0;$$



Rys. 4. Lokalne bazy układów: ukośnokątnego x^α i ortokartezjańskiego x^α

b) wektory \mathbf{A}_1 i \mathbf{A}_2 powinny być jednostkowe: $|\mathbf{A}_1|=1$ ze względu na (2.14)₁ oraz (2.6)₁; pozostaje zatem warunek $|\mathbf{A}_2|=\sqrt{A_{22}}=1$.

Z dwóch otrzymanych w ten sposób rozwiązań pozostawić należy to, z którego dla prostokątnego elementu trójkątnego uzyska się $\mathbf{A}_2=\mathbf{a}_2$:

$$(2.15) \quad \alpha = -\frac{a_{12}}{\sqrt{a}}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Dowolny wektor \mathbf{u} można wyrazić w bazach \mathbf{a}_α lub \mathbf{A}_β :

$$(2.16) \quad \mathbf{u} = \theta^\alpha \mathbf{a}_\alpha = x^\beta \mathbf{A}_\beta.$$

Stąd wyznacza się związki między tymi współrzędnymi:

$$(2.17) \quad \theta^1 = x^1 + \alpha x^2, \quad \theta^2 = \beta x^2.$$

Obliczona na podstawie (2.17) macierz transformacyjna między obydwoma układami ma postać

$$(2.18) \quad C^{\rho}_{\alpha} = \frac{\partial \theta^\rho}{\partial x^\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

3. ODKSZTAŁCENIA

Z klasycznej teorii prętów cienkościennych [12] wiadomo, że w dowolnym przekroju pręta występuje siedem uogólnionych sił wewnętrznych, którym odpowiadają właściwe przemieszczenia. W przekroju $z=0$ dowolnego segmentu tworzą one wektor przemieszczeń węzła:

$$(3.1) \quad [\delta]_{z=0} = [\xi_0, \zeta_0', \eta_0, \eta_0', \zeta_0, \theta_0, \theta_0']^T,$$

gdzie ξ_0, η_0, ζ_0 oznaczają przemieszczenia liniowe w węźle $z=0$ segmentu odpowiednio wzdłuż osi x, y, z , a θ_0 jest kątem obrotu przekroju poprzecznego.

Wektor przemieszczeń całego segmentu zawiera łącznie czternaście przemieszczeń węzłowych obejmujących przemieszczenia w przekrojach $z=0$ oraz $z=\Delta z$

$$(3.2) \quad \delta^S = \begin{bmatrix} [\delta]_{z=0} \\ [\delta]_{z=\Delta z} \end{bmatrix}.$$

W związku z tym rozwiązując problem metodą elementów skończonych przyjmuje się cztery niezależne funkcje przemieszczeń ξ, η, ζ, θ w postaci wielomianów o czternastu parametrach α_i . Z układu równań (1.1) wynika, że układ ten będzie spełniony, jeśli przyjąć funkcje ξ, η i θ w postaci wielomianów trzeciego stopnia, natomiast przemieszczenie ζ musi być opisane wielomianem stopnia drugiego. Przyjęto więc

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \eta &= \alpha_1 + \alpha_2 z + \alpha_3 z^2 + \alpha_4 z^3, \\ \xi &= \alpha_5 + \alpha_6 z + \alpha_7 z^2 + \alpha_8 z^3, \\ \zeta &= \alpha_9 + \alpha_{10} z + \lambda \left(1 - \frac{z}{\Delta z}\right) \frac{z}{\Delta z}, \\ \theta &= \alpha_{11} + \alpha_{12} z + \alpha_{13} z^2 + \alpha_{14} z^3. \end{aligned}$$

Czternaście niewiadomych parametrów α_i tworzących wektor α można wyznaczyć jako funkcje przemieszczeń węzłowych segmentu. W tym celu na podstawie (3.3) obliczono pochodne η' , ξ' oraz θ' , a następnie podstawiając do uogólnionych przemieszczeń $z=0$ oraz $z=\Delta z$ otrzymano związek

$$(3.4) \quad \delta^S = C\alpha,$$

gdzie

$$\alpha^T = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{14}].$$

Należy podkreślić, że piętnasty nieznaną parametr λ nie występuje w układzie równań (3.4), ponieważ towarzyszący mu mnożnik przybiera wartość zerową dla $z=0$ oraz $z=\Delta z$. Parametr ten wyznaczyć można techniką wariacyjną.

Dzięki rozdzielaniu układu (3.4) można łatwo znaleźć jego rozwiązanie:

$$(3.5) \quad \alpha = C^{-1} \delta^S.$$

Macierz odwrotna C^{-1} podana jest w tablicy 1.

Wektor przemieszczenia dowolnego punktu o współrzędnych x i y podczas skrećania pręta o kąt θ wokół osi o współrzędnych c_x i c_y , ma postać [9 i 10]

$$(3.6) \quad \mathbf{u} = [\xi - (y - c_y)\theta] \mathbf{i} + [\eta + (x - c_x)\theta] \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}.$$

Nieznana jeszcze współrzędna u_z wektora (3.6) opisuje przemieszczenie dowolnego punktu na konturze wzdłuż osi z .

Przemieszczenie w płaszczyźnie pręta napisane w ukośnokątnym układzie współrzędnych, którego bazy podano w (2.6), obliczyć można w postaci iloczynu skalarowego wektorów:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} u_i &= \mathbf{u} \mathbf{a}_i, \\ u_1 &= \mathbf{u} \mathbf{a}_1 = R [\xi - (y - c_y)\theta] + L [\eta + (x - c_x)\theta], \\ u_2 &= \mathbf{u} \mathbf{a}_2 = P [\xi - (y - c_y)\theta] + K [\eta + (x - c_x)\theta] + u_z. \end{aligned}$$

4. ODKSZTAŁCENIA. MACIERZ SZTYWNOŚCI

Tensor odkształcenia $\gamma_{\alpha\beta}$ transformuje się z ukośnokątnego układu θ^α do nowego, ortokartezjańskiego x^α według prawa [5]

$$(4.1) \quad \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = C^\rho_\alpha C^\lambda_\beta \gamma_{\rho\lambda}.$$

Za pomocą (2.18) otrzymuje się następujące współrzędne tensora odkształcenia $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}$ w płaszczyźnie elementu trójkątnego przedstawione w lokalnych współrzędnych ortokartezjańskich:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \bar{\gamma}_{11} &= \gamma_{11}, \\ \bar{\gamma}_{12} &= \bar{\gamma}_{21} = \alpha \gamma_{11} + \beta \gamma_{12}, \\ \bar{\gamma}_{22} &= \alpha^2 \gamma_{11} + 2\alpha\beta \gamma_{12} + \beta^2 \gamma_{22}. \end{aligned}$$

Można zauważyć, że tensor metryczny jest stały na płaszczyźnie elementu. Stąd odpowiadające mu w teorii liniowej symbole Christoffela są równe zeru, a tensor odkształcenia powierzchni zawiera pochodne zwyczajne zamiast kowariantnych:

$$(4.3) \quad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}),$$

$$\gamma_{11} = u_{1,s}, \quad \gamma_{12} = \frac{1}{2} (u_{1,z} + u_{2,s}), \quad \gamma_{22} = u_{2,z}.$$

Korzystając z (3.7) i dokonując zamiany zmiennych x, y na z, s można wykazać, że

(4.4) $\gamma_{11} = 0$.

Charakterystyczne dla prętów cienkościennych założenie WŁASOWA [12] prowadzi do warunku $\bar{\gamma}_{12} = \bar{\gamma}_{21} = 0$, co wobec (4.4) i (4.2)₂ daje wprost $\gamma_{12} = 0$. Tą drogą otrzymuje się równanie

$$(4.5) \quad R[\xi' - (y - c_y)\theta'] + L[\eta' + (x - c_x)\theta'] + u_{z,s} = 0.$$

Z równania (4.5) wyznaczyć można przemieszczenie u_z dowolnego punktu na konturze wzdłuż długości pręta. W tym celu wykonuje się całkowanie równania (4.5) w przedziale $[0, s]$, z którego wynika, że

$$(4.6) \quad u_z = -R\xi' s - L\eta' s - \omega(s, z)\theta' + C(z),$$

gdzie $\omega(s, z)$ jest współrzędną wycinkową przekroju poprzecznego podaną uprzednio w (2.8), natomiast $C(z)$ jest dowolnie przyjętą stałą.

Podobnie obliczyć można jedyną różną od zera współrzędną tensora (4.3), tj. γ_{22} :

$$(4.7) \quad \gamma_{22} = (T + 2Ws)\theta' + \zeta' - (M + Pz + Rs)\xi'' - (J + Kz + Ls)\eta'' + s(U + Wz)\theta'' + (\Omega_1 + \Omega_2 z + \Omega_3 z^2)\theta'' + (\Omega_2 + 2\Omega_3 z)\theta'.$$

Jeśli do (4.7) podstawić przyjęte funkcje przemieszczeń (3.3), to odkształcenie γ_{22} można napisać w postaci

$$(4.8) \quad \gamma_{22} = \mathbf{G}\boldsymbol{\alpha} + \frac{\lambda}{Az} \left(1 - 2\frac{z}{Az} \right).$$

Macierz \mathbf{G} stanowi główny czynnik macierzy sztywności segmentu i wynosi

$$(4.9) \quad \mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2(J + Kz + Ls) \\ -6z(J + Kz + Ls) \\ 0 \\ 0 \\ -2(M + Pz + Rs) \\ -6z(M + Pz + Rs) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \Omega_2 + T + 2Ws + 2\Omega_3 z \\ 2\Omega_1 + 2(\Omega_2 + T)z + 2Us + 6Wz + 6\Omega_3 z^2 \\ 6\Omega_1 z + 6Us + 3(\Omega_2 + T)z^2 + 12Wz^2 s + 12\Omega_3 z^3 \end{bmatrix}.$$

Drugi składnik odkształcenia (4.8) uwzględniony zostanie w macierzy sztywności w postaci dodatkowego wiersza i kolumny.

Z warunku minimum funkcjonału energii sprężystej przy pominięciu drugiego składnika (4.8) otrzymuje się wzór:

$$(4.10) \quad \mathbf{F}^S = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{V^S} (\mathbf{C}^{-1})^T \mathbf{G}^T \frac{1}{a^2} \mathbf{G} \mathbf{C}^{-1} dV^S \boldsymbol{\delta}^S,$$

gdzie \mathbf{F}^S jest wektorem sił węzłowych segmentu o czternastu współrzędnych. Występujące tu całkowanie obejmuje obszar całego segmentu V^S , który można zamienić na równoważną sumę podobszarów zgodnie z podziałem na elementy trójkątne o objętości V^e . Należy ponadto podkreślić, że macierz \mathbf{C}^{-1} zawiera współrzędne niezależne od zmiennych całkowania i można ją wyłączyć przed całkę. W ten sposób otrzymuje się

$$(4.11) \quad \mathbf{F}^S = \frac{E}{1-\nu^2} (\mathbf{C}^{-1})^T \sum_{i=1}^n \left(\frac{t}{a\sqrt{a}} \int_z \int_s \mathbf{G}^T \mathbf{G} ds dz \right) \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\delta}^S$$

lub krótko

$$(4.12) \quad \mathbf{F}^S = \mathbf{K}^S \boldsymbol{\delta}^S,$$

gdzie \mathbf{K}^S jest główną częścią macierzy sztywności segmentu. Granice zmiennych z, s w (4.11) zależą od typu trójkąta i wynikają z rys. 3.

Formalnie najtrudniejszym do wyznaczenia czynnikiem w (4.11) jest całka z iloczynu macierzy $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ głównie ze względu na występujące we współrzędnych (4.9) kombinacje zmiennych z i s do trzeciego stopnia włącznie. W opracowanym programie całkowania tego dokonuje się automatycznie w sposób ścisły.

Pełna macierz sztywności o wymiarze 15×15 uwzględniać musi również wpływ parametru λ przyjętego jako funkcja przemieszczeń (3.3). Efekt ten najwygodniej jest ująć energetycznie. Energia sprężysta sił wewnętrznych dla dowolnego segmentu pręta wynosi

$$(4.13) \quad L_w = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{V^S} \bar{\gamma}_{22}^2 dV^S.$$

Pamiętając, że pierwszy składnik odkształcenia (4.8) został już uwzględniony, należy podstawić drugi do (4.13), aby z warunku minimum energii ze względu na parametr λ otrzymać dodatkowy piętnasty wiersz i symetrycznie odpowiadającą mu kolumnę w macierzy sztywności segmentu.

W macierzy sztywności uwzględniono również wpływ skręcania swobodnego przyjmując w uproszczeniu, że sztywność GJ_d jest stała wzdłuż długości każdego segmentu.

5. STAN NAPRĘŻENIA

Ogólny układ równań równowagi dla całego segmentu zapisać można w postaci

$$(5.1) \quad \mathbf{K}\delta = \mathbf{F},$$

gdzie \mathbf{K} jest ogólną macierzą sztywności, symetryczną i pasmową oraz złożoną z macierzy sztywności poszczególnych segmentów. Wektor δ jest poszukiwanym wektorem przemieszczeń, natomiast \mathbf{F} jest wektorem zewnętrznych obciążeń działających w węzłach. W wyniku rozwiązania układu równań (5.1) z warunkami brzegowymi otrzymuje się przemieszczenia węzłowe każdego segmentu δ^s stanowiące podbloki wektora δ .

Ponieważ tylko współrzędna γ_{22} tensora odkształcenia jest różna od zera, zatem z prawa Hooke'a wynika, że tensor naprężeń $n^{\alpha\beta}$ zawierać będzie również jedną niezerową współrzędną:

$$(5.2) \quad n^{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \gamma_{22}.$$

Fizyczną wielkość naprężeń σ określa się przez podstawienie (4.8) oraz (3.5) do związku (5.2):

$$(5.3) \quad \sigma = \frac{E}{a(1-\nu^2)} \left[\mathbf{GC}^{-1} \delta^s + \frac{\lambda}{Az} \left(1 - 2 \frac{z}{Az} \right) \right].$$

Zmienne z i s występujące w (5.3) mogą być dowolnie dobrane w obszarze określonego elementu trójkątnego. Praktycznie wystarcza jednak, aby podawać współrzędne punktów narożnych elementów trójkątnych otrzymując naprężenia we wszystkich tych punktach, których współrzędne zostały podane w opisie geometrycznym pręta.

W przekroju $z = Az$ dowolnego segmentu oraz $z = 0$ segmentu następnego występują niewielkie skoki w naprężeniach normalnych na skutek przyjęcia przybliżonych funkcji przemieszczeń. Są to jednak na ogół nieciągłości bardzo małe, a błędy te zmniejszać można przez uśrednienie naprężeń z obu segmentów. Porównanie wyników przykładu liczbowego, rozwiązanego metodą elementów skończonych, z rozwiązaniem metodą różnic skończonych oraz wynikami badań modelowych [3 i 4] wskazuje na dobrą dokładność metody.

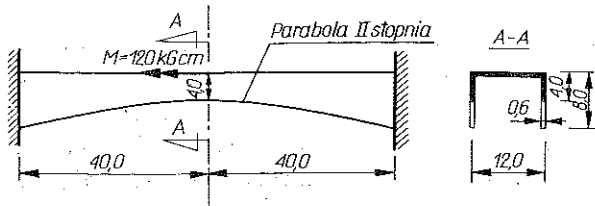
6. PRZYKŁAD LICZBOWY

Rozpatrywane jest zagadnienie skręcania belki ceowej, obustronnie utwierdzonej o zmiennym przekroju (rys. 5).

Przykład ten wybrany został nieprzypadkowo, rozwiązano bowiem go wcześniej w pracach [3 i 4], weryfikując obliczenia metodą różnic skończonych drogą doświadczalną. Należy jednak podkreślić, że opracowana ogólna teoria jak również oparty

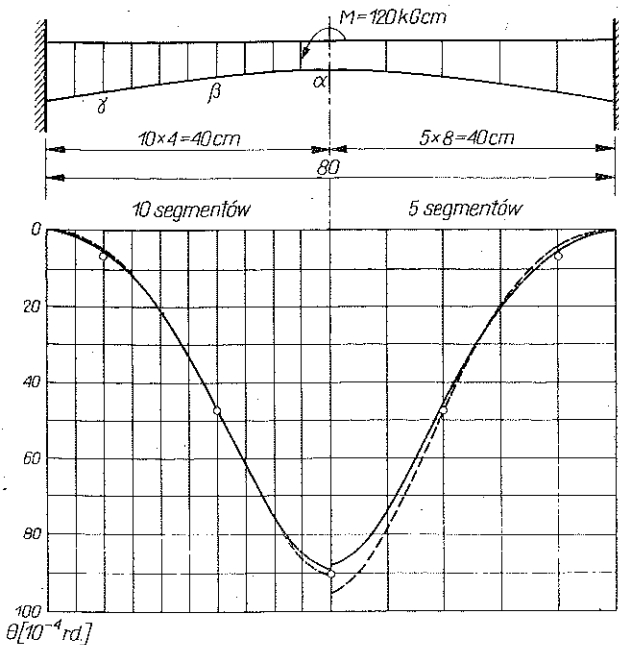
na niej program na EMC ODRA 1204 napisany w języku Algol 60, pozwalają na rozwiązanie prętów o bardziej skomplikowanych przekrojach poprzecznych.

Otrzymane z maszyny cyfrowej wyniki porównano z rezultatami prac [3 i 4]. Na rys. 6 podano wykresy kąta skręcenia θ przy podziale pręta na pięć i na dziesięć



Rys. 5. Belka cełwa obustronnie utwierdzona, obciążona momentem skręcającym

segmentów. Na rys. 7 pokazano wykresy naprężeń σ powstałych przy skręcaniu belki w przekrojach γ , β , α . Wyniki uzyskane metodą elementów skończonych obarczone są pewnymi błędami wynikającymi z a) nieciągłości naprężeń w przekrojach między sąsiednimi segmentami, b) braku ścisłej antysymetrii wykresów naprężeń w określonym węźle.

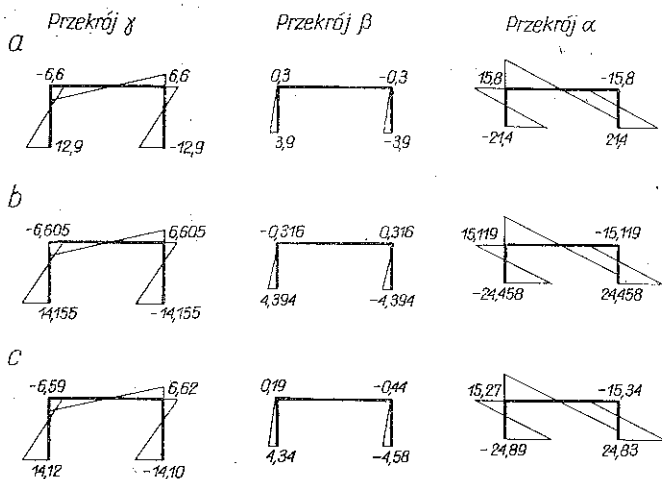


Rys. 6. Wykresy kątów skręcenia θ dla belki cełwej

○ wyniki doświadczenia, — — — rozwiązanie metodą różnic skończonych, — — — rozwiązanie metodą elementów skończonych

Wykresy na rys. 7c podane są po uśrednieniu naprężeń z sąsiednich segmentów, natomiast brak antysymetrii w tych wykresach jakościowo określa dokładność metody.

Porównanie wyników przykładu wskazuje na dużą dokładność metody nawet przy rzadkim podziale pręta. Wydaje się, że jest to wynikiem głównie wprowadzenia dokładniejszego opisu geometrycznego, opartego na ciągłym modelu pręta zamiast modeli o przekrojach skokowo-zmiennych dotychczas stosowanych w ujęciach numerycznych.



Rys. 7. Wykresy naprężeń normalnych

a) wyniki doświadczalne, b) metoda różnic skończonych, c) metoda elementów skończonych

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. H. ARGYRIS, D. RADAJ, *Stifigkeitsmatricen dünnwandiger Stäbe und Stabsysteme*, Ingenieur — Archiv, **40**, 198–210, 1971.
2. G. BECKER, *Ein Beitrag zur Statichen Berechnung Beliebiger gelagerter ebener Stäbe mit einfach symmetrischen dünnwandigen offenen Profilen von in Stabachse Querschnitt unter Berücksichtigung der Wolbkrafttorsion*, Der Stahlbau, **11**, 334–346, 1965; **12**, 368–377, 1965.
3. Z. CYWIŃSKI, *Teoria skręcania prętów cienkościennych o zmiennej sztywności*, Arch. Inż. Lądowej, **2**, 161–183, 1964.
4. Z. CYWIŃSKI, *Torsion des dünnwandigen Stabes mit veränderlichem, einfach symmetrischen, offenem Querschnitt*, Der Stahlbau, **10**, 301–307, 1964.
5. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical elasticity*, Oxford 1968.
6. S. LONKAR, *Bending and torsion of thin-walled straight and curved beams with variable open cross-section*, Dissertation Swiss Federal Institute of Technology, Zurich 1969.
7. J. S. PRZEMIENIECKI, *Matrix structural analysis of substructure*, AIAA Journal, **1**, 1, 138–147, 1963.
8. D. RADAJ, *Dünnwandige Stäbe und Stabsysteme mit allgemeiner Systemlinie und wolbelastischer Lagerung*, Rep. No 79. Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen der Universität Stuttgart, 1970.
9. P. WILDE, *The torsion of thin-walled bars with variable cross-section*, Arch. Mech. Stos., **20**, 4, 431–443, 1968.
10. J. WEKEZER, *Skręcanie prętów cienkościennych o zmiennym przekroju*, Zeszyty Naukowe P.G., **XXV**, 204, 63–72, 1973.
11. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
12. W. Z. WŁASOW, *Tonkostiennyje uprugije stierżni*, Moskwa 1959.

Резюме

СТАТИКА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОТКРЫТЫМИ СЕЧЕНИЯМИ

Представленное в работе решение задачи кручения тонкостенного стержня с переменным открытым сечением опирается на линейной теории оболочек с применением упрощающих предположений теории тонкостенных профилей. В решении использован метод конечных элементов, деля срединную поверхность стержня на сегменты плоскостями перпендикулярными к продольной оси стержня, сегменты же делены на классические треугольные элементы. Применен двухступенчатый синтез матрицы жесткости всех элементов сегмента. Предположено, что каждый сегмент имеет пятнадцать степеней свободы, которые отвечают функциям формы в виде многочленов с пятнадцатью параметрами α . Представленный метод программирован на ЭВМ ОДРА 1204 на языке Альголь-60. В работе представлены результаты расчетов для стержня с переменным швеллерным сечением.

SUMMARY

STATICS OF THIN-WALLED BARS WITH VARIABLE, OPEN CROSS-SECTION

The conception of solving the torsion problem in thin-walled bars with variable open cross-section, presented in this paper, is based on the linear shell theory under application of simplifying assumption given by the theory of thin-walled profiles. In solving the problem use has been made of the finite element method by dividing the bar central area into segments with their vertical surfaces towards the z-axis, the segment consisting of classical triangular elements. A two-stage synthesis of the stiffness-matrix has been applied to all segments elements. Displacements in the form of multinomials with fifteen parameters have been assumed on arbitrary surface points of the bar. These unknowns are determined as functions of nodal displacements of the segment. The stiffness-matrix being constructed, the recorded equation system of balance makes it possible to determine stress on any arbitrary point of the bar. The presented example is made with the help of computer program for ODRA-1204 in Algol-60 language.

POLITECHNIKA GDAŃSKA
INSTYTUT BUDOWNICTWA ŁADOWEGO

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 marca 1975 r.