

FUNKCJE NAPRĘŻEŃ W DYSKRETNEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

KAROL H. BOJDA (GLIWICE)

W pracy omówiono rozwiązania równań równowagi dyskretnej teorii sprężystości. Funkcje występujące w rozważanych rozwiązaniach nazwano funkcjami naprężeń. Korzystając z warunków nierozdzielności oraz liniowych związków konstytutywnych wyprowadzono równania dla tych funkcji. Jako przypadki szczególne rozpatrzono funkcje naprężeń w teorii dyskretnych ośrodków Cosseratów oraz w teorii jednobiegunowych ciał dyskretyzowanych. Podano także przykłady ilustrujące zastosowanie omówionych funkcji naprężeń.

1. WSTĘP

Funkcje naprężeń stanowią efektywne narzędzie rozwiązywania szeregu ważnych zagadnień teorii sprężystości. Funkcje te stosowane są szeroko w mechanice ośrodków ciągłych. W klasycznej teorii sprężystości funkcje naprężeń omówiono m.in. w pracach [4, 14, 15, 16, 18 i 21], a dla N wymiarowej teorii w przestrzeni euklidesowej w pracy [3]. Funkcje naprężeń w teorii niesymetrycznej sprężystości rozważane były także w wielu pracach, np. w [2, 5, 6, 13 i 14], a dla zagadnień płaskich m.in. w pracach [1, 11, 17 i 19], dla powierzchni zaś zakrzywionych w pracach [7 i 29]. Ostatnie prace omawiają funkcje naprężeń w teorii powłok siatkowych, których modelem obliczeniowym jest dwuwymiarowy włóknisty ośrodek Cosseratów. Dla dyskretyzowanych modeli ciał odkształcalnych funkcje naprężeń omawiane były tylko w pracach [8, 27, 30]. Natomiast w metodzie elementów skończonych, której poświęcono najwięcej prac, funkcje naprężeń nie rozważano. Przegląd prac poświęconych metodzie elementów skończonych do roku 1972 przedstawiono w pracy [20].

W niniejszej pracy omówiono funkcje naprężeń w dyskretnej teorii sprężystości ze szczególnym uwzględnieniem liniowej teorii dyskretnych ośrodków Cosseratów [27] oraz liniowej teorii sprężystych jednobiegunowych ciał dyskretyzowanych [10], stosując takie same oznaczenia jak w pracy [25].

Wprowadzenie funkcji naprężeń w dyskretnej teorii sprężystości daje te same korzyści, jakie wynikają ze stosowania funkcji naprężeń w mechanice ośrodków ciągłych. W szczególności istnieje szeroka klasa zagadnień, w których funkcje naprężeń pełnią analogiczną rolę jak funkcja naprężeń Airy'ego w klasycznej teorii tarcz. Celowość rozwiązywania pewnych zadań dyskretnej teorii sprężystości w kategoriach funkcji naprężeń uzasadniają przykłady kończące pracę

2. FUNKCJE NAPRĘŻEŃ

Ciało dyskretyzowane jest co najwyżej przeliczalnym zbiorem D elementów d zwanych cząstkami [22, 25, 26 i 27]. Rozważania przeprowadzimy dla ciał o regularnej strukturze różnicowej [23 i 24].

Przemieszczeniowy układ równań dyskretnej teorii sprężystości stanowią równania równowagi [25]

$$(2.1) \quad \bar{\Delta}_A T_a^A + t_a + f_a = 0, \quad \begin{array}{l} a=1, 2, \dots, n, \\ A=I, II, \dots, m \end{array}$$

oraz równania konstytutywne [25]

$$(2.2) \quad T_a^A = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \Delta_A q^a}, \quad t_a = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial q^a}.$$

W równaniach tych symbole f_a oznaczają obciążenia zewnętrzne, T_a^A i t_a składowe stanu naprężenia, a q^a współrzędne uogólnione cząstki d . Symbol $\bar{\Delta}_A \varphi(d)$ oznacza lewe różnice funkcji $\varphi(d)$, a $\Delta_A \varphi(d)$ prawe różnice. Funkcja

$$\varepsilon = \varepsilon(d, q^a, \Delta_A q^a)$$

jest potencjałem sprężystym elementu dyskretnego E_d [25]. W liniowej teorii funkcję tę można przedstawić w postaci jednorodnej kwadratowej funkcji zmiennych konstytutywnych

$$q^a \quad \text{i} \quad \eta_A^a.$$

Zatem

$$\varepsilon = \frac{1}{2} A_{ab}^{A\Phi} \eta_A^a \eta_\Phi^b + B_{ab}^A \eta_A^a q^b + \frac{1}{2} C_{ab} q^a q^b.$$

Stąd otrzymujemy następującą postać liniowych równań konstytutywnych:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} T_a^A &= A_{ab}^{A\Phi} \eta_\Phi^b + B_{ab}^A q^b, \\ -t_a &= B_{ba}^A \eta_A^b + C_{ab} q^b. \end{aligned}$$

Wielkości $A_{ab}^{A\Phi}$, B_{ab}^A , C_{ab} charakteryzują własności sprężyste elementu dyskretnego E_d . Funkcje odwrotne do (2.3) można przedstawić w postaci następującej:

$$(2.4) \quad \eta_A^a = a_{A\Phi}^{ab} T_b^\Phi - b_A^{ab} t_b, \quad q^a = b_\Phi^{ba} T_b^\Phi - c^{ab} t_b.$$

Wielkości q^a jako współrzędne uogólnione cząstki d są od siebie niezależne. Natomiast wielkości η_A^a muszą spełniać pewne równania, które dla struktury regularnej mają postać

$$(2.5) \quad \Delta_{[A} \eta_{\Phi]}^a = 0, \quad \Delta_A q^a - \eta_A^a = 0.$$

Równania (2.5) można nazwać warunkami nierozdzielności.

Równania równowagi (2.1) będą tożsamościowo spełnione, jeżeli składowe stanu naprężenia T_a^A i t_a wyrazimy przez pewne funkcje:

$$E_a: D \rightarrow R, \quad R_a: D \rightarrow R$$

oraz przez funkcje

$$G_a: D \rightarrow R,$$

spełniające równania

$$(2.6) \quad \tilde{\nabla}^2 G_a + f_a = 0, \quad \tilde{\nabla}^2 \equiv \delta^{A\Phi} \bar{A}_A \bar{A}_\Phi,$$

w następujący sposób

$$(2.7) \quad \begin{aligned} T_a^\Phi &= \epsilon^{A^{m-2} \Phi \Psi} L_A^{m-2} (\bar{A}_\Psi E_a + L_\Psi R_a) + \delta^{\Phi \Psi} \bar{A}_\Psi G_a, \\ t_a &= \epsilon^{A^{m-1} \Phi} L_A^{m-1} \bar{A}_\Phi R_a, \end{aligned}$$

gdzie

$$\epsilon^{A^{m-2} \Phi \Psi} \equiv \epsilon^{A_1 A_2 \dots A_{m-2} \Phi \Psi}$$

jest symbolem Ricciego,

$$L_A^{m-2} \equiv L_{A_1} L_{A_2} \dots L_{A_{m-2}},$$

przy czym symbol L_{A_i} oznacza nieprzemienne operacje liniowe

$$L_{A_i}: C^d(\tilde{D}) \rightarrow C^d(\tilde{D}),$$

$$C^d(\tilde{D}) = \{\varphi: (\varphi: \tilde{D} \rightarrow R)\}, \quad \tilde{D} \subset D,$$

o których zakładamy, że są przemienne z lewymi różnicami oraz że

$$\{\varphi \equiv 0\} \subset \text{Ker } L_{A_i} = \{\varphi \in C^d(\tilde{D}): L_{A_i} \varphi = 0\}.$$

Symbol R oznacza zbiór liczb rzeczywistych. Zatem funkcje E_a, R_a, G_a są funkcjami naprężeń w dyskretnej teorii sprężystości.

Podstawiając prawe strony (2.7) do (2.4), a otrzymane wyrażenia do (2.5) uzyskamy następujące równania dla funkcji naprężeń E_a i R_a :

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \Delta_{[\Omega} a_{\Gamma]\Phi}^{ab} [\epsilon^{A^{m-2} \Phi \Psi} L_A^{m-2} (\bar{A}_\Psi E_b + L_\Psi R_b) + \delta^{\Phi \Psi} \bar{A}_\Psi G_b] - \\ - \Delta_{[\Omega} b_{\Gamma]}^{ab} \epsilon^{A^{m-1} \Phi} L_A^{m-1} \bar{A}_\Phi R_b = 0, \\ \Delta_\Gamma b_\Phi^{ba} [\epsilon^{A^{m-2} \Phi \Psi} L_A^{m-2} (\bar{A}_\Psi E_b + L_\Psi R_b) + \delta^{\Phi \Psi} \bar{A}_\Psi G_b] - \\ - \Delta_\Gamma c^{ab} \epsilon^{A^{m-1} \Phi} L_A^{m-1} \bar{A}_\Phi R_b - a_{\Gamma\Phi}^{ab} [\epsilon^{A^{m-2} \Phi \Psi} L_A^{m-2} (\bar{A}_\Psi E_b + L_\Psi R_b) + \\ + \delta^{\Phi \Psi} \bar{A}_\Psi G_b] + b_\Gamma^{ab} \epsilon^{A^{m-1} \Phi} L_A^{m-1} \bar{A}_\Phi R_b = 0. \end{aligned}$$

Występujące w (2.8) funkcje G_a należy traktować jako znane. Funkcje te należy wyznaczyć z równań (2.6). Równania (2.8) można nazwać równaniami naprężeniowymi liniowej dyskretnej teorii sprężystości.

3. FUNKCJE NAPRĘŻEŃ W TEORII DYSKRETNYCH OŚRODKÓW COSSERATÓW

Dyskretny ośrodek Cosseratów jest przypadkiem szczególnym dyskretnego ośrodka sprężystego, dla którego równania naprężeniowe przedstawiono w poprzednim punkcie. Rozważany w tym punkcie ośrodek Cosseratów jest dyskretnym układem sprężystym D ciał sztywnych $d \in D$, z których każde ma q^a ($a=1, 2, \dots, 6$) stopni swobody.

W teorii liniowej przyjmuje się [27]

$$(3.1) \quad \begin{aligned} q^a &= \delta_k^a u^k + \delta_k^{a-3} v^k, & T_a^A &= \delta_a^k T_k^A + \delta_{a-3}^k M_k^A, \\ t_a &= \delta_{a-3}^k \epsilon_{kp}{}^r l_A^p T_r^A, \\ f_a &= \delta_a^k f_k + \delta_{a-3}^k n_k, & k, p, r &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Zatem równania równowagi mają postać

$$\bar{\Delta}_A T_k^A + f_k = 0, \quad \bar{\Delta}_A M_k^A + \epsilon_{kp}{}^r l_A^p T_r^A + n_k = 0.$$

Przyjmując

$$(3.2) \quad \eta_A^a = \delta_k^a \eta_A^k + \delta_k^{a-3} \kappa_A^k$$

oraz uwzględniając niezmienniczość funkcji ε względem przesunięć w czasoprzestrzeni możemy pominąć zależność ε od u^k oraz przyjąć, podobnie jak w teorii kontynuualnej, zamiast zmiennych v^k zmienne konstytutywne opisujące różnice pomiędzy całkowitymi obrotami cząstek a obrotami wywołanymi tylko polem przesunięć

$$\gamma_A^k = \Delta_A u^k + \epsilon_{pr}^k v^r \Delta_A \psi^p,$$

gdzie $z^k = \psi^k(d)$ oznacza współrzędne miejsca w przestrzeni fizycznej zajętego przez środek masy ciała $d \in D$.

Dalsze rozważania przeprowadzimy dla ośrodków o strukturze spełniającej warunek

$$\Delta_\Phi \Delta_A \psi^k \equiv \Delta_\Phi l_A^k \equiv l_{\Phi A}^k \equiv 0.$$

Z równań (2.5) wynikają dla tego przypadku następujące warunki nierozdzielności:

$$(3.3) \quad \Delta_{[\Phi} \gamma_{A]}^k + \epsilon_{pr}^k l_{[\Phi}^p \kappa_{A]}^r = 0, \quad \Delta_{[\Phi} \kappa_{A]}^k = 0.$$

Liniowe związki fizyczne pomiędzy wielkościami γ_A^k , κ_A^k oraz T_k^A i M_k^A mają teraz postać

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \gamma_A^k &= a_{A\Phi}^{kl} T_l^\Phi + b_{A\Phi}^{kl} M_l^\Phi, \\ \kappa_A^k &= b_{\Phi A}^{lk} T_l^\Phi + f_{A\Phi}^{kl} M_l^\Phi. \end{aligned}$$

Związki pomiędzy funkcjami naprężeń a składowymi stanu naprężenia otrzymamy z (2.7) przyjmując

$$E_a = \delta_a^k E_k + \delta_{a-3}^k S_k, \quad G_a = \delta_a^k G_k + \delta_{a-3}^k H_k, \quad R_a = \delta_a^k R_k + \delta_{a-3}^k V_k.$$

Ze wzorów (2.7)₂ i (3.1)₃ wynika, że można przyjąć $R_k \equiv 0$. Stąd

$$(3.5) \quad T_k^\Phi = \epsilon^{A^{m-2} \Phi \Psi} L_A^{m-2} \bar{\Delta}_\Psi E_k + \delta^{\Phi \Psi} \bar{\Delta}_\Psi G_k.$$

Z kolei korzystając z (3.5), (2.7)₂ i (3.1)₃ otrzymamy

$$L_\Psi V_k = \epsilon_{kp}{}^r (l_\Psi^p E_r + \epsilon_{\Psi\Phi}^* \delta^{\Omega\Phi} l_\Omega^p G_r),$$

przy czym wielkości $\epsilon_{\Psi\Phi}^*$ spełniają równania operatorowe

$$\epsilon_{\Psi\Phi}^* \epsilon^{A^{m-2} \Gamma \Phi} L_A^{m-2} = \delta_\Psi^\Gamma.$$

Zatem

$$(3.6) \quad M_k^\Phi = \epsilon^{A^{m-2} \Phi \Psi} L_A^{m-2} (\bar{A}_\Psi S_k + \epsilon_{kp}{}^r l_\Psi^p E_r) + \delta^{\Phi \Psi} (\bar{A}_\Psi H_k + \epsilon^r{}_{pk} l_\Psi^p G_r).$$

Funkcje G_k i H_k muszą spełniać równania następujące:

$$(3.7) \quad \tilde{\nabla}^2 G_k + f_k = 0, \quad \tilde{\nabla}^2 H_k + n_k = 0.$$

Równania te wynikają z (2.6). Podstawiając prawe strony (3.5) i (3.6) do (3.4), a uzyskane wyrażenia do (3.3) otrzymamy równania dla funkcji naprężeń:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & \Delta_{[\Omega} a_{\Gamma]}^{kl} \Phi [\epsilon^{A^{m-2} \Phi \Psi} L_A^{m-2} \bar{A}_\Psi E_l + \delta^{\Phi \Psi} \bar{A}_\Psi G_l] + \\ & + \Delta_{[\Omega} b_{\Gamma]}^{kl} \Phi [\epsilon^{A^{m-2} \Phi \Psi} L_A^{m-2} (\bar{A}_\Psi S_l + \epsilon_{lp}{}^r l_\Psi^p E_r) + \delta^{\Phi \Psi} (\bar{A}_\Psi H_l + \epsilon^r{}_{pl} l_\Psi^p G_r)] + \\ & + \epsilon^k{}_{pr} \{ l_{[\Omega}^p b_{\Gamma]}^{lr} \Phi [\epsilon^{A^{m-2} \Phi \Psi} L_A^{m-2} \bar{A}_\Psi E_l + \delta^{\Phi \Psi} \bar{A}_\Psi G_l] + \\ & + l_{[\Omega}^p f_{\Gamma]}^r \Phi [\epsilon^{A^{m-2} \Phi \Psi} L_A^{m-2} (\bar{A}_\Psi S_l + \epsilon_{lm}{}^n l_\Psi^m E_n) + \\ & + \delta^{\Phi \Psi} (\bar{A}_\Psi H_l + \epsilon^m{}_{nl} l_\Psi^m G_n)] \} = 0, \\ & \Delta_{[\Omega} b_{\Gamma]}^{kl} \Phi [\epsilon^{A^{m-2} \Phi \Psi} L_A^{m-2} \bar{A}_\Psi E_l + \delta^{\Phi \Psi} \bar{A}_\Psi G_l] + \\ & + \Delta_{[\Omega} f_{\Gamma]}^{kl} \Phi [\epsilon^{A^{m-2} \Phi \Psi} L_A^{m-2} (\bar{A}_\Psi S_l + \epsilon_{lp}{}^r l_\Psi^p E_r) + \\ & + \delta^{\Phi \Psi} (\bar{A}_\Psi H_l + \epsilon^r{}_{pl} l_\Psi^p G_r)] = 0. \end{aligned}$$

Równania te upraszczają się znacznie, gdy $f_k \equiv 0$ i $n_k \equiv 0$. Dla tego przypadku funkcje G_k i H_k , uwzględniające wpływ obciążeń, nie wystąpią w równaniach (3.8).

Ze wzorów (3.5) i (3.6) można otrzymać cały szereg przypadków szczególnych. Na przykład przyjmując

$$\tilde{\nabla}^{\Psi \Phi} = \epsilon^{A^{m-2} \Psi \Phi} L_A^{m-2}$$

oraz dobierając odpowiednio operacje L_A otrzymamy wzory podane w pracy [27].

Dla zagadnień tarczowego i płytowego przy $m = \Pi$ i $f_k = n_k = 0$ równania (3.8) omówiono w pracy [30].

4. FUNKCJE NAPRĘŻEŃ W LINIOWEJ TEORII SPRĘŻYSTYCH JEDNOBIEGUNOWYCH CIAŁ DYSKRETYZOWANYCH

Ciało dyskretyzowane [22] jest jednobiegunowym ciałem dyskretyzowanym, gdy zbiór D jest co najwyżej przeliczalnym zbiorem punktów materialnych $d \in D$. Zatem

$$(4.1) \quad q^a = \delta_k^a u^k, \quad \eta_A^a = \delta_k^a \eta_A^k,$$

natomiast równania równowagi przyjmują postać

$$(4.2) \quad \bar{A}_A T_k^A + f_k = 0, \quad \epsilon_{kp}{}^r l_A^p T_r^A = 0.$$

Ze względu na równania (4.2)₂ celowe jest wprowadzenie, jak w pracy [10], nowego tensora stanu naprężenia $p^{A\Phi}$ i odkształcenia $\gamma_{A\Phi}$. Równania równowagi mają teraz postać

$$(4.3) \quad \bar{A}_A p^{A\Phi} + q^\Phi = 0, \quad p^{[A\Phi]} = 0,$$

a warunki nierozdzielności postać następującą:

$$(4.4) \quad \Delta_{[\Gamma} \Delta_{[\Omega} \gamma_{\Lambda] \Phi]} = 0.$$

Liniowe związki fizyczne pomiędzy składowymi stanu odkształcenia i składowymi stanu naprężenia mają postać

$$(4.5) \quad \gamma_{\Lambda \Phi} = a_{\Lambda \Phi \Gamma \Omega} p^{\Gamma \Omega}.$$

Przyjmując

$$E_k = (e^{A^{m-2} \Gamma \Omega} L_A^{m-2} \bar{\Delta}_\Omega F) l_{\Gamma k}$$

oraz

$$\delta^{\Phi \Psi} \bar{\Delta}_\Psi G_k = 2(\delta^{\Psi \Phi} \bar{\Delta}_\Psi Q^\Gamma - \delta^{\Phi \Gamma} \bar{\Delta}_\Psi Q^\Psi) l_{\Gamma k}$$

i biorąc część symetryczną względem wskaźników Φ i Γ otrzymamy

$$(4.6) \quad p^{\Phi \Gamma} = e^{A^{m-2} \Phi \Psi} e^{A^{m-2} \Gamma \Omega} L_{(A}^{m-2} L_{\Lambda)}^{m-2} \bar{\Delta}_\Psi \bar{\Delta}_\Omega F + 2\delta^{\Psi \Phi} (\bar{\Delta}_\Psi Q^\Gamma) - \delta^{\Phi \Gamma} \bar{\Delta}_\Psi Q^\Psi,$$

przy czym funkcje Q^A muszą spełniać równania

$$\tilde{\nabla}^2 Q^A + q^A = 0.$$

Korzystając z (4.6), (4.5) i (4.4) otrzymamy następujące równania dla funkcji naprężeń:

$$(4.7) \quad \Delta_{[\Xi} \Delta_{[\Pi} a_{\Sigma] \Theta] \Phi \Gamma} (e^{A^{m-2} \Phi \Psi} e^{A^{m-2} \Gamma \Omega} L_{(A}^{m-2} L_{\Lambda)}^{m-2} \bar{\Delta}_\Psi \bar{\Delta}_\Omega F + 2\delta^{\Psi \Phi} (\bar{\Delta}_\Psi Q^\Gamma) - \delta^{\Phi \Gamma} \bar{\Delta}_\Psi Q^\Psi) = 0.$$

Równania te upraszczają się znacznie dla $q^A \equiv 0$.

5. PRZYKŁADY

Rozważmy tarczę perforowaną regularnym układem otworów trójkątnych (rys. 1.). Przeprowadzenie ścisłej analizy stanu naprężenia metodami mechaniki ośrodków ciągłych dla tej tarczy jest praktycznie niemożliwe ze względu na perforację. Jako model obliczeniowy przyjmijmy zatem jednobiegunowe ciało dyskretyzowane, którego rząd struktury różnicowej wynosi dwa. Wzajemne oddziaływania cząstek d , $f_I d$, $f_{II} d$ elementu dyskretnego E_d realizowane są przez elementy skończone B_d pokazane na rys. 1.

Równanie dla funkcji naprężeń otrzymamy z (4.7). Dla tarczy jednorodnej i obciążonej tylko wzdłuż brzegów równanie to ma postać

$$(5.1) \quad \tilde{a}^{\Phi \Theta \Lambda \Lambda} \Delta_\Phi \Delta_\Theta \bar{\Delta}_\Lambda \bar{\Delta}_\Lambda F = 0,$$

gdzie

$$\tilde{a}^{\Phi \Theta \Lambda \Lambda} = e^{\Phi \Gamma} e^{\Theta \Omega} e^{A \Xi} e^{A \Sigma} a_{\Gamma \Omega \Xi \Sigma}.$$

Przyjmijmy funkcję naprężeń w następującej postaci:

$$(5.2) \quad F = \frac{b}{2} x^1 (x^1 + l) x^2.$$

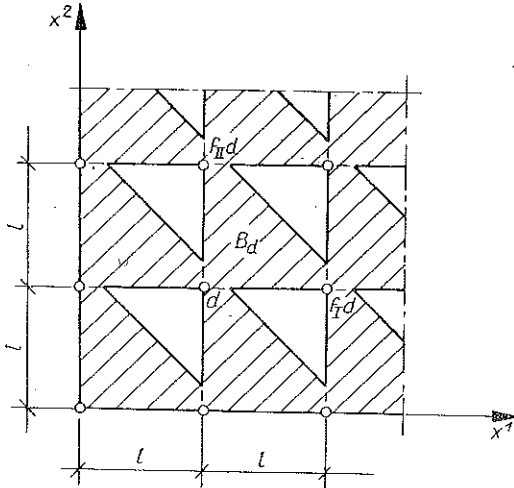
Łatwo sprawdzić, że funkcja (5.2) spełnia tożsamościowo równanie (5.1).

Składowe stanu naprężenia określone przez funkcję (5.2) otrzymamy ze wzorów (4.6), które dla tego przypadku mają postać

$$p^{\Phi\Gamma} = e^{\Phi\Psi} e^{\Gamma\Omega} \bar{\Delta}_\Psi \bar{\Delta}_\Omega F.$$

Stąd

$$p^{II} = 0, \quad p^{III} = p^{III} = -bl^2 x^1, \quad p^{III} = bl^2 x^2,$$



Rys. 1

a ponieważ

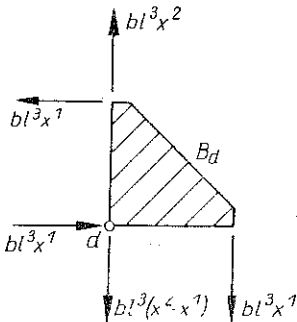
$$T_k^A = p^{A\Phi} l_{\Phi k},$$

przeto

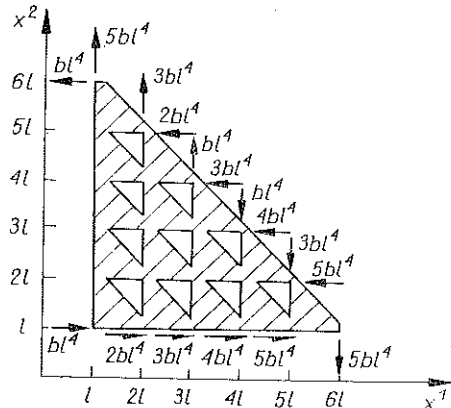
$$(5.3) \quad T_1^I = 0, \quad T_1^{II} = T_2^I = -bl^3 x^1, \quad T_2^{II} = bl^3 x^2.$$

Stan obciążenia dowolnego elementu przedstawia rys. 2.

Znając stan obciążenia dowolnego elementu można łatwo analizować stany naprężenia i obciążenia tarcz o dowolnych kształtach zbudowanych z elementów

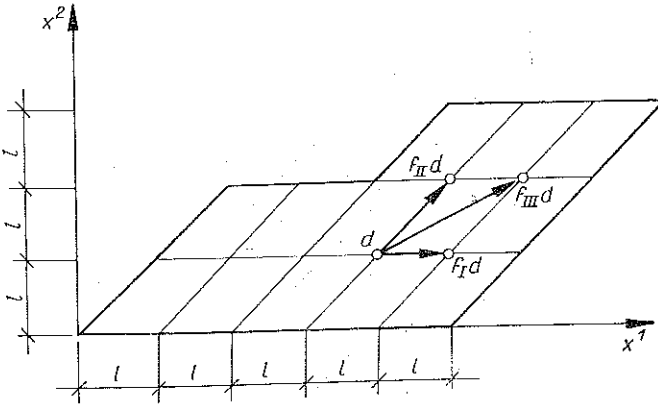


Rys. 2



Rys. 3

B_d . Na przykład, dla tarczy trójkątnej w układzie przedstawionym na rys. 3 stan naprężenia (5.3) jest wywołany przez obciążenie podane na tym rysunku. Jest to obciążenie liniowo zmienne. Przyjmując różne funkcje naprężeń oraz stosując zasadę superpozycji można tym sposobem rozwiązać szereg praktycznie ważnych przypadków.



Rys. 4

Na koniec rozważmy jeszcze tarczę przedstawioną na rys. 4. Jest to tarcza równoległoboczna podzielona na elementy skończone B_d o kształcie pokazanym na rysunku.

Rząd struktury różnicowej tego jednobiegunowego ciała dyskretyzowanego wynosi trzy.

Zakładając, że tarcza jest jednorodna i obciążona tylko wzdłuż brzegów, otrzymamy z (4.7) następujące równania dla funkcji naprężeń:

$$(5.4) \quad e^{A\Xi^R} e^{A\Xi\Pi} e^{\Psi\Phi\Gamma} e^{Y\Theta\Omega} a_{\Gamma\Omega R\Pi} \times \Delta_\Phi \Delta_\Theta \bar{\Delta}_\Xi \bar{\Delta}_\Sigma F_{AA} = 0,$$

gdzie

$$F_{AA} = L_{(A} L_{A)} F.$$

Składowe stanu naprężenia można wyznaczyć ze wzoru

$$(5.5) \quad p^{AA} = e^{\Phi\Omega A} e^{\Psi\Gamma A} \bar{\Delta}_\Omega \bar{\Delta}_\Gamma F_{\Phi\Psi}.$$

Przyjmując następujące funkcje naprężeń:

$$(5.6) \quad F_{II} = ax^1(x^1 + l), \quad F_{IIII} = bx^2(x^2 + l),$$

a pozostałe $F_{AA} \equiv 0$, zapewnimy spełnienie równań (5.4) tożsamościowo.

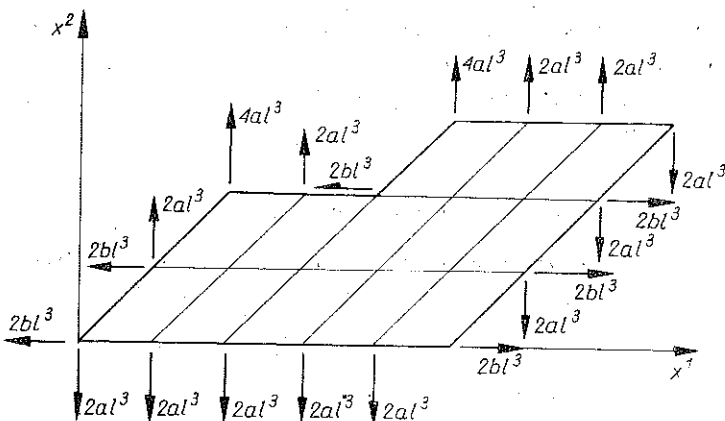
Podstawiając (5.6) do (5.5) otrzymamy następujące składowe stanu naprężenia:

$$p^{II} = 2bl^2, \quad p^{IIII} = p^{IIII} = p^{IIII} = p^{IIII} = 0, \\ p^{IIII} = 8al^2, \quad p^{IIII} = p^{IIII} = -4al^2, \quad p^{IIII} = 2bl^2.$$

Stąd

$$T_1^I = 2bl^2, \quad T_1^{II} = T_1^{III} = T_2^I = 0, \quad T_2^{II} = 4al^3, \quad T_2^{III} = -2al^3.$$

Stan obciążenia dowolnego elementu przedstawia rys. 5.



Rys. 6

Stan ten jest wywołany obciążeniem tarczy podanym na rys. 6.

6. UWAGI KOŃCOWE

Szereg technicznie ważnych zagadnień można rozwiązać metodami wykazującymi duże podobieństwo do metod stosowanych w teorii ośrodków ciągłych. Można na przykład obciążenia przedstawić w postaci sum trygonometrycznych; pozwala to sprowadzić równania dla funkcji naprężeń do równań algebraicznych lub do równań różnicowych zwyczajnych. Jednak w tych przypadkach konieczne jest określenie składowych tensora sztywności sprężystej, występujących w równaniach dla funkcji naprężeń.

Pewien sposób wyznaczania tych wielkości dla czworokątnych elementów B_d omówiono w pracy [10]. Wyznaczając składowe tensora sztywności należy nałożyć na deformację każdego elementu ciągłego skończonego B_d więzy, które wyrażą odkształcenia w dowolnym punkcie elementu B_d przez funkcje określające deformację elementu dyskretnego E_d . To znaczy przyjmuje się, że odkształcenie elementu B_d jest określone całkowicie przez przemieszczenia jego wierzchołków. Funkcje aproksymujące odkształcenia elementu B_d mają to samo znaczenie co funkcje kształtu w metodzie elementów skończonych. Tym samym naprężenia wewnątrz elementu B_d można określić dopiero po przyjęciu tych funkcji.

Siły zaznaczone na rys. 5 aproksymują ciągły rozkład naprężeń wzdłuż brzegów elementu. Gdy siły te są znane, to naprężenia wewnątrz elementu można także określić za pomocą równań metody elementów skończonych

$$(6.1) \quad \{\sigma\} = [S]^e ([k]^e)^{-1} \{F\}^e,$$

gdzie $\{\sigma\}$ jest macierzą utworzoną z naprężeń $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots$, $[S]^e$ macierzą naprężeń elementu, $[k]^e$ macierzą sztywności oraz $\{F\}^e$ macierzą utworzoną z sił węzłowych. Macierz sztywności zależy od funkcji kształtu. Macierz ta w rozważanym przypadku nie może być osobliwa.

Wszystkie wielkości występujące we wzorze (6.1) zostały dokładnie omówione w licznych pracach poświęconych metodzie elementów skończonych, m. in. w pracy [28]. Widać więc, że funkcje naprężeń w dyskretnej teorii sprężystości pozwalają w wielu przypadkach nader prosto wyznaczyć siły węzłowe, które można wykorzystać do dalszej analizy układu.

PODZIĘKOWANIE

Autor składa serdeczne podziękowanie Panu Prof. Czesławowi WOŹNIAKOWI za liczne rady i wskazówki w czasie pracy nad artykułem.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. D. E. CARLSON, *Stress functions for plane problems with couple-stresses*, ZAMP, **17**, 6, 1966.
2. S. C. COWIN, *Stress functions for elasticity*, Int. J. Solids Structures, **6**, 1970.
3. W. S. DORN, A. SCHILD, *A converse to the virtual work theorem for deformable solids*, Quart. Appl. Math., **14**, 1956.
4. B. FINZI, *Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui*, Rend. Lincei, **16**, 6, 1934.
5. W. GINTHER, *Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuum*, Abh. Braunschweig. Wiss. Ges., **10**, 1958.
6. S. KESSEL, *Die Spannungsfunktionen des Cosserat-Kontinuum*, ZAMM, **47**, 5, 1967.
7. M. KLEIBER, Cz. WOŹNIAK, *On equations of the linear theory of elastic lattice shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **19**, 3, 1971.
8. M. KLEIBER, *Statics of elastic lattice-type shells*, Arch. Mech. Stos., **25**, 2, 1973.
9. S. KONIECZNY, F. PIETRAS, Cz. WOŹNIAK, *O liniowych zagadnieniach dyskretnej teorii sprężystości*. I, Rozpr. Inż., **20**, 2, 1972.
10. W. KUFEL, *O liniowych zagadnieniach teorii sprężystości ciał dyskretyzowanych*, Mech. Teoret. i Stos., **11**, 1, 1973.
11. R. D. MINDLIN, *Influence of couple-stresses on stress-concentrations*, Exper. Mech., **3**, 1, 1963.
12. R. D. MINDLIN, *Representation of displacements and stresses in plane strain with couple-stresses*, JUTAM — Symposium, 1963 Tbilisi.
13. N. SANDRU, *On some problems of the linear theory of asymmetric elasticity*, Int. J. Eng. Sci., **4**, 1, 1966.
14. H. SCHAEFER, *Die Spannungsfunktionen eines Kontinuums mit Momentenspannungen*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **15**, 1, 1967.
15. H. SCHAEFER, *Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums und das elastischen Körpers*, ZAMM, **33**, 1953.
16. H. SCHAEFER, *Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums; Statische Deutung und Randwerte*, Ingenieur-Archiv., **28**, 1959.
17. H. SCHAEFER, *Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen Cosserat-Kontinuum*, Misz. Angew. Mech. Festschrift W. Tollmien, Akad. Verlag, Berlin 1962.
18. M. STIPPES, *On stress functions in classical elasticity*, Quart. Appl. Meth., **24**, 1966.
19. M. SUCHAR, *Stress function in the "second" plane problem of micropolar elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **20**, 11, 1972.

20. J. J. TELEGA, *Metoda elementów skończonych w mechanice ciał odkształcalnych*, Prace IPPT 46, 1973.
21. C. WEBER, *Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums*, Z. Angew. Math. u. Mech., 28, 1948.
22. Cz. WOŹNIAK, *Podstawy mechaniki ciał dyskretyzowanych*, Mech. Teoret. i Stos., 11, 1, 1973.
23. Cz. WOŹNIAK, *Introduction to the difference geometry*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 19, 10, 1971.
24. Cz. WOŹNIAK, *Basic concepts of the difference geometry*, Annales Polon. Math., 28, 1972.
25. Cz. WOŹNIAK, *Discrete elasticity*, Arch. Mech. Stos., 23, 6, 1971.
26. Cz. WOŹNIAK, *Wprowadzenie do mechaniki dyskretnych ciał odkształcalnych*, praca przeznaczona dla uczestników seminarium z teorii ciał dyskretyzowanych. Inst. Mech. U.W., 1971.
27. Cz. WOŹNIAK, *Discrete elastic Cosserat media*, Arch. Mech. Stos., 25, 2, 1973.
28. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
29. K. H. BOJDA, *Funkcje naprężeń w teorii powłok siatkowych*, Rozpr. Inżyn., 21, 3, 1973.
30. K. H. BOJDA, *Analogia tarczowo-płytkowa w teorii dźwigarów siatkowych*, Mech. Teoret. i Stos., 12, 2, 1974.

Резюме

ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ДИСКРЕТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В работе обсуждены решения уравнений равновесия дискретной теории упругости. Функции, выступающие в рассматриваемых решениях, названы функциями напряжений. Используя условия неразделимости и линейные определяющие соотношения выведены уравнения для этих функций. Как частные случаи рассмотрены функции напряжений в теории дискретных сред Коссера, а также в теории однополосных дискретизированных тел. Приведены также примеры иллюстрирующие применение обсужденных функций напряжений.

SUMMARY

THE STRESS FUNCTIONS IN A DISCRETE THEORY OF ELASTICITY

The paper deals with a solution of the equilibrium equations of a discrete theory of elasticity. The functions appearing in these equations are called the stress functions. Using compatibility equations and linear constitutive equations the corresponding equations for the stress functions are derived. As the particular cases the stress functions in a theory of discrete Cosserat media and in theory of monopolar discretized bodies are considered. The examples illustrating the applications of the stress functions discussed above are also presented.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA W GLIWICACH

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 czerwca 1974 r.