ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 25, 3, 463—482, 1977
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

MACIERZOWA ANALIZA PRĘTÓW ZŁOŻONYCH O PRZEKROJU OTWARTYM

PIOTR RAPP, KAZIMIERZ WRZEŚNIOWSKI (POZNAŃ)

Przedstawiono macierzowe sformułowania technicznej teorii zginania i skręcania nieswobodnego prętów złożonych z elementów cienkościennych i zwartych. Pręt może być obciążony siłami poprzecznymi i podłużnymi. Rozpatrzono pręt pryzmatyczny. Nie wprowadza się żadnych ograniczeń ani co do stałych materiałowych poszczególnych elementów składowych, ani co do kształtu przekrojów elementów składowych pręta. Wyznaczono macierzowe równania przemieszczeń poprzecznych pręta, charakterystyki geometryczne przekroju oraz naprężenia normalne i styczne.

Przedstawiona metoda, w przypadku gdy stałe materiałowe nie są zmienne, jest dyskretnym równoważnikiem metody W. Z. WŁASOWA [1], ulepszonej metodą F. BLEICHA [2]. Niniejsza praca jest rozszerzeniem i uogólnieniem pracy [3].

Przedstawiony w pracy sposób ujęcia zagadnienia jest korzystny z punktu widzenia zastosowania do obliczeń maszyn cyfrowych. W zakończeniu podano przykład liczbowy.

OZNACZENIA

p liczba pasm; $i=1, ..., p$, $j=1, ..., p-1$,

n liczba obciążeń podłużnych; $k=1, ..., n$,

m liczba punktów P_ν, w których ma być obliczone naprężenie nomralne; $\nu=1, ..., m$,

$0_{si}\, x_{si}\, y_{si}\, z_{si}$ układ współrzędnych pasma i, gdzie z_{si} jest osią ciężkości, a x_{si}, y_{si} głównymi osiami bezwładności pasma i,

$0_i\, x_i\, y_i\, z_i$ układ współrzędnych pasma i, gdzie z_i jest osią ścinania pasma, a x_i, y_i osiami równoległymi do x_{si}, y_{si},

$0XYZ$ główny układ współrzędnych,

v_{xi}, v_{yi}, φ_i przemieszczenie poprzeczne pasma i w układzie $0_i\, x_i\, y_i$,

r_{xi}, r_{yi} współrzędne punktu 0 w układzie $0_i\, x_i\, y_i$

α_i kąt między osiami x_i i X,

V_x, V_y, Φ przemieszczenia pręta w układzie OXY,

V wektor $V=\mathrm{col}\,[V_x, V_y, \Phi]$,

$\overline{0}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$ układ współrzędnych, którego oś $\overline{Z}$ jest osią ścinania pręta, a $\overline{X}$, $\overline{Y}$ są równoległe do osi obojętnych przekroju pręta,

$\overline{V}_x, \overline{V}_y, \overline{\Phi}$ przemieszczenia pręta w układzie $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$,

$\overline{V}$ wektor $\overline{V}=\mathrm{col}\,[\overline{V}_x, \overline{V}_y, \overline{\Phi}]$,

D_x, D_y współrzędne środka ścinania $\overline{0}$ pręta w układzie $0XY$,

α kąt nachylenia osi $\overline{X}$ do osi X,

S macierz struktury (macierz przylegania rozcięć do pasm zorientowana przez wybór niewiadomych sił w rozcięciach),

C macierz współrzędnych rozcięć,

S_R macierz przylegania obciążeń podłużnych do pasm,

C_R macierz współrzędnych obciążeń podłużnych,
S_σ macierz przylegania punktów P_ν do pasm,
C_σ macierz współrzędnych punktów P_ν,
L macierz transformacji,
E_i moduł Younga pasma i,
G_i moduł Kirchoffa pasma i,
J_{xi}, J_{yi} główne momenty bezwładności pasma i,
$J_{\omega i}$ główny wycinkowy moment bezwładności pasma i,
J_{si} moment bezwładności na czyste skręcanie,
J_x, J_y główne momenty bezwładności przekroju pręta,
J_ω główny wycinkowy moment bezwładności przekroju pręta,
K_1 macierz sztywności pasm na ściskanie,
K_2 macierz stywności pasm na zginanie i skręcanie nieswobodne,
T_{xi}, T_{yi} siły poprzeczne w przekroju pasma i,
$M_{\omega i}$ moment giętnoskrętny w przekroju pasma i,
T_x, T_y siły poprzeczne w przekroju pręta,
M_s moment skręcający w przekroju pręta,
T wektor $T=\mathrm{col}\,[T_x, T_y, M_s]$,
M_x, M_y momenty zginające w przekroju pręta,
B bimoment w przekroju pręta,
M wektor $M=\mathrm{col}\,[M_x, M_y, B]$,
n_j obciążenie styczne w rozciąganiu j,
N wektor $N=\mathrm{col}\,[n_1, ..., n_{p-1}]$,
n_{Rk} obciążenie k-te podłużne,
N_R wektor $N_R=\mathrm{col}\,[n_{R1}, ..., n_{Rn}]$,
F_i siła normalna w przekroju pasma i,
F siła normalna w przekroju pręta,
σ wektor naprężeń normalnych w zadanych punktach P_ν,
τ wektor naprężeń stycznych w rozcięciach.

1. Wstęp

Obliczanie prętów złożonych w zakresie technicznej teorii prętów polega głównie na wyznaczeniu charakterystyk geometrycznych przekroju oraz naprężeń normalnych i stycznych wynikających z obciążeń poprzecznych i podłużnych. Zagadnienie to, szczególnie w zakresie skręcania nieswobodnego dla prętów o złożonych kształtach przekrojów, prowadzi do żmudnych rachunków. Można jednak złożony przekrój pręta rozłożyć myślowo na elementy proste, np. prostokąty, dla których wyznaczenie charakterystyk geometrycznych nie przedstawia trudności. Następnie, korzystając z warunków zgodności przemieszczeń, warunków równowagi i struktury połączeń między elementami prostymi można rozwiązać zagadnienie dla pręta złożonego. Stosując zapis macierzowy można przeprowadzić obliczenia jednocześnie dla zginania i skręcania nieswobodnego. Umożliwia to automatyzację obliczeń, przy czym jest niewielka liczba danych, które mogą być łatwo wyznaczone.

2. Założenia i opis metody

Przyjmujemy następujące założenia: (a) Przekrój poprzeczny pręta jest stały na długości. (b) Stałe materiałowe nie zmieniają się na długości. (c) Poszczególne elementy składowe pręta mogą mieć różne stałe materiałowe. (d) Kontur przekroju

poprzecznego pręta jest nieodkształcalny. (e) Pomija się odkształcenia postaciowe powierzchni środkowej pręta.

Przykład przekroju złożonego przedstawiony jest na rys. 1a. Jako model obliczeniowy przyjmuje się układ pasm powstały przez rozcięcie pręta wzdłuż na dowolną

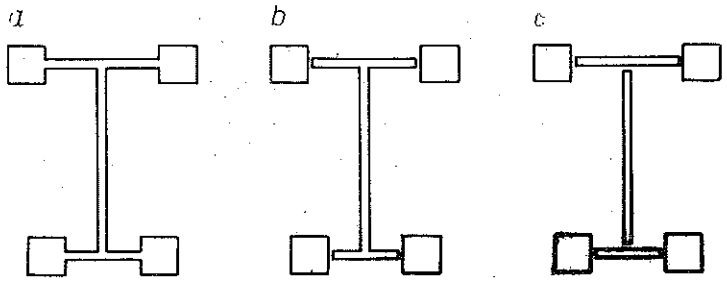

FIG. 1.

liczbę elementów (rys. 1b, 1c). Wzdłuż rozcięć muszą być spełnione warunki zgodności przemieszczeń, a dla całego układu pasm muszą być spełnione warunki równowagi oraz warunki zgodności przemieszczeń poprzecznych. Spełnienie wymienionych warunków gwarantują odpowiednio dobrane siły poprzeczne i momenty skręcające i giętnoskrętne w przekrojach pasm oraz naprężenia styczne działające wzdłuż rozcięć.

Pręt złożony dzielimy na pasma w taki sposób, aby dla każdego pasma znane były charakterystyki geometryczne jego przekroju. Wymaga się przy tym, aby cechy materiałowe każdego pasma były stałe. Zakłada się, że każde rozcięcie rozdziela dwa pasma.

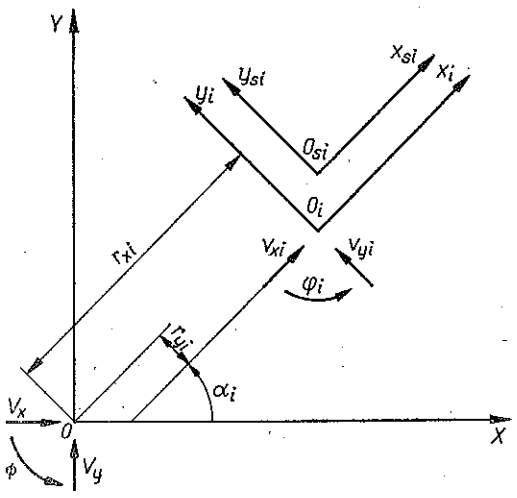

FIG. 2.

Przyjmuje się, że obciążenia poprzeczne zginające i skręcające działają wzdłuż osi Z układu $OXYZ$, a obciążenia podłużne przyłożone są do pręta wzdłuż prostych równoległych do osi Z, przy czym jest ich skończona liczba. Dowolne inne obciążenia poprzeczne i podłużne można z dowolną dokładnością sprowadzić do obciążeń wymienionych wyżej.

Naprężenia styczne wyznaczone zostaną w punktach podziału przekroju na elementy, które są przekrojami pasm. W tych punktach naprężenia styczne wyznaczone zostaną dokładnie. Jeśli podział pręta na pasma jest dostatecznie gęsty, to

naprężenia styczne między rozcięciami można interpolować liniowo. Naprężenia normalne wyznaczone zostaną w dowolnych ustalonych punktach przekroju złożonego pręta.

3. Układy współrzędnych

Dokonujemy podziału pręta na p pasm wprowadzając $p-1$ rozcięć. Pasma indeksujemy literą i: $i=1, 2, ..., p$, a rozcięcia literą j: $j=1, 2, ..., p-1$. Zagadnienie będzie rozpatrywane w głównym układzie współrzędnych $OXYZ$, który przyjmuje się dowolnie. Pasmo i ma dwa lokalne układy współrzędnych $O_{si}\, x_{si}\, y_{si}\, z_{si}$ oraz $O_i\, x_i\, y_i\, z_i$ (rys. 2). Wszystkie układy współrzędnych przyjmuje się jako lewoskrętne.

4. Warunki zgodności i przemieszczeń poprzecznych

Przez α_i oznaczamy kąt między osiami x_i oraz X, a przez r_{xi}, r_{yi} oznaczamy współrzędne środka O w układzie $O_i\, x_i\, y_i$ (rys. 2). Jeśli przez V_x, V_y, Φ oznaczyć przemieszczenia pręta mierzone w układzie OXY, a przez v_{xi}, v_{yi}, φ_i oznaczyć przemieszczenia pasma i w układzie $O_i\, x_i\, y_i$, to zgodnie z rys. 2 i z założeniem nieodkształcalności konturu przekroju poprzecznego pręta warunki zgodności przemieszczeń poprzecznych pasm przyjmują postać

$$
\begin{aligned}
v_{xi} &= V_x \cos\alpha_i + V_y \sin\alpha_i + r_{yi}\,\Phi\,, \\
v_{yi} &= -V_x \sin\alpha_i + V_y \cos\alpha_i - r_{xi}\,\Phi\,, \\
\varphi_i &= \Phi\,.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Przemieszczenia V_x, V_y, Φ oraz v_{xi}, v_{yi}, φ_i są funkcjami zmiennej z wzdłuż osi Z. Przemieszczenia przedstawione na rys. 2 przyjmuje się jako dodatnie.

5. Warunki zgodności przemieszczeń podłużnych

Do każdego pasma wzdłuż linii środkowych rozcięć przykłada się niewiadome obciążenia siłami stycznymi. Niech rozcięcie j rozdziela elementy i oraz m. Jeśli na pasmo i działa obciążenie styczne n_j, to na pasmo m działa obciążenie równe $-n_j$. Dla każdego rozcięcia przyjmujemy jedną niewiadomą funkcję n_j.

Każdej parze uporządkowanej (i,j) przyporządkowuje się liczbę δ_{ij} określoną następująco:

$\delta_{ij}=1$, gdy rozcięcie j przylega do pasma i oraz niewiadoma funkcja n_j przyjęta do obliczeń działa na pasmo i;

$\delta_{ij}=-1$, gdy rozcięcie j przylega do pasma i, na które działa obciążenie $-n_j$;

$\delta_{ij}=0$, gdy rozcięcie j nie przylega do pasma i.

Obciążenie n_j przyjmuje się za dodatnie, gdy jest zgodnie skierowane z osią Z. Prostą, wzdłuż której działa obciążenie n_j, oznaczamy przez l_j.

Niech na pręt działa n danych zewnętrznych obciążeń podłużnych n_{Rk}, $k=1, 2, ..., n$, działających wzdłuż prostych l_{Rk}. Obciążenie n_{Rk} przyjmuje się za dodatnie, gdy jest zgodnie skierowane z osią Z.

Przyporządkowanie obciążeń n_{Rk} do pasm charakteryzują liczby γ_{ik} określono następująco: $\gamma_{ik}=1$, gdy obciążenie n_{Rk} działa na pasmo i; $\gamma_{ik}=0$, w przeciwnym przypadku.

Położenie prostych l_j względem pasm charakteryzują liczby x_{ij}, y_{ij}, ω_{ij}, określone następująco: x_{ij}, y_{ij} są to współrzędne punktu przecięcia prostej l_j i płaszczyzny przekroju pręta w układzie $0_{si}\, x_{si}\, y_{si}$; ω_{ij} jest to współrzędna wycinkowa tego punktu na przekroju pasma i względem bieguna O_i.

Siła normalna F_i w przekroju pasma i jako funkcja zmiennej z wynosi

$$(5.1)\qquad F_i(z)=\sum_{j=1}^{p-1}\int_z^l \delta_{ij} n_j\, dt+\sum_{l=1}^{p}\int_z^l \gamma_{ik} n_{Rk}\, dt+F_i(l),$$

gdzie l jest długością pręta, a $F_i(l)$ jest siłą normalną działającą w przekroju $z=l$ pasma i (rys. 3).

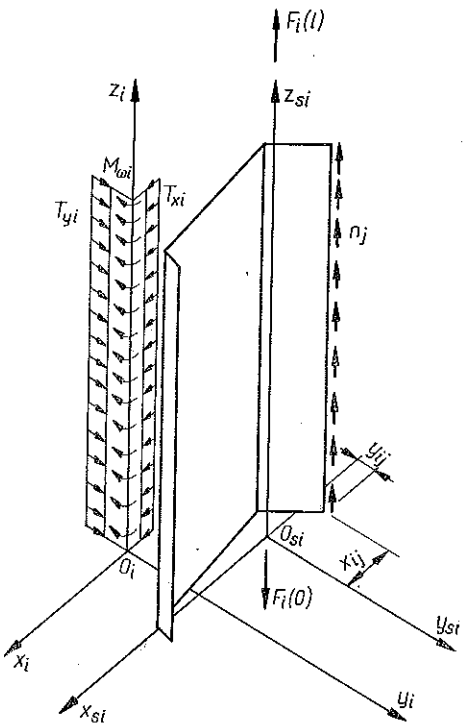

FIG. 3.

Przemieszczenie podłużne u_{ij} punktu leżącego na prostej l_j przylegającej do pasma i jest wywołane zginaniem pasma i, deplanacją przekroju pasma i, działaniem siły osiowej F_i oraz przemieszczeniem początkowym z_{0i}. W związku z powyższym przemieszczenie u_{ij}, jako funkcja zmiennej, z jest równe

$$(5.2)\qquad u_{ij}=-(x_{ij}v'_{xi}+y_{ij}v'_{yi}+\omega_{ij}\varphi'_i)+\frac{1}{E_i A_i}\int_0^z F_i\, dt+z_{0i}.$$

Jeśli pasma i oraz m sąsiadują poprzez rozcięcie j, to warunek zgodności przemieszczeń podłużnych ma postać

$$u_{ij}=u_{mj}.$$

Stąd ze wzorów (5.1) i (5.2) po dwukrotnym zróżniczkowaniu względem z otrzymuje się

$$(5.3)\qquad \sum_{j=1}^{p-1}\left[\frac{\delta_{ij}}{E_i A_i}-\frac{\delta_{mj}}{E_m A_m}\right]n_j+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\gamma_{ik}}{E_i A_i}-\frac{\gamma_{mk}}{E_m A_m}\right]n_{Rk}+$$
$$+(x_{ij}v'''_{xi}+y_{ij}v'''_{yi}+\omega_{ij}\varphi'''_i)-(x_{mj}v'''_{xm}+y_{mj}v'''_{ym}+\omega_{mj}\varphi'''_m)=0.$$

Równanie (5.3) układa się dla każdego rozcięcia.

6. Ogólne równania równowagi

Położenie prostych l_{Rk}, wzdłuż których działają obciążenia podłużne n_{Rk} względem pasm charakteryzują liczby $x_{Rik}, y_{Rik}, \omega_{Rik}$: x_{Rik}, y_{Rik} są to współrzędne punktu przecięcia prostej l_{Rk} i płaszczyzny przekroju pręta w układzie $O_{si}\, x_{si}\, y_{si}$; ω_{Rik} jest to współrzędna wycinkowa tego punktu na przekroju pasma i względem bieguna O_i.

Siły poprzeczne T_{xi}, T_{yi} oraz moment giętnoskrętny $M_{\omega i}$ w przekroju pasma i są następujące:

$$
\begin{aligned}
T_{xi} &= -E_i J_{yi} v_{xi}''' + \sum_{j=1}^{p-1} x_{ij}\,\delta_{ij}\,n_j + \sum_{k=1}^{n} x_{Rik}\,\gamma_{ik}\,n_{Rk}\,,\\
T_{yi} &= -E_i J_{xi} v_{yi}''' + \sum_{j=1}^{p-1} y_{ij}\,\delta_{ij}\,n_j + \sum_{k=1}^{n} y_{Rik}\,\gamma_{ik}\,n_{Rk}\,,\\
M_{\omega i} &= -E_i J_{\omega i} \varphi_i''' + \sum_{j=1}^{p-1} \omega_{ij}\,\delta_{ij}\,n_j + \sum_{k=1}^{n} \omega_{Rik}\,\gamma_{ik}\,n_{Rk}\,.
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Przez T_x, T_y i M_s oznacza się siły poprzeczne w pręcie od obciążenia zewnętrznego. Zgodnie z rys. 4 ogólne równania równowagi układu pasm mają postać

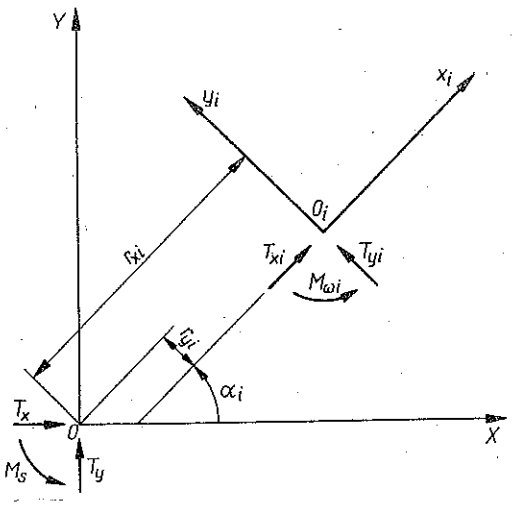

FIG. 4.

$$
\begin{aligned}
T_x &= \sum_{i=1}^{p} [T_{xi}\cos\alpha_i - T_{yi}\sin\alpha_i]\,,\\
T_y &= \sum_{i=1}^{p} [T_{xi}\sin\alpha_i + T_{yi}\cos\alpha_i]\,,\\
M_s &= \sum_{i=1}^{p} [T_{xi}\,r_{yi} - T_{yi}\,r_{xi} + M_{\omega i}]\,.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

7. Macierzowe sformułowanie równań zgodności przemieszczeń

Definiujemy następujące macierze.

1) Macierz struktury

$$S=[\delta_{ij}].$$

2) Macierz transformacji

$$L=\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & r_{y1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos\alpha_p & \sin\alpha_p & r_{yp} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & -r_{x1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -\sin\alpha_p & \cos\alpha_p & -r_{xp} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3) Macierz współrzędnych rozcięć

$$C=\begin{bmatrix} x_{ij}\,\delta_{ij} \\ \cdots \\ y_{ij}\,\delta_{ij} \\ \cdots \\ \omega_{ij}\,\delta_{ij} \end{bmatrix}.$$

4) Macierz przylegania obciążeń podłużnych do pasm

$$S_R=[\gamma_{ik}].$$

5) Macierz sztywności na ściskanie

$$K_1=\operatorname*{diag}_i\left[\frac{1}{E_i\,A_i}\right].$$

Ponadto rozważamy wektory następujące:

$$V=\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ \Phi \end{bmatrix}, \quad N=\begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{p-1} \end{bmatrix}, \quad N_R=\begin{bmatrix} n_{R1} \\ \vdots \\ n_{Rn} \end{bmatrix}.$$

Opierając się na powyższych oznaczeniach układ równań (5.3) dla każdego $j=1, 2, \ldots, p-1$ przyjmuje w zapisie macierzowym postać

$$S^T K_1 SN+C^T LV'''+S^T K_1 S_R N_R=0, \tag{7.1}$$

gdzie S^T i C^T oznaczają macierze transponowane do S i C.

Macierz $S^T K_1 S$ jest zawsze nieosobliwa. Stąd po przekształceniu wzoru (7.1) otrzymujemy

$$N=-P_v V'''-P_R N_R, \tag{7.2}$$

gdzie

$$P_v=(S^T K_1 S)^{-1} C^T L, \qquad P_R=(S^T K_1 S)^{-1} S^T K_1 S_R. \tag{7.3}$$

8. Macierzowe sformułowanie równań zginania i skręcania nieswobodnego

Wprowadźmy oznaczenia

$$T=\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ M_s \end{bmatrix}, \qquad T_v=\begin{bmatrix} T_{x1} \\ \vdots \\ T_{xp} \\ T_{y1} \\ \vdots \\ T_{yp} \\ M_{\omega 1} \\ \vdots \\ M_{\omega p} \end{bmatrix}.$$

Ponadto definiujemy macierze następujące:

1) Macierz współrzędnych obciążeń podłużnych

$$C_R=\begin{bmatrix} x_{Rik}\,\gamma_{ik} \\ \cdots \\ y_{Rik}\,\gamma_{ik} \\ \cdots \\ \omega_{Rik}\,\gamma_{ik} \end{bmatrix}.$$

2) Macierz sztywności na zginanie

$$K_2=\left[\begin{array}{c|c|c} \ddots\ -E_i J_{yi}\ \ddots & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots\ -E_i J_{xi}\ \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots\ -E_i J_{\omega i}\ \ddots \end{array}\right].$$

Równania równowagi (6.2) w zapisie macierzowym przyjmują postać

$$T=L^T T_v.$$

Korzystając z równań (6.1) wektorowi T_v nadamy postać

$$T_v=K_2 L V'''+CN+C_R N_R,$$

zatem z obu wzorów mamy

$$T=L^T K_2 LV'''+L^T CN+L^T C_R N_R.$$

Podstawiając do tego równania wektor N ze wzoru (7.2) otrzymuje się macierzową postać równań zginania i skręcania:

$$T=HV'''+H_R N_R \tag{8.1}$$

w dowolnym układzie współrzędnych $OXYZ$, gdzie

$$\begin{aligned} H&=L^T\left(K_2-C(S^T K_1 S)^{-1} C^T\right)L=L^T(K_2 L-CP_v),\\ H_R&=L^T\left(C_R-C(S^T K_1 S)^{-1}S^T K_1 S_R\right)=L^T(C_R-CP_R). \end{aligned} \tag{8.2}$$

9. Diagonalizacja macierzy H

Macierz H jest symetryczna lecz na ogół nie jest diagonalna. Można ją jednak sprowadzić do postaci diagonalnej przez przesunięcie i obrót układu $OXYZ$. Niech $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ będzie układem współrzędnych, którego początek $\bar{O}$ ma w układzie OXY współrzędne D_x, D_y, a osie X i $\bar{X}$ tworzą kąt α. Osie Z i $\bar{Z}$ są równoległe. Liczby D_x, D_y i α można tak dobrać, aby macierz H w układzie $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ była diagonalna.

Po zredukowaniu sił T_x, T_y i M_s względem punktu $\bar{O}$ otrzymuje się siły $\bar{T}_x$, $\bar{T}_y$ i $\bar{M}_s$, gdzie $\bar{T}_x$ i $\bar{T}_y$ są siłami poprzecznymi i działającymi w kierunkach osi $\bar{X}$ i $\bar{Y}$ (rys. 5).

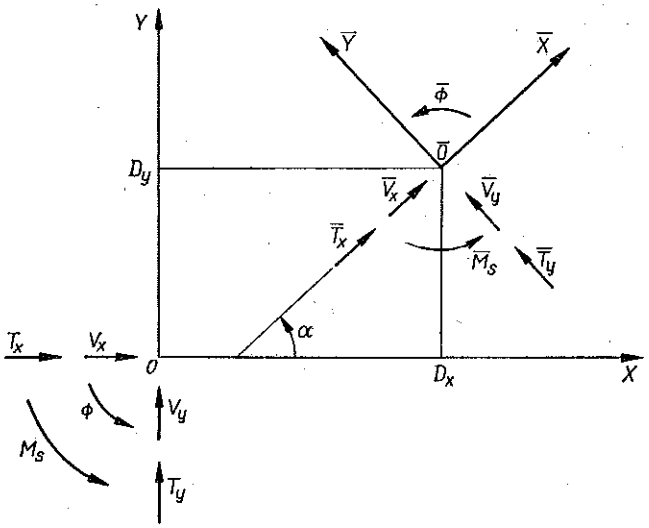

Fig. 5.

Podobnie przez $\bar{V}_x$, $\bar{V}_y$ i $\bar{\Phi}$ oznacza się przemieszczenia pręta mierzone w układzie $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$.

Przyjmijmy oznaczenia

$$\bar{T}=\begin{bmatrix}\bar{T}_x\\ \bar{T}_y\\ \bar{M}_s\end{bmatrix},\qquad \bar{V}=\begin{bmatrix}\bar{V}_x\\ \bar{V}_y\\ \bar{\Phi}\end{bmatrix}.$$

Zachodzą związki (rys. 5) następujące:

$$T=L_z^{-1}\,\bar{T},$$
$$V=L_z^{T}\,\bar{V}, \tag{9.1}$$

gdzie

$$L_z=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ D_y & -D_x & 1 \end{bmatrix}.$$

Równanie (8.1) w układzie $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ otrzymamy po wstawieniu wzorów (9.1). Wtedy

$$\bar{T}=\bar{H}\bar{V}'''+AN_R, \tag{9.2}$$

gdzie

$$\bar{H}=L_Z H L_Z^{T}, \tag{9.3}$$

$$A=L_Z H_R. \tag{9.4}$$

Macierz $\bar{H}$ jest symetryczna, zatem przyjmuje postać diagonalną, jeśli jej elementy $\bar{h}_{12}, \bar{h}_{13}, \bar{h}_{23}$ spełniają warunek

$$\bar{h}_{12}=\bar{h}_{13}=\bar{h}_{23}=0.$$

Wyliczając te elementy ze wzoru (9.3) i czyniąc zadość ostatniemu warunkowi otrzymamy

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{-2h_{12}}{h_{22}-h_{11}} \tag{9.5}$$

oraz

$$\begin{aligned}(h_{12}\cos\alpha+h_{22}\sin\alpha)D_x-(h_{11}\cos\alpha+h_{21}\sin\alpha)D_y&=h_{13}\cos\alpha+h_{23}\sin\alpha,\\ (-h_{12}\sin\alpha+h_{22}\cos\alpha)D_x-(-h_{11}\sin\alpha+h_{21}\cos\alpha)D_y&=-h_{13}\sin\alpha+h_{23}\cos\alpha,\end{aligned} \tag{9.6}$$

gdzie przyjęto oznaczenia $H=[h_{qs}]$, $q, s=1, 2, 3$.

Liczby D_x, D_y i α spełniające równania (9.5) i (9.6) diagonalizują macierz H.

Punkt $\bar{O}$ o współrzędnych D_x, D_y wyznacza środek sztywności (środek ścinania) przekroju pręta złożonego, a kąt α wyznacza kierunki osi obojętnych przekroju pręta. Wprowadzimy oznaczenie

$$A=\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ y_1 & \dots & y_n \\ \omega_1 & \dots & \omega_n \end{bmatrix}.$$

Liczby x_k, y_k oznaczają współrzędne punktu przyłożenia obciążenia n_{Rk} do przekroju pręta w układzie osi obojętnych przekroju, a liczba ω_k oznacza uogólnioną współrzędną wycinkową tego punktu względem bieguna $\bar{O}$. Za pomocą liczb x_k, y_k można wyznaczyć punkt przecięcia osi obojętnych przekroju. Liczby $-\bar{h}_{11}$, $-\bar{h}_{22}$ i $-\bar{h}_{33}$ oznaczają odpowiednio sztywności na zginanie pręta w kierunkach osi obojętnych i sztywność na skręcanie nieswobodne.

Niech $E_i = E$. Kąt α wyznacza kierunki głównych osi bezwładności przekroju pręta. Liczby x_k, y_k są wtedy współrzędnymi w układzie głównych osi bezwładności, wyznaczają więc środek ciężkości przekroju pręta. Liczba ω_k oznacza współrzędną wycinkową względem bieguna $\bar{O}$. Ponadto mamy

$$\bar{h}_{11} = -EJ_y, \quad \bar{h}_{22} = -EJ_x, \quad \bar{h}_{33} = -EJ_\omega.$$

10. Uwzględnienie deplanacji na grubości ścianki

Metoda przedstawiona w pracy pozwala na uwzględnienie deplanacji na grubości ścianki pręta. Dla uzyskania odpowiedniej dokładności należy przekrój pręta podzielić na odpowiednio dużą liczbę pasm, aproksymując go linią łamaną. Przejście graniczne, przy założeniu podziału normalnego linii środkowej przekroju pręta daje wynik identyczny z tym, który uzyskać można za pomocą dokładniejszej metody powierzchni wycinkowych F. Bleicha [2].

11. Uwagi o obliczaniu $J_{\omega i}$

Wycinkowy moment bezwładności $J_{\omega i}$ można obliczać bez uwzględnienia deplanacji na grubości ścianki, gdy jest ona cienka. W przeciwnym przypadku należy stosować metodę F. Bleicha. Metoda ta umożliwia wyznaczenie $J_{\omega i}$ również dla tych przekrojów, dla których według teorii W. Z. Własowa $J_{\omega i} = 0$. Dla wielu przekrojów zwartych można również z wystarczającą dokładnością stosować do wyznaczenia $J_{\omega i}$ metodę F. Bleicha.

Dla przekrojów, których deplanacja zależy w istotny sposób od naprężeń stycznych (np. dla przekroju kwadratowego) nie zachodzi analogia do teorii W. Z. Własowa. Dla pasm o takich przekrojach będziemy przyjmować równanie kąta skręcania w postaci

$$G_i J_{si} \varphi_i' = M_s,$$

gdzie J_{si} zależy od kształtu przekroju, a G_i jest modułem odkształcenia postaciowego.

12. Uwzględnienie czystego skręcania

W przypadku, gdy ma być uwzględnione czyste skręcanie, należy po prawej stronie trzeciego wzoru (6.2) dodać składnik $\sum_{i=1}^{p} G_i J_{si} \varphi_i'$. Prowadząc dalsze rozważania bez zmian otrzymuje się równanie (8.1) w postaci

$$T = HV''' + H_R N_R + K_G V', \tag{12.1}$$

gdzie

$$K_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^{p} G_i J_{si} \end{bmatrix}.$$

Również po diagonalizacji macierzy H otrzymuje się

$$\bar{T}=\bar{H}\bar{V}'''+AN_R+K_G\,\bar{V}'. \tag{12.2}$$

Dla prętów cienkościennych, których grubość ścianki jest mała, uwzględnianie czystego skręcania może być pominięte.

13. Naprężenia styczne

Jeśli uwzględnia się czyste skręcanie, to strumienie naprężeń stycznych w rozcięciach określa wzór (7.2) zależny od przemieszczeń V.

Jeśli pomija się wpływ czystego skręcania, strumienie naprężeń stycznych w rozcięciach można wyrazić bezpośrednio przez obciążenia pręta. Istotnie, macierz $\bar{H}$ jest nieosobliwa, zatem również macierz H jest nieosobliwa. Wyznaczając V''' z równania (8.1) i wstawiając do wzoru (7.2) otrzymamy

$$N=P_T T+P_{NR}N_R, \tag{13.1}$$

gdzie

$$\begin{aligned} P_T&=-P_v H^{-1},\\ P_{NR}&=P_v H^{-1}H_R-P_R. \end{aligned} \tag{13.2}$$

Jeśli przez t_j oznaczymy grubość ścianki w rozcięciu j, a przez Δ_N oznaczymy macierz $\Delta_N=\operatorname{diag}[1/t_j]$, to naprężenia styczne τ_j w rozcięciach wyznaczamy ze wzoru

$$\tau=\Delta_N N, \quad \text{gdzie} \quad \tau=\begin{bmatrix}\tau_1\\ \vdots\\ \tau_{p-1}\end{bmatrix}.$$

14. Naprężenia normalne

Niech $P_1, \ldots, P_v, \ldots, P_m$ będą dowolnymi punktami leżącymi na przekroju poprzecznym pręta złożonego. Niech $E_{\sigma v}$ oznacza moduł Younga w punkcie P_v. Naprężenie σ_v w punkcie P_v jest równe

$$\sigma_v=E_{\sigma v}\left[\frac{F}{\sum_{i=1}^{p}E_i A_i}-x_{\sigma v}\bar{V}_x''-y_{\sigma v}\bar{V}_y''-\omega_{\sigma v}\bar{\Phi}''\right], \tag{14.1}$$

gdzie F oznacza siłę normalną w przekroju pręta złożonego, $x_{\sigma v}$, $y_{\sigma v}$ współrzędne punktu P_v w układzie osi pokrywających się z osiami obojętnymi przekroju oraz $\omega_{\sigma v}$ uogólnioną współrzędną wycinkową punktu P_v względem bieguna $\bar{O}$.
Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$\sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \vdots\\ \sigma_m\end{bmatrix}, \quad E_\sigma=\operatorname{diag}[E_{\sigma v}], \quad I_m=\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}_{m\times 1}, \quad A_\sigma=\begin{bmatrix}x_{\sigma 1} & \ldots & x_{\sigma m}\\ y_{\sigma 1} & \ldots & y_{\sigma m}\\ \omega_{\sigma 1} & \ldots & \omega_{\sigma m}\end{bmatrix}.$$

Wtedy wektor naprężeń normalnych σ ma postać

$$\sigma = \frac{F}{\sum_{i=1}^{p} E_i A_i} E_\sigma I_m - E_\sigma A_\sigma^T \bar{V}''. \tag{14.2}$$

Niech M_x, M_y i B oznaczają odpowiednio momenty zginające względem osi obojętnych oraz bimoment w przekroju pręta. Niech

$$M = \begin{bmatrix} M_y \\ M_x \\ B \end{bmatrix}.$$

Wtedy jak wiadomo $\bar{V}'' = \bar{H}^{-1} M$. Stąd i że wzoru (14.2) otrzymujemy wzór na naprężenia wyrażony przez siły wewnętrzne:

$$\sigma = \frac{F}{\sum_{i=1}^{p} E_i A_i} E_\sigma I_m - E_\sigma A_\sigma^T \bar{H}^{-1} M. \tag{14.3}$$

Siła normalna F oraz wektor M zależą od obciążeń N_R, T oraz od warunków brzegowych pręta.

Należy jeszcze skonstruować macierz A_σ opierając się na prostych danych. Przyporządkowanie punktów P_ν do pasm określa macierz $S_\sigma = [\gamma_{\sigma i\nu}]$, gdzie $\gamma_{\sigma i\nu} = 1$, gdy punkt P_ν leży na przekroju pasma i i $\gamma_{\sigma i\nu} = 0$ w przeciwnym przypadku.

Współrzędne punktu P_ν w układzie $0_{si}\, x_{si}\, y_{si}$ pasma i, do którego punkt P_ν został przyporządkowany, oznaczamy przez $x_{\sigma i\nu}$, $y_{\sigma i\nu}$ i $\omega_{\sigma i\nu}$, analogicznie do oznaczeń w ustępie 6. Przez C_σ oznaczamy macierz

$$C_\sigma = \begin{bmatrix} x_{\sigma i\nu} & \gamma_{\sigma i\nu} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ y_{\sigma i\nu} & \gamma_{\sigma i\nu} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \omega_{\sigma i\nu} & \gamma_{\sigma i\nu} \end{bmatrix}.$$

Macierz A_σ jest w pełni analogiczna do macierzy A określonej wzorem (9.4). Zatem korzystając z drugiego wzoru (8.2) znajdziemy

$$A_\sigma = L_z L^T (C_\sigma - C(S^T K_1 S)^{-1} S^T K_1 S_\sigma). \tag{14.4}$$

Znając macierz S_σ można łatwo wyznaczyć przyporządkowanie modułów $E_{\sigma\nu}$ do punktów P_ν, określone wektorem $E_\sigma I_m$. Mamy bowiem wzór

$$E_\sigma I_m = (\operatorname{diag}[E_i] S_\sigma)^T I_p,$$

gdzie I_p jest wektorem postaci

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{p \times 1}.$$

15. Przykład liczbowy

Rozpatrzmy pręt złożony z cienkościennego ceownika i dwu elementów o zwartych przekrojach kwadratowych, którego przekrój przedstawiony jest na rys. 6. Rozcinamy pręt wzdłuż na pięć pasm (rys. 7). Mamy więc $i=1, 2, 3, 4, 5$; $j=1, 2, 3, 4$.

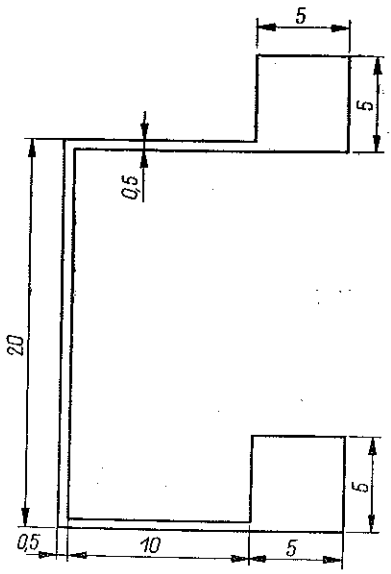

Fig. 6.

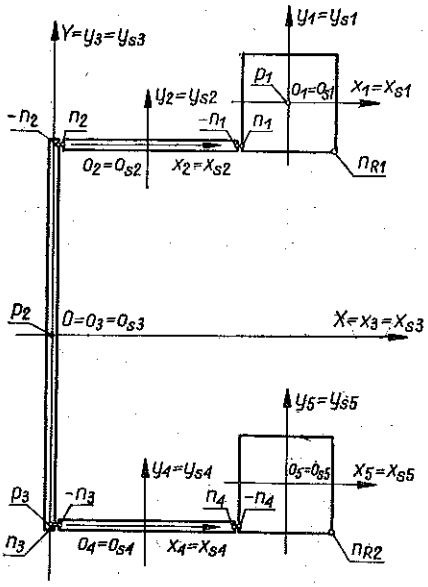

Fig. 7.

Przyjmujemy, że niewiadome siły styczne w rozcięciach przyjęte do obliczeń działają odpowiednio na pasma 1, 2, 3 i 4.

Macierz struktury S ma więc postać

$$S=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Niech na pręt działają dwa obciążenia n_{R1}, n_{R2} przyłożone wzdłuż krawędzi elementów zwartych 1 i 5 (rys. 7). Naprężenia normalne wyznaczymy w punktach P_1, P_2, P_3 położonych na pasmach 1 i 3 (rys. 7). Stąd macierz S_R i S_σ mają postać

$$S_R=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S_\sigma=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odpowiednie macierze współrzędnych C, C_R i C_σ są równe (wymiary podano w cm):

$$C=\begin{bmatrix} -2{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ -5{,}0 & -5{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}25 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 5{,}0 & 5{,}0 \\ 0 & 0 & 0 & 2{,}5 \\ -2{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9{,}75 & -9{,}75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}4375 & 2{,}4375 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_R=\begin{bmatrix} 2{,}5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2{,}5 \\ -2{,}5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2{,}5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_\sigma=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9{,}75 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Charakterystyki geometryczne przekrojów poszczególnych pasm są następujące:

$$\begin{array}{llll} A_1=25, & J_{x1}=52{,}083, & J_{y1}=52{,}083, & J_{\omega 1}=0, \\ A_2=5, & J_{x2}=0{,}10417, & J_{y2}=41{,}667, & J_{\omega 2}=0{,}86706, \\ A_3=10, & J_{x3}=333{,}33, & J_{y3}=0{,}20834, & J_{\omega 3}=6{,}9363, \\ A_4=5, & J_{x4}=0{,}10417, & J_{y4}=41{,}667, & J_{\omega 4}=0{,}86706, \\ A_5=25, & J_{x5}=52{,}083, & J_{y5}=52{,}083, & J_{\omega 5}=0. \end{array}$$

Przyjmujemy, że $E_i=E$. Za pomocą tych wielkości wyznaczamy macierze K_1 i K_2. Przyjmujemy, że $\alpha_i=0$ (rys. 7). Stąd macierz transformacji L ma postać

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & -9{,}75 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 9{,}75 \\ 1 & 0 & 7{,}5 \\ 0 & 1 & 12{,}75 \\ 0 & 1 & 5{,}25 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5{,}25 \\ 0 & 1 & 12{,}75 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tym samym zostały określone wszystkie dane do przeprowadzenia obliczeń. Podamy wyniki obliczeń.

Macierze P_v i P_R występujące we wzorze (7.2) wyliczone ze wzorów (7.3) są następujące

$$P_v = E\begin{bmatrix} -72{,}321 & -259{,}82 & 2943{,}1 \\ -49{,}284 & -300{,}54 & 3281{,}3 \\ 49{,}286 & -284{,}46 & 3446{,}1 \\ 72{,}321 & -227{,}68 & 3272{,}5 \end{bmatrix},$$

$$P_R = \begin{bmatrix} 0{,}64286 & -0{,}35714 \\ 0{,}57143 & -0{,}42857 \\ 0{,}42857 & -0{,}57143 \\ 0{,}35714 & -0{,}64286 \end{bmatrix}.$$

Macierze H i H_R występujące w równaniu (8.1) wyliczone ze wzorów (8.2) są następujące:

$$H = -E\begin{bmatrix} 1723{,}6 & 325{,}43 & 3101{,}9 \\ 325{,}43 & 6213{,}8 & -63524{,}0 \\ 3101{,}9 & -63524{,}0 & 841810{,}0 \end{bmatrix},$$

$$H_R = \begin{bmatrix} 5{,}3928 & 5{,}3928 \\ 7{,}8928 & -11{,}607 \\ -179{,}60 & 117{,}78 \end{bmatrix}.$$

Diagonalizując macierz H ze wzoru (9.5) otrzymujemy nachylenie głównych płaszczyzn zginania:

$$\alpha = -0{,}07304 \text{ rad} = -4{,}1848^{\circ} = -4^{\circ}\,11'04''.$$

Z kolei z układu równań (9.6) otrzymuje się współrzędne środka ścinania przekroju:

$$D_x = -10{,}413 \text{ cm},$$

$$D_y = -\ 3{,}626 \text{ cm},$$

Stąd

$$L_z = \begin{bmatrix} 0{,}99733 & -0{,}07298 & 0 \\ 0{,}07298 & 0{,}99733 & 0 \\ -3{,}626 & 10{,}413 & 1 \end{bmatrix}.$$

Można już zdiagonalizować macierz H. Ze wzoru (9.3) otrzymujemy więc

$$\bar{H} = -E\begin{bmatrix} 1766{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 6237{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 169090{,}0 \end{bmatrix}.$$

Stąd dla przekroju pręta mamy główne momenty bezwładności względem osi $\bar{X}_s$ i $\bar{Y}_s$ (rys. 8):

$$J_x = 6237{,}6 \text{ cm}^4, \quad J_y = 1766{,}2 \text{ cm}^4$$

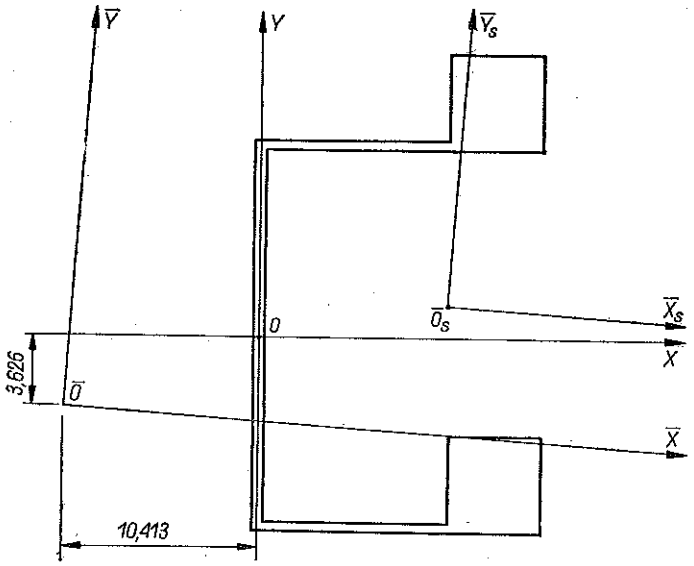

FIG. 8.

oraz główny wycinkowy moment bezwładności względem środka ścinania

$$J_\omega = 169090{,}0 \text{ cm}^6.$$

Z kolei macierz A w równaniu (9.2) wyznaczona ze wzoru (9.4) jest następująca:

$$A = \begin{bmatrix} 4{,}8025 & 6{,}2256 \\ 8{,}2656 & -11{,}183 \\ -116{,}97 & -22{,}640 \end{bmatrix}.$$

Macierze P_T i P_{NR} występujące we wzorze (13.1) na siły styczne w rozcięciach, wyliczamy ze wzorów (13.2):

$$P_T = 10^{-2} \begin{bmatrix} 4{,}3834 & 0{,}92998 & -0{,}29559 \\ 2{,}6010 & 2{,}7015 & -0{,}19553 \\ -2{,}6058 & 2{,}8612 & -0{,}18055 \\ -3{,}3073 & -0{,}025197 & -0{,}37819 \end{bmatrix},$$

$$P_{NR} = \begin{bmatrix} 0{,}19780 & 0{,}13745 \\ 0{,}13322 & 0{,}024993 \\ -0{,}019108 & -0{,}11384 \\ 0{,}13781 & 0{,}018067 \end{bmatrix}.$$

Korzystając ze wzoru (14.2) znajdziemy wektor naprężeń normalnych:

$$\sigma = I_m \frac{F}{A_z} - E A_\sigma^T \bar{V}''$$

lub ze wzoru (14.3)

$$\sigma = I_m \frac{F}{A_z} - E A_\sigma^T \bar{H}^{-1} M,$$

gdzie

$$A_z = \sum_{i=1}^{5} A_i .$$

Macierz A_σ ze wzoru (14.4) jest następująca:

$$A_\sigma = \begin{bmatrix} 2{,}1267 & -9{,}7136 & -9{,}0020 \\ 10{,}576 & -2{,}3222 & -12{,}046 \\ -19{,}994 & 2{,}5310 & -98{,}993 \end{bmatrix};$$

oraz

$$EA_\sigma^T \bar{H}^{-1} = 10^{-4} \begin{bmatrix} -12{,}041 & -16{,}956 & 1{,}1824 \\ 54{,}996 & 3{,}7229 & -0{,}14973 \\ 50{,}968 & 19{,}312 & 5{,}8545 \end{bmatrix}.$$

Korzystając z macierzy A lub A_σ, której elementami są współrzędne danych punktów przekroju w układzie głównych osi bezwładności łatwo można wyznaczyć położenie środka ciężkości, znając kąt α.

Położenie środka ścinania, środka ciężkości i głównych osi bezwładności przedstawiono na rys. 8.

Literatura cytowana w tekście

1. В. З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Москва 1959.
2. F. Bleich, *Buckling strength of metal structures*, Mc Graw-Hill, New York 1952.
3. P. Rapp, K. Wrześniowski, J. Wdowicki, *Skręcanie nieswobodne prętów złożonych o przekroju otwartym*, Rozpr. Inżyn., **23**, 4, 625–640, 1975.

Резюме

МАТРИЧНЫЙ АНАЛИЗ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ СЛОЖНЫХ СТЕРЖНЕЙ С ОТКРЫТЫМ СЕЧЕНИЕМ

В работе представлена матричная формулировка технической теории несвободного изгиба и кручения сложных стержней, сотоящих из тонкостенных и компактных элементов. Стержень может быть нагружен поперечными и продольными силами. Рассмотрен призматический стержень. Не вводится никаких ограничений, ни к материальным постоянным отдельных составных элементов, ни к форме сечений составных элементов стержня. Определены матричные уравнения поперечных перемещений стержня, геометрические характеристики сечения, а также нормальные и касательные напряжения. Представленный метод, в случае, когда материальные постоянные не меняются, является дискретным эквивалентом метода В. З. Власова [1], уточненного методом Ф. Блейха [2]. Настоящая работа является расширением и обобщением работы [3]. Представленный в работе способ подхода к задаче полезен с точки зрения применения к расчетам на цифровых вычислительных машинах. В заключении дается числовой пример.

SUMMARY

MATRIX ANALYSIS OF BENDING AND TORSION OF COMBINED BARS OF OPEN CROSS-SECTION

The matrix formulation of the technical theory of bending and non free torsion of bars composed of thin-walled and compact elements is presented. The bar is loaded by transverse and longitudinal forces. The prismatic bar is considered. No assumptions concerning material constants or the shape of the cross-sections of the particular components of the bar are made. The matrix equations for transverse displacements of the bar, geometrical characteristics of the cross-section and the normal and tangent forces are evalueated.

The method presented, in a case when the material constants are invariable, is a discrete equivalent of the Vlasov's method [1] improoved by Bleich [2]. The present paper is a broadening and generalization of the work [3].

The formulation of the problem presented in this paper is very useful from the point of view of application to computations on digital computers. At the end of the paper the numerical example is given.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji 7 września 1976 r.