ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 25, 3, 441—446, 1977
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

ZASTOSOWANIE RÓWNANIA FOKKERA-PLANCKA DO IDENTYFIKACJI NIELINIOWEGO UKŁADU O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

BRUNON STĘPIŃSKI (WARSZAWA)

Przedstawiono sposób wykorzystania równania Fokkera-Plancka do identyfikacji nieliniowego układu o jednym stopniu swobody. Pokazany w pracy tok postępowania daje możliwość odtwarzania charakterystyk wyrazów nieliniowych przy założonej ich aproksymacji wielomianami stopnia wyższego niż 1.

1. Wstęp

Opis procesów dynamicznych zachodzących w układach mechanicznych wymaga przyjęcia modelu układu, tj. takiej jego idealizacji, przy której, wybierając najważniejsze własności a odrzucając pozostałe, można uzyskać przy takich samych sygnałach wejściowych dla układu i modelu dostatecznie bliskie (w określonym sensie) sygnały wyjściowe. Jako podstawowy można przyjąć podział proponowany m.in. przez autorów prac [1 i 2] na modele materialne (fizyczne) i modele idealne (myślowe).

Najważniejszą grupę w klasie modeli idealnych stanowią modele matematyczne. Model matematyczny układu mechanicznego, opisujący procesy dynamiczne w nim zachodzące, przyjmuje najczęściej postać różniczkowych równań ruchu. W przypadku układów dyskretnych będą to równania różniczkowe zwyczajne.

Problem identyfikacji może być rozumiany jako zadanie polegające na zbudowaniu adekwatnego modelu matematycznego, który możliwie najlepiej — z punktu widzenia przyjętego kryterium — opisuje zachowanie się układu mechanicznego. Jeżeli założymy, że postać, albo inaczej struktura, modelu matematycznego jest znana, to identyfikacja w znaczeniu sformułowanym wyżej, będzie polegała na wyznaczaniu najlepszych (w określonym sensie) wartości parametrów tego modelu, tj. współczynników różniczkowych równań ruchu. Taka identyfikacja nazywa się pełną, w odróżnieniu od ogólnej [3].

Identyfikacja, obok walorów czysto poznawczych, ma doniosłe znaczenie praktyczne. Znajomość adekwatnego modelu matematycznego stanowi podstawę do ustalania optymalnych warunków pracy układu, do projektowania modyfikacji układu w celu jego doskonalenia, wreszcie do projektowania systemu sterowania, czy do oceny niezawodności.

Badanie układu mechanicznego w warunkach normalnej eksploatacji lub w warunkach ekstremalnych (np. awaryjnych) jest z reguły trudne i kosztowne. W takich przypadkach badania mogą być przeprowadzone na modelu matematycznym drogą symulacji (np. cyfrowe).

Na tym tle wyraźnie rysuje się znaczenie problemu identyfikacji, w której podstawowym celem jest zbudowanie adekwatnych modeli matematycznych: informacje uzyskane w czasie badań symulacyjnych są tylko w takim stopniu informacjami o układzie, w jakim model jest dobry — z punktu widzenia przyjętego kryterium — jego odzwierciedleniem.

Znane metody identyfikacji układów nieliniowych poddanych wymuszeniu losowemu oparte są na ogół na idei linearyzacji [4]. W wyniku takiego postępowania otrzymujemy zastępcze zlinearyzowane charakterystyki identyfikowanego układu o postaci zależnej od przyjętej metody linearyzacji. Zastosowanie równania Fokkera-Plancka do identyfikacji układów daje możliwości odtwarzania charakterystyk wyrazów nieliniowych przy założonej ich aproksymacji wielomianami stopnia wyższego niż 1.

2. Sformułowanie problemu

Przedmiotem rozważań będzie model matematyczny układu mechanicznego o jednym stopniu swobody i masie jednostkowej:

$$\ddot{x}+c(\dot{x})+k(x)=q(t). \tag{2.1}$$

Funkcja $x(t)$ oznacza przemieszczenie masy, a o wymuszeniu $q(t)$ zakładamy, że jest gaussowskim procesem stochastycznym typu « białego szumu ». Funkcje $c(\dot{x})$ i $k(x)$ przedstawiają odpowiednio: nieliniowy opór tłumienia zależny od prędkości i nieliniową siłę sprężystości zależną od przemieszczenia.

Załóżmy, że aprioryczne informacje o badanym układzie pozwalają przyjąć następujące struktury funkcji $c(\dot{x})$ i $k(x)$:

$$\begin{aligned} c(\dot{x}) &= \sum_{i=1}^{n} c_i \dot{x}^{2i-1}, \\ k(x) &= \sum_{j=1}^{m} k_j x^{2j-1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Z powyższych wzorów widzimy, że funkcje $c(\dot{x})$ i $k(x)$, które nazywać będziemy charakterystykami tłumienia i siły sprężystości, będą w pełni określone, jeżeli znane będą wartości stałych parametrów c_i oraz k_j $(i=1, 2, ..., n;\ j=1, 2, ..., m)$ lub, mówiąc inaczej, jeżeli znane będą elementy macierzy wierszowych: $\mathbf{c}=[c_1, c_2, ..., c_n]$ i $\mathbf{k}=[k_1, k_2, ..., k_m]$.

Celem niniejszej pracy jest podanie metody znajdowania wartości tych parametrów, co jest równoważne wyznaczeniu parametrów modelu (2.1).

3. Kryterium identyfikacji i rozwiązanie problemu

Przy założeniu, że intensywność wymuszenia jest jednostkowa, dla modelu matematycznego (2.1) można napisać « stacjonarne » ($\partial f/\partial t=0$) równanie Fokkera-Plancka:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}[c(x_2)f(x_1\, x_2)+k(x_1)f(x_1, x_2)]= \\ =\frac{\partial}{\partial x_1}[x_2 f(x_1, x_2)]-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}, \tag{3.1}$$

gdzie $f(x_1, x_2)\equiv f(x, \dot{x})$ jest gęstością prawdopodobieństwa przejścia wektorowego procesu stochastycznego $[x(t), \dot{x}(t)]\equiv[\dot{x}_1(t), x_2(t)]$ ([5], str. 213–214). Uwzględniając wzory (2.2) w równaniu (3.1), oznaczamy jego lewą stronę przez $L(x_1, x_2; \mathbf{c}, \mathbf{k})$, prawą zaś jako $P(x_1, x_2)$. Wówczas równanie to można napisać w następującej formie:

$$L(x_1, x_2; \mathbf{c}, \mathbf{k})=P(x_1, x_2). \tag{3.2}$$

Przyjmijmy, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa przejścia została wyznaczona doświadczalnie i jej przedstawienie analityczne (np. drogą aproksymacji danych z pomiaru) ma postać $\hat{f}(x_1, x_2)$, gdzie $a_1<x_1<a_2$, $b_1<x_2<b_2$. Napiszemy całkę

$$J(\mathbf{c}, \mathbf{k})=\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2}[\hat{L}(x_1, x_2; \mathbf{c}, \mathbf{k})-\hat{P}(x_1, x_2)]^2\,dx_1\,dx_2, \tag{3.3}$$

gdzie $\hat{L}$ i $\hat{P}$ przedstawiają lewą i prawą stronę równania (3.2), lecz opisane są na wartościach funkcji $\hat{f}(x_1, x_2)$ (z pomiaru).

Jako kryterium identyfikacji przyjmujemy

$$J(\mathbf{c}^*, \mathbf{k}^*)=\min_{\mathbf{c}, \mathbf{k}} J(\mathbf{c}, \mathbf{k}). \tag{3.4}$$

Warunek konieczny ekstremum w zastosowaniu do funkcji $J(\mathbf{c}, \mathbf{k})$ daje

$$\begin{aligned} &\frac{\partial J(\mathbf{c}, \mathbf{k})}{\partial c_i}=0, \qquad i=1, 2, \ldots, n; \\ &\frac{\partial J(\mathbf{c}, \mathbf{k})}{\partial k_j}=0, \qquad j=1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Jest to układ $n+m$ równań algebraicznych liniowych niejednorodnych, które otrzymujemy po wykonaniu różniczkowania wskazanego w (3.5) i całkowania wg (3.3) w dowolnej oczywiście kolejności. Rozwiązaniem układu są poszukiwane wartości parametrów charakterystyk tłumienia i siły sprężystości.

Jeżeli funkcja określona z pomiaru $\hat{f}(x_1, x_2)$ jest dana w postaci tablicy, to całkę (3.3) należy zastąpić odpowiednią sumą. Wówczas działania (3.4) i (3.5) są oparte na odpowiednich procedurach numerycznych.

4. Przykład

Z braku danych doświadczalnych, poniższy przykład będzie oparty na analitycznym rozwiązaniu równania Fokkera-Plancka potraktowanym jako wynik pomiaru.

Niech modelem matematycznym układu będzie równanie (2.1), przy czym

$$
\begin{aligned}
c(\dot{x}) &= c_1 \dot{x} + c_2 \dot{x}^3, \\
k(x) &= k_1 x + k_2 x^3.
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

Zgodnie z (3.1) mamy

$$
\begin{aligned}
(c_1+3c_2 x_2^2) f(x_1, x_2) + (k_1 x_1 + k_2 x_1^3 + c_1 x_2 + c_2 x_2^3) \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= \\
= x_2 \frac{\partial (x_1, x_2)}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}&.
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Załóżmy, że w wyniku pomiaru otrzymaliśmy ([5], str. 215)

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(x_1, x_2) &= C \exp\left[-\frac{\beta x_1^4}{2} - \beta x_2^2\right], \\
&-\infty < x_1 < +\infty \\
&-\infty < x_2 < +\infty,
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

gdzie $\beta = \text{const}$ oznacza daną liczbę « zmierzoną » oraz C stałą normującą. Wzór (3.3) przyjmie postać

$$
\begin{aligned}
J(\mathbf{c}, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[(c_1 + 3c_2 x_2^2) \hat{f} + (k_1 x_1 + k_2 x_1^3 + c_1 x_2 + c_2 x_2^3) \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_2} - \\
- x_2 \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x_2^2} \Big]^2 dx_1\, dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{F}(x_1, x_2; \mathbf{c}, \mathbf{k})]^2 \, dx_1\, dx_2.
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

Uwzględniając kryterium (3.4) i stosując wzory (3.5) otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J(\mathbf{c}, \mathbf{k})}{\partial c_1} &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f} + x_2 \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_2} \right) \hat{F}(x_1, x_2; \mathbf{c}, \mathbf{k})\, dx_1\, dx_2 = 0, \\
\frac{\partial J(\mathbf{c}, \mathbf{k})}{\partial c_2} &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(3x_2^2 \hat{f} + x_2^3 \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_2} \right) \hat{F}(x_1, x_2; \mathbf{c}, \mathbf{k})\, dx_1\, dx_2 = 0, \\
\frac{\partial J(\mathbf{c}, k)}{\partial k_1} &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_2} \hat{F}(x_1, x_2; \mathbf{c}, \mathbf{k})\, dx_1\, dx_2 = 0, \\
\frac{\partial J(\mathbf{c}, \mathbf{k})}{\partial k_2} &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^3 \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_2} \hat{F}(x_1, x_2; \mathbf{c}, \mathbf{k})\, dx_1\, dx_2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę, że

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1} = -2\beta x_1^3 \hat{f}, \\
(4.6)\qquad &\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_2} = -2\beta x_2 \hat{f}, \\
&\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x_2^2} = (4\beta^2 x^2 - 2\beta)\hat{f},
\end{aligned}
$$

to nietrudno spostrzec, że współczynniki przy niewiadomych c_1, c_2, k_1, k_2 w układzie równań (4.5) będą zależały od liczb

$$
(4.7)\qquad \alpha_{rs} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^r x_2^s [\hat{f}(x_1, x_2)]^2 dx_1 dx_2, \qquad r, s = 0, 1, 2, \ldots.
$$

Wobec tego układu równań (4.5) można napisać w następującej formie:

$$
\begin{aligned}
&c_1(\alpha_{00} - 4\beta\alpha_{02} + 4\beta^2\alpha_{04}) + c_2(3\alpha_{02} - 8\beta\alpha_{04} + 4\beta^2\alpha_{06}) + \\
&\quad + k_1(4\beta^2\alpha_{13} - 2\beta\alpha_{11}) + k_2(4\beta^2\alpha_{33} - 2\beta\alpha_{31}) = \beta\alpha_{00} - 4\beta^2\alpha_{02} + \\
&\quad + 4\beta^3\alpha_{04} - 2\beta\alpha_{31} + 4\beta^2\alpha_{33}, \\
&c_2(3\alpha_{02} - 8\beta\alpha_{04} + 4\beta^2\alpha_{06}) + c_2(9\alpha_{04} - 12\beta\alpha_{06} + 4\beta^2\alpha_{08}) + \\
(4.8)\qquad &\quad + k_1(4\beta^2\alpha_{15} - 6\beta\alpha_{13}) + k_2(4\beta\alpha_{33} - 2\beta\alpha_{31}) = 3\beta\alpha_{02} - 8\beta^2\alpha_{04} + \\
&\quad + 4\beta^3\alpha_{06} - 6\beta\alpha_{33} + 4\beta^2\alpha_{35}), \\
&c_1(4\beta^2\alpha_{13} - 2\beta\alpha_{11}) + c_2(4\beta^2\alpha_{15} - 6\beta\alpha_{13}) + 4k_1\beta^2\alpha_{22} + 4k_2\beta^2\alpha_{42} = \\
&\quad = 4\beta^3\alpha_{13} - 2\beta^2\alpha_{11} + 4\beta^2\alpha_{42}, \\
&c_1(4\beta^2\alpha_{33} - 2\beta\alpha_{31}) + c_2(4\beta^2\alpha_{35} - 6\beta\alpha_{33}) + 4k_1\beta^2\alpha_{42} + 4k_2\beta^2\alpha_{62} = \\
&\quad = 4\beta^2\alpha_{62} - 2\beta^2\alpha_{31} + 4\beta^3\alpha_{33}.
\end{aligned}
$$

Powyższy układ równań można łatwo rozwiązać znaną metodą za pomocą wyznaczników. Wykonując proste przekształcenia (odejmowanie kolumn itp.) otrzymujemy

$$
(4.9)\qquad \begin{aligned} c_1 &= \beta, & c_2 &= 0, \\ k_1 &= 0, & k_2 &= 1. \end{aligned}
$$

Zatem model matematyczny badanego układu jest następujący

$$
(4.10)\qquad \ddot{x} + \beta\dot{x} + x^3 = q(t).
$$

5. Uwagi końcowe

Przedstawiona metoda umożliwia zrezygnowanie z linearyzacji charakterystyk nieliniowych w procedurze identyfikacji. W tym sensie wyznaczenie parametrów opisujących charakterystyki tłumienia i siły sprężystości jest bardziej adekwatne do rzeczywistych własności układu.

Założenie uczynione w pracy, że wymuszenie drgań jest procesem losowym typu białego «szumu» podyktowane zostało jedynie chęcią uproszczenia rachunkowej strony rozważanego problemu, nie stanowi ono natomiast istotnego ograniczenia. Metodę tę można rozszerzyć na te przypadki, w których ogólnie stosuje się równania Fokkera-Plancka, a więc na przypadki, gdy odnośnie do wymuszenia zakłada się jedynie, że jest ono normalnym stacjonarnym procesem stochastycznym o wymiernej gęstości widmowej ([5], str. 217).

Literatura cytowana w tekście

1. J. Osiecki, *Elementy modelowania w dynamice maszyn*, w pracy: Dynamika maszyn, PAN, Ossolineum 1974.
2. J. Wicher, *Problemy identyfikacji systemów technicznych ze szczególnym uwzględnieniem układów mechanicznych*, Prace IPPT PAN 67/1975.
3. E. Kamiński, *Identyfikacja układów mechanicznych z członami lekkosprężystymi*, Prace IPPT PAN 37/1971.
4. J. Wicher, *Modyfikacja metody linealizacji statystycznej do doświadczalnego badania własności dynamicznych nieliniowych układów mechanicznych*, Rozprawa doktorska IPPT PAN 1970.
5. K. Sobczyk, *Metody dynamiki statystycznej*, PWN, 1973.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА К ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

В известных методах идентификации нелинейных динамических систем при случайном возмущении обычно пользуются различными методами линеаризации. Вследствие такой постановки задачи идентификации получаются линеаризованные характеристики исследуемой системы, зависящие от принятого метода линеаризации. В настоящей работе для идентификации использовано уравнение Фоккера-Планка. Такой подход к задаче представляет возможность отыскания нелинейных характеристик системы, если они приняты в виде многочленов степени выше первого.

Summary

APPLICATION OF THE FOKKER-PLANCK EQUATION FOR IDENTIFICATION OF THE NON-LINEAR SYSTEM WITH ONE DEGREE OF FREEDOM

Most of the currently used methods of identification of non-linear dynamic systems subjected to random exciting forces are based on the linear approximations. Consequently ilnearized characteristics are obtained whose form being dependent on the applied identification method. The application of the Fokker-Planck equations enables to get non-linear characteristics in the form of polynomials of the order higher then one.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
FILIA W PŁOCKU

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 lipca 1976 r.