

POWŁOKA WALCOWA ZAMKNIĘTA OBCIĄŻONA SIŁAMI SKUPIONYMI NORMALNYMI DO BRZEGU I STYCZNYMI DO POWIERZCHNI ŚRODKOWEJ

T A D E U S Z K A C P E R S K I (WARSZAWA)

Przedstawiono rozważania na temat powłoki walcowej, obciążonej siłami skupionymi, normalnymi do jej swobodnego brzegu i stycznymi do powierzchni środkowej. Wyprowadzono wzory oparte na równaniach Donnella-Własowa. Przeprowadzono obliczenia numeryczne dla dwóch przypadków obciążenia. W pierwszym powłoka obciążona jest jedną siłą, a w drugim dwiema siłami działającymi w dwóch przeciwległych punktach obwodu. Obliczono promieniowe ugięcia powłoki oraz naprężenia. Wyniki przedstawiono w postaci wykresów. Wykonano tensometryczne pomiary naprężeń dla obu rodzajów obciążeń. Porównano wyniki teoretyczne z doświadczalnymi. Stwierdzono, że obliczone naprężenia są bliskie otrzymanym w drodze eksperymentalnej.

1. WSTĘP

Rozwiązanie, sformułowanego w tytule zadania, można łatwo uzyskać opierając się na technicznej teorii powłok, opracowanej przez DONNELLA [1], WŁASOWA [2] lub na teorii udoskonalonej przez ŁUKASIEWICZA i opisaną szczegółowo w pracy [3]. Równania zaproponowane w [3] odnoszą się do powłok o podwójnej krzywiznie. Gdy jeden z promieni dąży do nieskończoności i powłoka staje się walcem, równania te są identyczne z podanymi przez MORLEYA [4] dla powłok walcowych. Charakteryzują się one większą dokładnością niż równania Donnella-Własowa. Obliczone na ich podstawie wyniki są bliższe wartościom uzyskanym ze ścisłych równań FLÜGGEGO [5] czy też GOLDENWEJZERA [6]. Morley otrzymał te równania z równań Flüggego dla powłoki walcowej przez pominięcie w nich niektórych małych wyrazów. W pracy [3] porównano wielkości liczbowe pierwiastków równań Morleya, Donnella-Własowa i Flüggego dla powłoki walcowej. Znaczniejsze różnice występują pomiędzy tymi pierwiastkami dla małych wartości harmonicznej n szeregu Fouriera rozwinięcia obciążenia działającego na powłokę.

Postawione w tytule zadanie nie zostało jeszcze szczegółowo opisane w literaturze. W pracy [8] problem ten jest analizowany. Nie zostały jednak podane pełne wyniki oraz wzory dla rozpatrywanego, ważnego technicznie przypadku.

W pracach [7 i 8] podano rozwiązania dla różnych przypadków obciążenia siłami skupionymi powłok o podwójnej krzywiznie. W pracy [9] przedstawiono rozwiązanie dla półnieskończonej zamkniętej powłoki walcowej, przyjmując jako punkt wyjścia równania NOWOŻYŁOWA [10] dla cienkich powłok. Przeprowadzono badanie powłoki obciążonej na swobodnym brzegu dwiema siłami rozciągającymi, przyłożonymi do dwóch przeciwległych punktów obwodu przy jednoczesnym dzia-

łaniu na tym brzegu dwóch sił ściskających. Te cztery siły, rozmieszczone na obwodzie co 90° , tworzą układ samozrównoważony. Na tak obciążonej rurze walcowej dokonano pomiaru promieniowych ugięć.

Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie wzorów dla powłoki walcowej o przekroju kołowym, obciążonej siłami normalnymi do brzegu i stycznymi do jej powierzchni środkowej na podstawie równań Donnella-Własowa i następnie porównanie wyników obliczeń numerycznych otrzymanych z zastosowania tej teorii—z wynikami uzyskanymi doświadczalnie.

Rozwiązanie tego zadania jest możliwe w wielu wariantach i z większą dokładnością. Przyjęcie w pierwszym przybliżeniu równań Donnella-Własowa, jako podstawy do wyprowadzenia wzorów dla badanego przypadku obciążenia, wydaje się poprawne dla zastosowań praktycznych, ponieważ otrzymane wzory są prostsze, a obliczone na ich podstawie naprężenia są bliskie wartościom otrzymanym eksperymentalnie. Większe błędy powstają przy obliczaniu przemieszczeń i wtedy konieczne staje się uwzględnienie równań udoskonalonych podanych w pracach [3, 7 i 8].

2. TEORIA

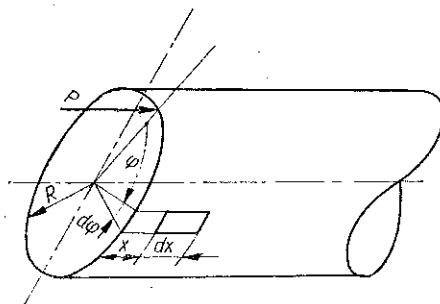
Rozwiązanie powłoki obciążonej w sposób przedstawiony na rys. 1 sprowadza się do rozwiązania następujących dwóch równań różniczkowych cząstkowych czwartego rzędu:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} D\Delta\Delta w - \Delta_k \Phi &= 0, \\ \frac{1}{Eh} \Delta\Delta\Phi + \Delta_k w &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

oznacza sztywność powłoki,



Rys. 1

Δ jest operatorem Laplace'a, który dla powłoki walcowej ma postać:

$$(2.2) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Operator A_k ma następującą budowę:

$$(2.3) \quad A_k = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

w oznacza promieniowe ugięcie powłoki, Φ funkcję naprężeń, E moduł Younga, h grubość powłoki, ν współczynnik Poissona, R promień powierzchni środkowej powłoki oraz x odległość rozpatrywanego punktu powłoki od jej swobodnego brzegu.

Ugięcie powłoki w i funkcja naprężeń Φ będą poszukiwane w postaci szeregów

$$(2.4) \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) \cos n\varphi,$$

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) \cos n\varphi.$$

Ze wzorów (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) oraz korzystając z podstawienia

$$(2.5) \quad w_n = e^{ik \frac{x}{R}}, \quad \Phi_n = \lambda e^{ik \frac{x}{R}}$$

otrzymuje się następujące równania:

$$(2.6) \quad \frac{k^4}{R^4} + 2 \frac{n^2}{R^4} k^2 + \frac{n^4}{R^4} + \frac{1}{DR^3} \lambda k^2 = 0,$$

$$\lambda \left(\frac{k^4}{R^4} + 2 \frac{n^2}{R^4} k^2 + \frac{n^4}{R^4} \right) - \frac{Eh}{R^3} k^2 = 0.$$

Rozwiązując układ równań (2.6) uzyskuje się następującą postać równania charakterystycznego:

$$(2.7) \quad (k^2 + n^2)^4 + 4\kappa^4 k^4 = 0,$$

gdzie

$$(2.8) \quad \kappa = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}}$$

oraz zależność pomiędzy funkcją naprężeń i ugięciem

$$(2.9) \quad \lambda_n = \frac{\Phi_n}{w_n} = \mp 2ik^2 \frac{D}{R},$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$.

Rozwiązując równanie charakterystyczne (2.7) ustalono, że we wzorze (2.9) znak plus odnosi się do współczynników parzystych, a znak minus do nieparzystych.

Po wyznaczeniu ośmiu pierwiastków k_1, \dots, k_8 z równania (2.7) i wykorzystaniu wzoru

$$(2.10) \quad w_n = A_1 e^{ik_1 \frac{x}{R}} + A_2 e^{ik_2 \frac{x}{R}} + \dots + A_8 e^{ik_8 \frac{x}{R}}$$

oraz po przejściu do funkcji trygonometrycznych i po niezbędnych przekształceniach znajdziemy

$$(2.11) \quad w_n = C_1 e^{-b \frac{x}{R}} \cos a \frac{x}{R} + C_2 e^{-b \frac{x}{R}} \sin a \frac{x}{R} + C_3 e^{-d \frac{x}{R}} \cos c \frac{x}{R} + \\ + C_4 e^{-d \frac{x}{R}} \sin c \frac{x}{R} + C_5 e^{b \frac{x}{R}} \cos a \frac{x}{R} + C_6 e^{b \frac{x}{R}} \sin a \frac{x}{R} + \\ + C_7 e^{d \frac{x}{R}} \cos c \frac{x}{R} + C_8 e^{d \frac{x}{R}} \sin c \frac{x}{R},$$

$$(2.12) \quad \Phi_n = 2\kappa^2 \frac{D}{R} \left(-C_1 e^{-b \frac{x}{R}} \sin a \frac{x}{R} + C_2 e^{-b \frac{x}{R}} \cos a \frac{x}{R} + \\ + C_3 e^{-d \frac{x}{R}} \sin c \frac{x}{R} - C_4 e^{-d \frac{x}{R}} \cos c \frac{x}{R} + C_5 e^{b \frac{x}{R}} \sin a \frac{x}{R} - \\ - C_6 e^{b \frac{x}{R}} \cos a \frac{x}{R} - C_7 e^{d \frac{x}{R}} \sin c \frac{x}{R} + C_8 e^{d \frac{x}{R}} \cos c \frac{x}{R} \right),$$

gdzie

$$(2.13) \quad a = \frac{\kappa}{2} \left(1 - \sqrt{\sqrt{1 + \delta_n^2} - \delta_n} \right), \quad b = \frac{\kappa}{2} \left(-1 + \sqrt{\sqrt{1 + \delta_n^2} + \delta_n} \right),$$

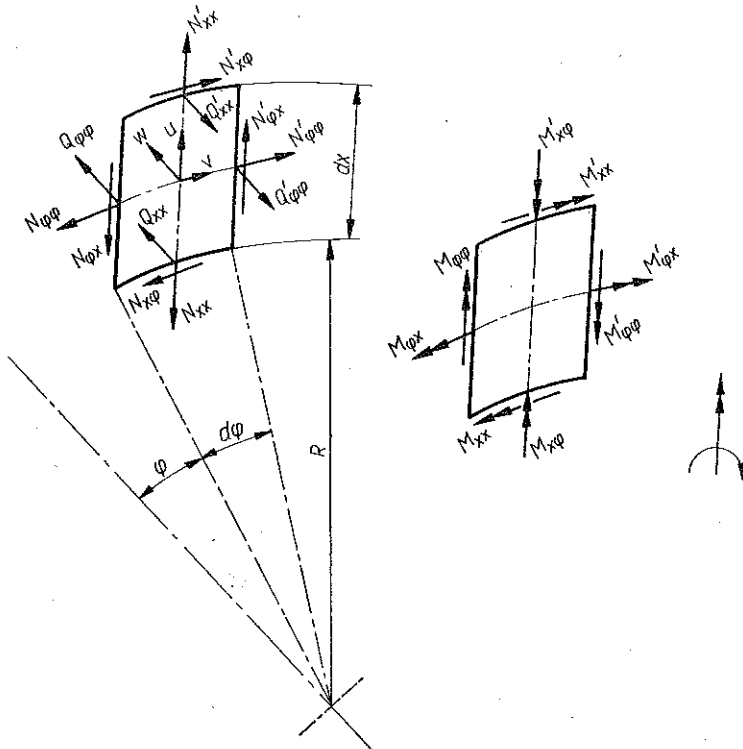
$$(2.14) \quad c = \frac{\kappa}{2} \left(1 + \sqrt{\sqrt{1 + \delta_n^2} - \delta_n} \right), \quad d = \frac{\kappa}{2} \left(1 + \sqrt{\sqrt{1 + \delta_n^2} + \delta_n} \right), \quad \delta_n = \frac{2n^2}{\kappa^2}.$$

Cztery spośród ośmiu wyrazów występujących we wzorach (2.11) oraz (2.12) zawierają czynniki $e^{-b \frac{x}{R}}$ oraz $e^{-d \frac{x}{R}}$. Wyrazy te maleją więc szybko ze wzrostem x . Pozostałe cztery czynniki $e^{b \frac{x}{R}}$ oraz $e^{d \frac{x}{R}}$ zachowują się przeciwnie: rosną, gdy x rośnie. W powłoce walcowej o przekroju początkowym $x=0$ oraz o dużej rozciągłości w kierunku dodatnich x — obciążenia na brzegu $x=0$ wywołują naprężenia i przemieszczenia, które maleć będą w sposób wykładniczy ze wzrostem x . Możemy więc pominąć wyrazy z indeksami 5, 6, 7, 8 przyjmując $C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = 0$. W ten sposób dla rozpatrywanego zadania otrzymuje się następujące ugięcie i funkcję naprężeń:

$$(2.15) \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{-b \frac{x}{R}} \left(C_1 \cos a \frac{x}{R} + C_2 \sin a \frac{x}{R} \right) + \right. \\ \left. + e^{-d \frac{x}{R}} \left(C_3 \cos c \frac{x}{R} + C_4 \sin c \frac{x}{R} \right) \right] \cos n\varphi,$$

$$(2.16) \quad \Phi = 2\kappa^2 \frac{D}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-e^{-b \frac{x}{R}} \left(C_1 \sin a \frac{x}{R} - C_2 \cos a \frac{x}{R} \right) + \right. \\ \left. + e^{-d \frac{x}{R}} \left(C_3 \sin c \frac{x}{R} - C_4 \cos c \frac{x}{R} \right) \right] \cos n\varphi.$$

Sily wewnętrzne w powłoce wyrażają się przez ugięcia (2.15) i funkcje naprężeń (2.16). Znajomość ugięcia pozwala na określenie momentów zginających i sił tnących. Natomiast siły błonowe uzyskuje się na podstawie funkcji naprężeń.



Rys. 2

Sily przekrojowe i momenty przekrojowe zaznaczone są na elementarnym wycinku powłoki walcowej pokazanym na rys. 2. Można je przedstawić w postaci następujących związków fizycznych:

$$\begin{aligned}
 M_{xx} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \frac{\nu}{R^2} w \right), \\
 M_{\phi\phi} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \phi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R^2} \right), \quad M_{x\phi} = -(1-\nu) \frac{D}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi}, \\
 Q_{xx} &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \phi^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\
 Q_{\phi\phi} &= -D \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \phi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \phi^3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right), \\
 N_{xx} &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}, \quad N_{\phi\phi} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad N_{x\phi} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \phi}.
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Z warunków brzegowych zostaną wyznaczone stałe C_1, C_2, C_3 i C_4 .

Element wycięty na brzegu powłoki w otoczeniu punktu przyłożenia siły P pozostaje w równowadze pod działaniem tej siły oraz sił wewnętrznych. Na swobodnym brzegu powłoki $x=0$ siły wewnętrzne powinny być równe zeru. Z warunku tego wynika, że dla $x=0$

$$(2.18) \quad \begin{aligned} N_{xx} &= \pm P \delta(\varphi), & M_{xx} &= 0, & N_{x\varphi} + \frac{M_{x\varphi}}{R} &= 0, \\ Q_{xx} + \frac{\partial M_{x\varphi}}{R \partial \varphi} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $\delta(\varphi)$ jest funkcją Diraca. W tym przypadku na podstawie równań (2.17) otrzymujemy

$$(2.19) \quad \begin{aligned} N_{xx} &= - \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right]_{x=0} = \pm P \delta(\varphi), \\ M_{xx} &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\nu}{R^2} w \right]_{x=0} = 0, \\ N_{x\varphi} + \frac{M_{x\varphi}}{R} &= \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \varphi} - (1-\nu) \frac{D}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right]_{x=0} = 0, \\ Q_{xx} + \frac{\partial M_{x\varphi}}{R \partial \varphi} &= -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0} = 0. \end{aligned}$$

Po wstawieniu do równań (2.19) wyrażeń na ugięcia (2.15) i funkcji naprężeń (2.16) oraz po wykonaniu operacji różniczkowania otrzymujemy

$$(2.20) \quad [N_{xx}]_{x=0} = 2n^2 \kappa^2 D \frac{1}{R^3} (C_2 - C_4) \cos n\varphi = \pm \frac{P}{\pi R} \cos n\varphi,$$

$$(2.21) \quad C_2 - C_4 = \pm \frac{PR^2}{2\pi n^2 \kappa^2 D}.$$

Równanie (2.21) można przedstawić w postaci

$$(2.22) \quad C_1 \alpha_{11} + C_2 \alpha_{12} + C_3 \alpha_{12} + C_4 \alpha_{14} = \alpha_{10},$$

gdzie

$$\alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{12} = 1, \quad \alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{14} = -1,$$

$$\alpha_{10} = \pm \frac{PR^2}{2\pi n^2 \kappa^2 D}.$$

Równanie

$$(2.23) \quad [M_{xx}]_{x=0} = C_1 (b^2 - a^2 - \nu n^2 + \nu) + C_2 (-2ab) + \\ + C_3 (d^2 - c^2 - \nu n^2 + \nu) + C_4 (-2cd) = 0,$$

można przedstawić w postaci

$$(2.24) \quad C_1 \alpha_{21} + C_2 \alpha_{22} + C_3 \alpha_{23} + C_4 \alpha_{24} = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \alpha_{21} &= b^2 - a^2 - \nu(n^2 - 1), & \alpha_{22} &= -2ab, \\ \alpha_{23} &= d^2 - c^2 - \nu(n^2 - 1), & \alpha_{24} &= -2cd. \end{aligned}$$

Równanie

$$(2.25) \quad \left[N_{x\varphi} + \frac{M_{x\varphi}}{R} \right]_{x=0} = C_1 [2\kappa^2 a - (1-\nu) b] + C_2 [2\kappa^2 b + (1-\nu) a] + \\ + C_3 [-2\kappa^2 c - (1-\nu) d] + C_4 [-2\kappa^2 d + (1-\nu) c] = 0$$

można przedstawić w postaci

$$(2.26) \quad C_1 \alpha_{31} + C_2 \alpha_{32} + C_3 \alpha_{33} + C_4 \alpha_{34} = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \alpha_{31} &= 2\kappa^2 a - (1-\nu) b, & \alpha_{32} &= 2\kappa^2 b + (1-\nu) a, \\ \alpha_{33} &= -2\kappa^2 c - (1-\nu) d, & \alpha_{34} &= -2\kappa^2 d + (1-\nu) c. \end{aligned}$$

Równanie

$$(2.27) \quad \left[Q_{xx} + \frac{\partial M_{x\varphi}}{R \partial \varphi} \right]_{x=0} = C_1 b [3a^2 - b^2 + (2-\nu)n^2 - 1] + \\ + C_2 a [3b^2 - a^2 - (2-\nu)n^2 + 1] + C_3 d [3c^2 - d^2 + (2-\nu)n^2 - 1] + \\ + C_4 c [3d^2 - c^2 - (2-\nu)n^2 + 1] = 0$$

można przedstawić w postaci,

$$(2.28) \quad C_1 \alpha_{41} + C_2 \alpha_{42} + C_3 \alpha_{43} + C_4 \alpha_{44} = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \alpha_{41} &= b [3a^2 - b^2 + (2-\nu)n^2 - 1], \\ \alpha_{42} &= a [3b^2 - a^2 - (2-\nu)n^2 + 1], \\ \alpha_{43} &= d [3c^2 - d^2 + (2-\nu)n^2 - 1], \\ \alpha_{44} &= c [3d^2 - c^2 - (2-\nu)n^2 + 1]. \end{aligned}$$

Stałe C_1, C_2, C_3, C_4 należy obliczyć więc z układu równań (2.22), (2.24), (2.26), (2.28), które można zapisać następująco:

Dla $n=0$ stałe C_i przyjmuje się o połowę mniejsze.

$$(2.29) \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{10} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Po podstawieniu (2.15) i (2.16) do (2.17) oraz po przeprowadzeniu operacji różniczkowania uzyskujemy następujące wzory na momenty przekrojowe i siły przekrojowe w powłoce walcowej:

$$\begin{aligned}
 M_{xx} = & -\frac{D}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-b \frac{x}{R}} \left\{ C_1 \left[(b^2 - a^2 - \nu n^2 + \nu) \cos a \frac{x}{R} + 2ab \sin a \frac{x}{R} \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + C_2 \left[(b^2 - a^2 - \nu n^2 + \nu) \sin a \frac{x}{R} - 2ab \cos a \frac{x}{R} \right] \right\} + \right. \\
 & \left. + e^{-d \frac{x}{R}} \left\{ C_3 \left[(d^2 - c^2 - \nu n^2 + \nu) \cos c \frac{x}{R} + 2cd \sin c \frac{x}{R} \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + C_4 \left[(d^2 - c^2 - \nu n^2 + \nu) \sin c \frac{x}{R} - 2cd \cos c \frac{x}{R} \right] \right\} \right\} \cos n\varphi, \\
 M_{\varphi\varphi} = & -\frac{D}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-b \frac{x}{R}} \left\{ C_1 \left[[\nu(b^2 - a^2) - n^2 + 1] \cos a \frac{x}{R} + 2\nu ab \sin a \frac{x}{R} \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + C_2 \left[[\nu(b^2 - a^2) - n^2 + 1] \sin a \frac{x}{R} - 2\nu ab \cos a \frac{x}{R} \right] \right\} + \right. \\
 & \left. + e^{-d \frac{x}{R}} \left\{ C_3 \left[[\nu(d^2 - c^2) - n^2 + 1] \cos c \frac{x}{R} + 2\nu cd \sin c \frac{x}{R} \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + C_4 \left[[\nu(d^2 - c^2) - n^2 + 1] \sin c \frac{x}{R} - 2\nu cd \cos c \frac{x}{R} \right] \right\} \right\} \cos n\varphi, \\
 (2.30) \quad M_{x\varphi} = & -(1-\nu) \frac{D}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} n \left\{ e^{-b \frac{x}{R}} \left[C_1 \left(b \cos a \frac{x}{R} + a \sin a \frac{x}{R} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + C_2 \left(b \sin a \frac{x}{R} - a \cos a \frac{x}{R} \right) \right] + e^{-d \frac{x}{R}} \left[C_3 \left(d \cos c \frac{x}{R} + c \sin c \frac{x}{R} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + C_4 \left(d \sin c \frac{x}{R} - c \cos c \frac{x}{R} \right) \right] \right\} \sin n\varphi, \\
 Q_{xx} = & -\frac{D}{R^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-b \frac{x}{R}} \left[C_1 \left[b(3a^2 - b^2 + n^2 - 1) \cos a \frac{x}{R} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + a(-3b^2 + a^2 + n^2 - 1) \sin a \frac{x}{R} \right] + C_2 \left[b(3a^2 - b^2 + n^2 - 1) \sin a \frac{x}{R} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - a(-3b^2 + a^2 + n^2 - 1) \cos a \frac{x}{R} \right] \right] + \\
 & \left. + e^{-d \frac{x}{R}} \left[C_3 \left[d(3c^2 - d^2 + n^2 - 1) \cos c \frac{x}{R} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + c(-3d^2 + c^2 + n^2 - 1) \sin c \frac{x}{R} \right] + C_4 \left[d(3c^2 - d^2 + n^2 - 1) \sin c \frac{x}{R} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - c(-3d^2 + c^2 + n^2 - 1) \cos c \frac{x}{R} \right] \right] \right\} \cos n\varphi,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.30) \quad Q_{\varphi\varphi} &= -\frac{D}{R^3} \sum_{n=0}^{\infty} n \left\{ e^{-b \frac{x}{R}} \left[C_1 \left[(a^2 - b^2 + n^2 - 1) \cos a \frac{x}{R} - 2ab \sin a \frac{x}{R} \right] + \right. \right. \\
 [c.d.] \quad & \quad \quad \quad \left. \left. + C_2 \left[(a^2 - b^2 + n^2 - 1) \sin a \frac{x}{R} + 2ab \cos a \frac{x}{R} \right] \right] + \right. \\
 & \quad \quad \quad \left. + e^{-d \frac{x}{R}} \left[C_3 \left[(c^2 - d^2 + n^2 - 1) \cos c \frac{x}{R} - 2cd \sin c \frac{x}{R} \right] + \right. \right. \\
 & \quad \quad \quad \left. \left. + C_4 \left[(c^2 - d^2 + n^2 - 1) \sin c \frac{x}{R} + 2cd \cos c \frac{x}{R} \right] \right] \right\} \sin n\varphi, \\
 N_{xx} &= 2\kappa^2 \frac{D}{R^3} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left[-e^{-b \frac{x}{R}} \left(C_1 \sin a \frac{x}{R} - C_2 \cos a \frac{x}{R} \right) + \right. \\
 & \quad \quad \quad \left. + e^{-d \frac{x}{R}} \left(C_3 \sin c \frac{x}{R} - C_4 \cos c \frac{x}{R} \right) \right] \cos n\varphi, \\
 N_{\varphi\varphi} &= 2\kappa^2 \frac{D}{R^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-b \frac{x}{R}} \left[C_1 \left[(b^2 - a^2) \sin a \frac{x}{R} - 2ab \cos a \frac{x}{R} \right] - \right. \right. \\
 & \quad \quad \quad \left. \left. - C_2 \left[(b^2 - a^2) \cos a \frac{x}{R} + 2ab \sin a \frac{x}{R} \right] \right] + \right. \\
 & \quad \quad \quad \left. - e^{-d \frac{x}{R}} \left[C_3 \left[(d^2 - c^2) \sin c \frac{x}{R} - 2cd \cos c \frac{x}{R} \right] - \right. \right. \\
 & \quad \quad \quad \left. \left. - C_4 \left[(d^2 - c^2) \cos c \frac{x}{R} + 2cd \sin c \frac{x}{R} \right] \right] \right\} \cos n\varphi, \\
 N_{x\varphi} &= 2\kappa^2 \frac{D}{R^3} \sum_{n=0}^{\infty} n \left\{ -e^{-b \frac{x}{R}} \left[C_1 \left(b \sin a \frac{x}{R} - a \cos a \frac{x}{R} \right) - \right. \right. \\
 & \quad \quad \quad \left. \left. - C_2 \left(b \cos a \frac{x}{R} + a \sin a \frac{x}{R} \right) \right] + e^{-d \frac{x}{R}} \left[C_3 \left(d \sin c \frac{x}{R} - c \cos c \frac{x}{R} \right) - \right. \right. \\
 & \quad \quad \quad \left. \left. - C_4 \left(d \cos c \frac{x}{R} + c \sin c \frac{x}{R} \right) \right] \right\} \sin n\varphi.
 \end{aligned}$$

Po obliczeniu momentów i sił przekrojowych można przystąpić do określenia naprężeń w powłoce.

Składowe naprężeń pochodzących od zginania oblicza się ze wzoru

$$(2.31) \quad \sigma_M = \frac{6M}{h^2},$$

gdzie M jest odpowiednim momentem przekrojowym. Składowe naprężeń błonowych uzyskuje się ze wzoru

$$(2.32) \quad \sigma_N = \frac{N}{h},$$

gdzie N jest odpowiednią siłą przekrojową.

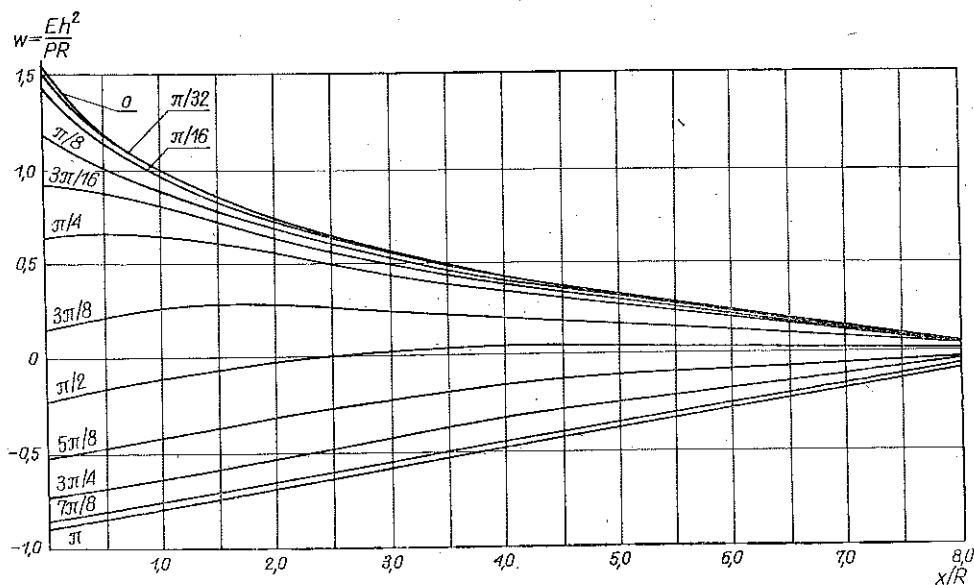
3. OBLICZENIA NUMERYCZNE

Wykonano obliczenia numeryczne dla powłoki o promieniu powierzchni środkowej $R=77$ mm i o grubości $h=R/20$. Przyjęto $E=2,06 \cdot 10^5$ MN/m² oraz $\nu=0,3$. Obliczenia zostały przeprowadzone dla dwóch przypadków obciążenia. W pierwszym powłoka obciążona jest siłą ściskającą $P=5000$ N. W drugim obciążenie ściskające przyłożone jest w dwu przeciwległych punktach obwodu i wynosi $P=2 \times 5000$ N. W celu uzyskania dostatecznej dokładności należy przyjąć do obliczeń $n > 100$ dla wartości $x/R < 0,15$ $n=40$ dla $x/R=0,15$ oraz $n=20$ dla $x/R > 0,3$.

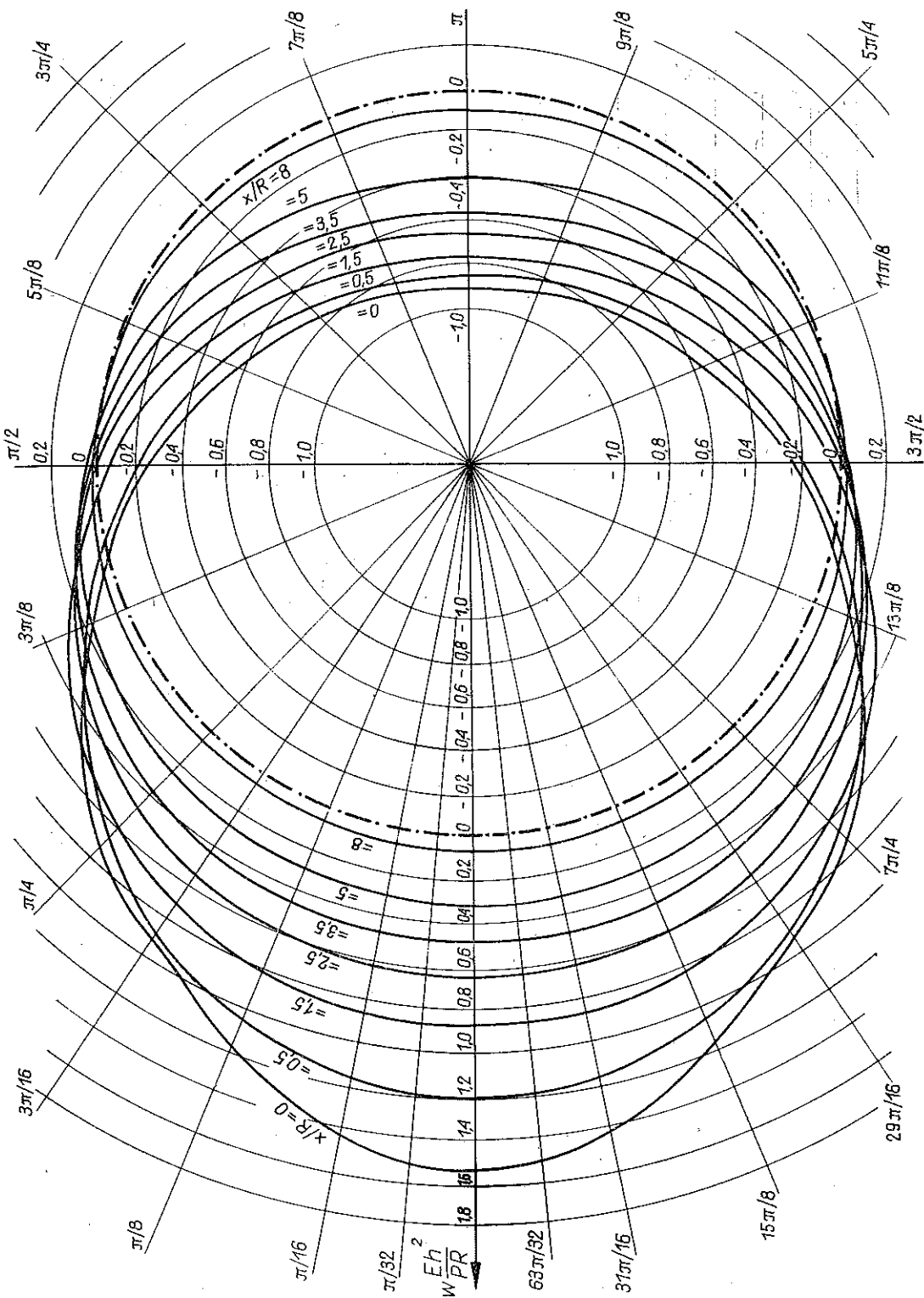
Próby uwzględnienia na przykład 20 wyrazów szeregu dla małych wartości x/R nie dały zadowalających rezultatów. Wyniki obliczeń zostały przedstawione w formie wykresów we współrzędnych bezwymiarowych. Naprężenia wzdłużne wywołane siłami przekrojowymi N_{xx} oznaczone są na wykresach symbolem σ_{xxN} , pochodzące od momentów przekrojowych M_{xx} oznaczono symbolem σ_{xxM} . Naprężenia obwodowe wywołane siłami $N_{\varphi\varphi}$ i momentami $M_{\varphi\varphi}$ zostały oznaczone analogicznie przez $\sigma_{\varphi\varphi N}$ i $\sigma_{\varphi\varphi M}$.

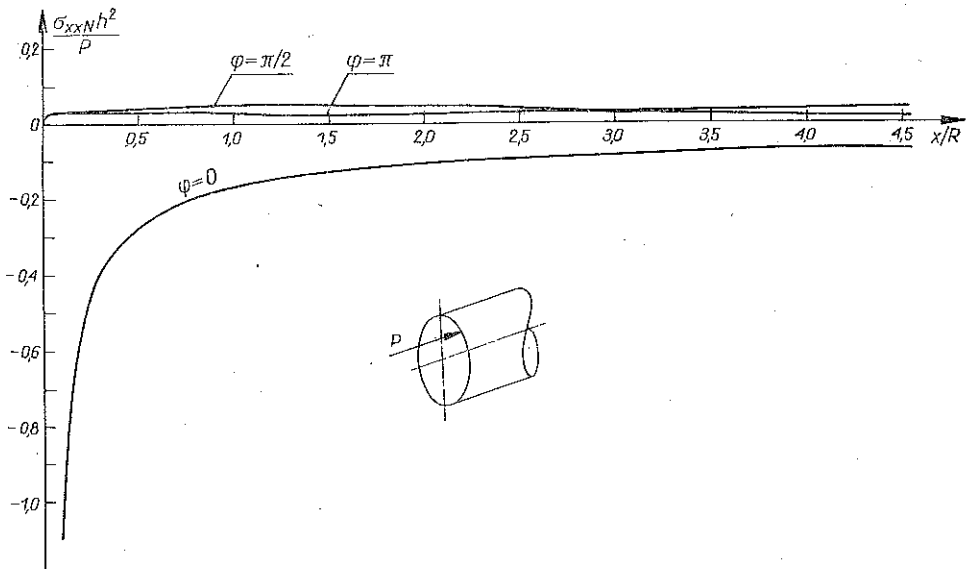
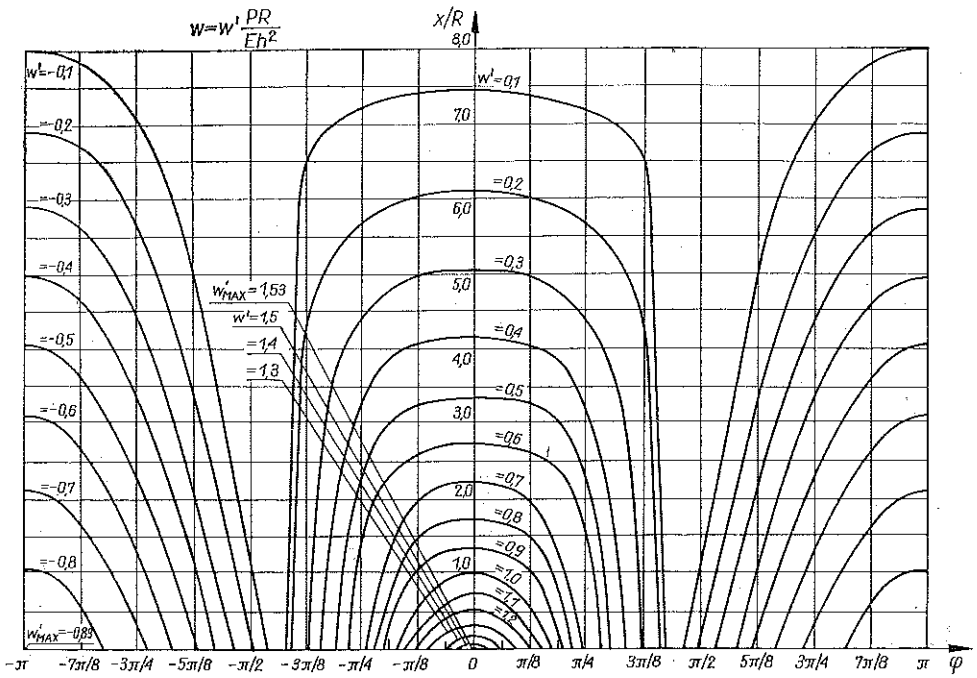
3.1. Powłoka obciążona w jednym punkcie

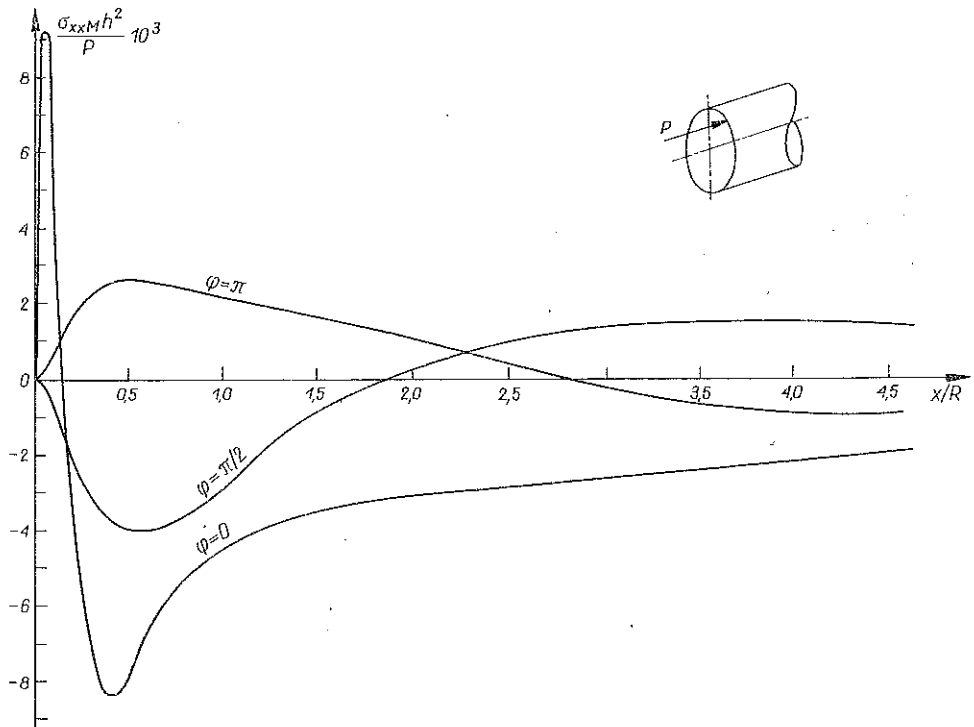
Na rys. 3 i 4 zostały przedstawione teoretyczne ugięcia promieniowe powłoki obciążonej w jednym punkcie jak na rys. 1. Linie jednakowych ugięć tej powłoki są pokazane na rys. 5. Naprężenia błonowe wzdłużne pochodzące od sił przekrojowych N_{xx} zostały uwidocznione na rys. 6a; naprężenia zgięciowe spowodowane momentami przekrojowymi M_{xx} przedstawia rys. 6b.



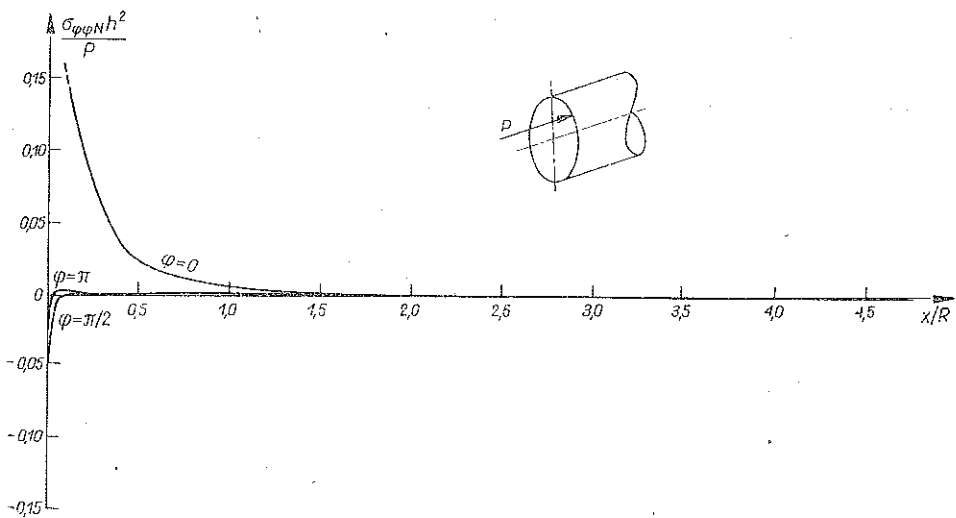
Rys. 3



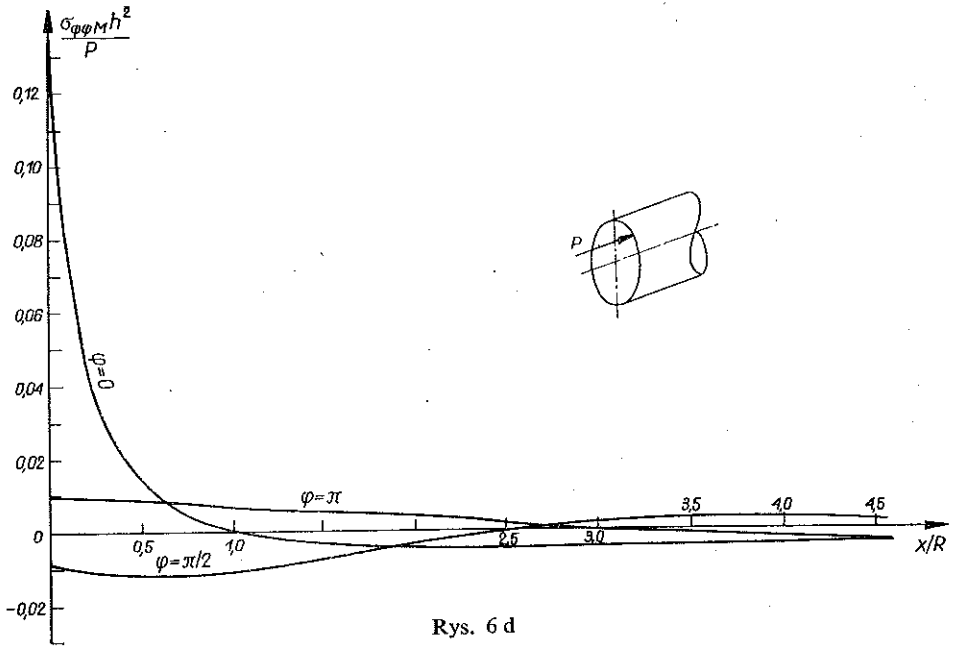




Rys. 6 b



Rys. 6 c

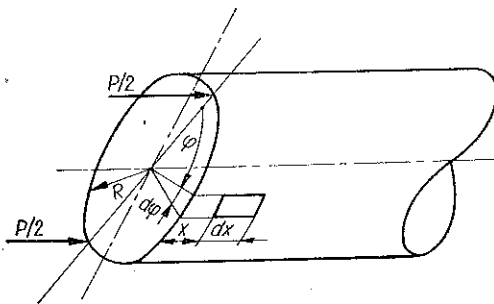


Rys. 6 d

Naprężenia zgięciowe σ_{xxM} są małe w porównaniu z napięciami błonowym σ_{xxN} dla wszystkich wartości kąta φ i dla całego badanego przedziału x/R . Na rys. 6c pokazano wykres naprężeń błonowych obwodowych wywołanych siłami przekrojowymi $N_{\varphi\varphi}$. Naprężenia zgięciowe pochodzące od momentów przekrojowych $M_{\varphi\varphi}$ przedstawione są na rys. 6d.

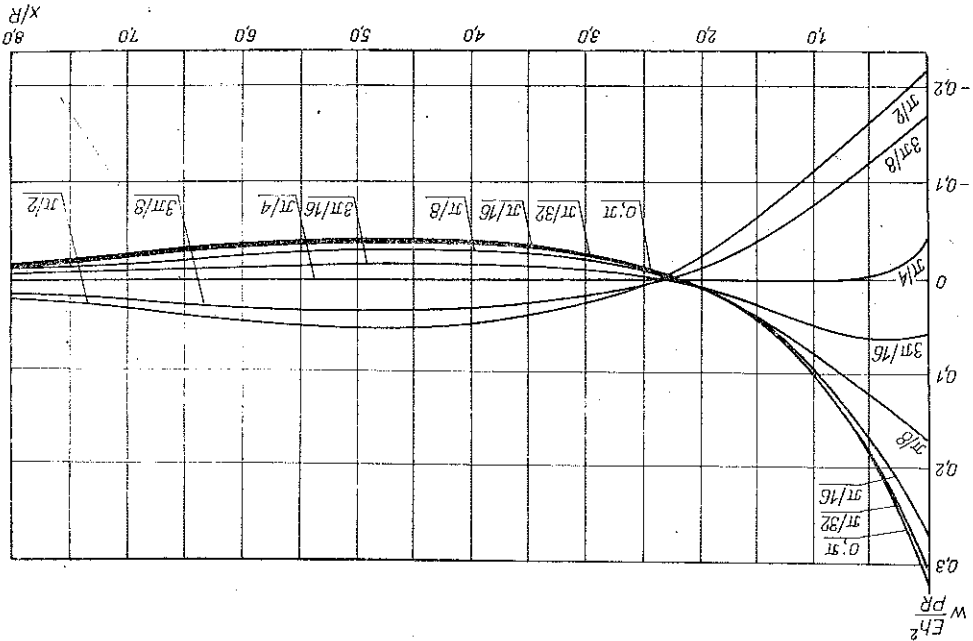
3.2. Powłoka obciążona w dwóch punktach

Obciążenie działające na brzegu powłoki w dwóch punktach (rys. 7) można rozwinąć w szereg Fouriera. Dla tego przypadku obciążenia ugięcia oraz siły i momenty przekrojowe oblicza się, biorąc pod uwagę wyrazy szeregu o nieparzystych numerach. Teoretyczne ugięcia promieniowe rozważanej powłoki zostały



Rys. 7

przedstawione na rys. 8 i 9, a na rys. 10 zostały pokazane linie jednokowych ugięć tej powłoki. Charakterystyczny okazał się fakt zmiany znaku ugięć w przedziale $[2 \div 2,5]$ stosunku x/R dla każdego kąta φ . Podłużne naprężenia błonowe pochodzące od sił N_{xx} przedstawia rys 11a, a naprężenia zgięciowe spowodowane momentami M_{xx} —rys. 11b. Na rys. 11c pokazany jest wykres błonowych naprężeń obwodowych wywołanych siłami $N_{\varphi\varphi}$, a obwodowe naprężenia zgięciowe pochodzące od działania momentów $M_{\varphi\varphi}$ zostały przedstawione na rys. 11d.



Rys. 8

4. DOŚWIADCZENIA

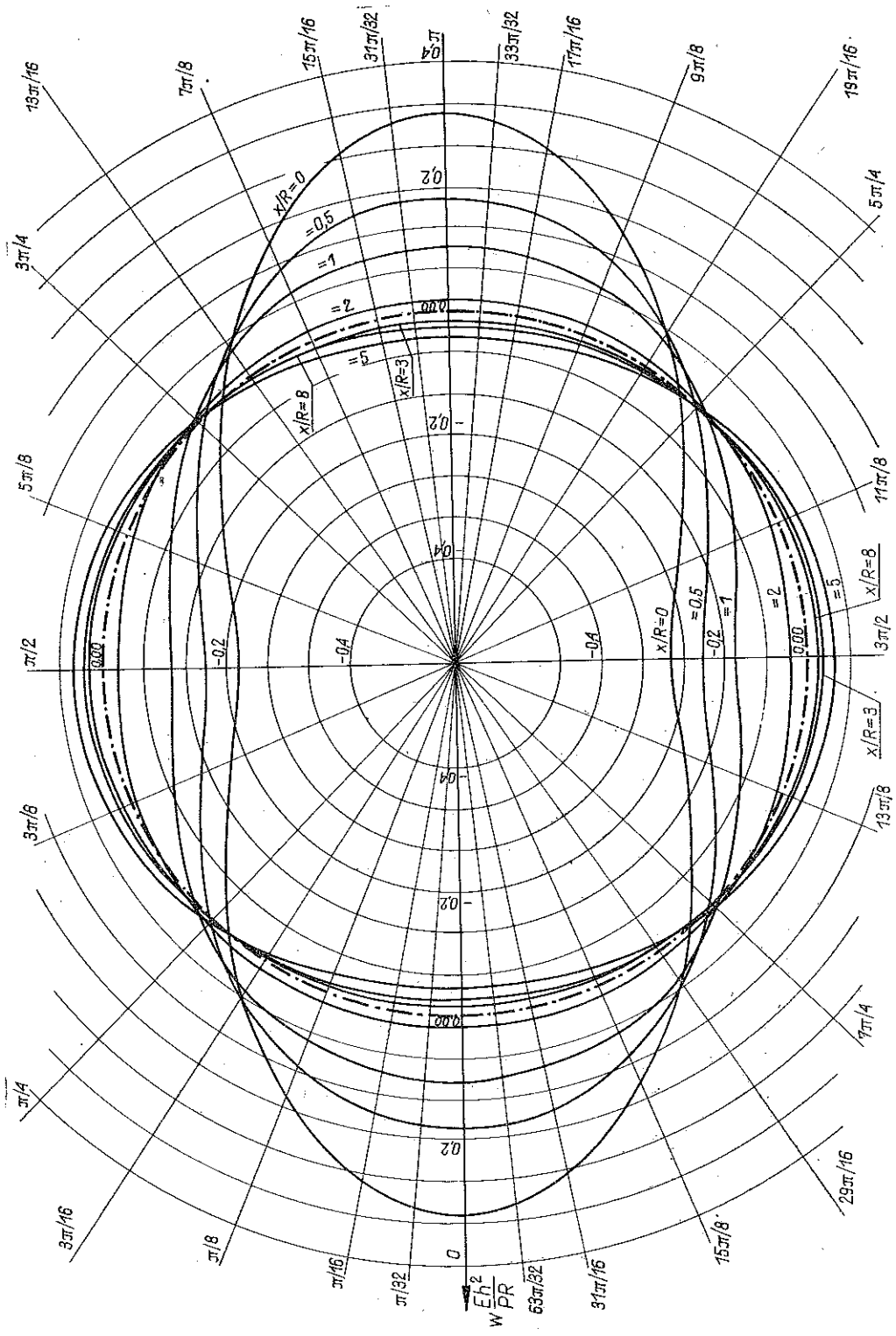
W celu sprawdzenia zgodności uzyskanych wyników teoretycznych z doświadczeniami — przeprowadzono tensometryczne pomiary naprężeń w stalowej rurze walcowej o parametrach, dla których wykonano obliczenia teoretyczne. Rura o wymiarach podanych na rys. 12 została przyspawana do stosunkowo sztywnej płyty spoiną ciągłą na całym obwodzie. Tak przygotowaną powłokę zamocowano w gnieździe maszyny wytrzymałościowej (rys. 13). Brzeg swobodny został obciążony. W pierwszym przypadku siłą ściskającą $P=5000$ N w sposób pokazany na rys. 12 i w drugim przypadku dwoma siłami $2 \cdot P/2=2 \cdot 5000$ N, wprowadzonymi zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 14. Do wprowadzenia sił użyto stalowych kulek o średnicy 6 mm, opartych na gładkiej utwardzonej płycie.

Dokonano pomiarów naprężeń wzdłuż tworzącej walca i po obwodzie w wybranych punktach. Sporządzono wykresy we współrzędnych bezwymiarowych, zestawiając je dla porównania z wynikami teoretycznymi. Jako naprężenia teoretyczne przyjęto sumy napięć błonowych i zgięciowych według wzorów (4.1) i (4.2). Dla naprężeń podłużnych przyjęto

$$(4.1) \quad \sigma_{xx} = \sigma_{xxN} + \sigma_{xxM}.$$

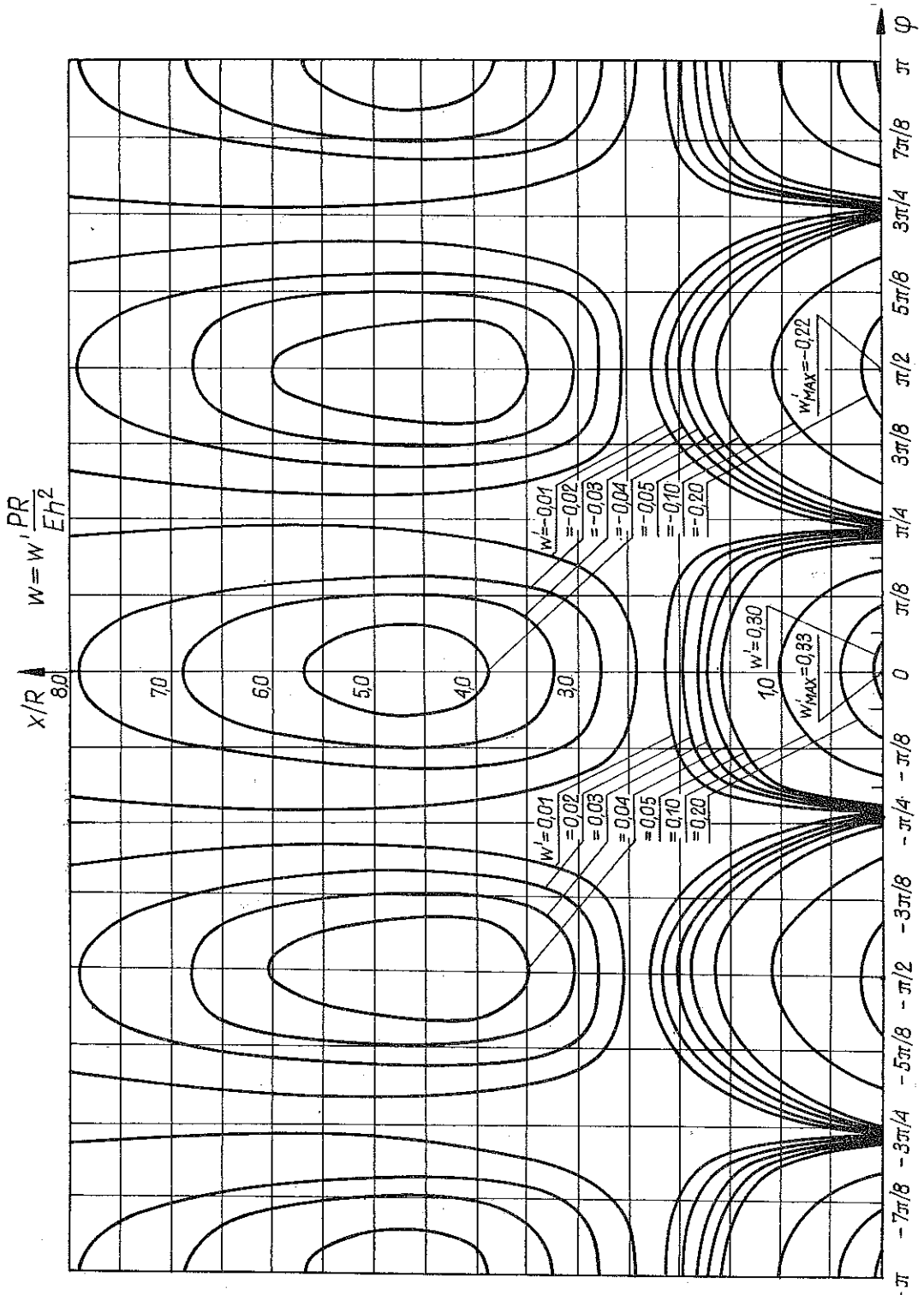
Dla naprężeń obwodowych przyjęto

$$(4.2) \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi N} + \sigma_{\varphi\varphi M}.$$

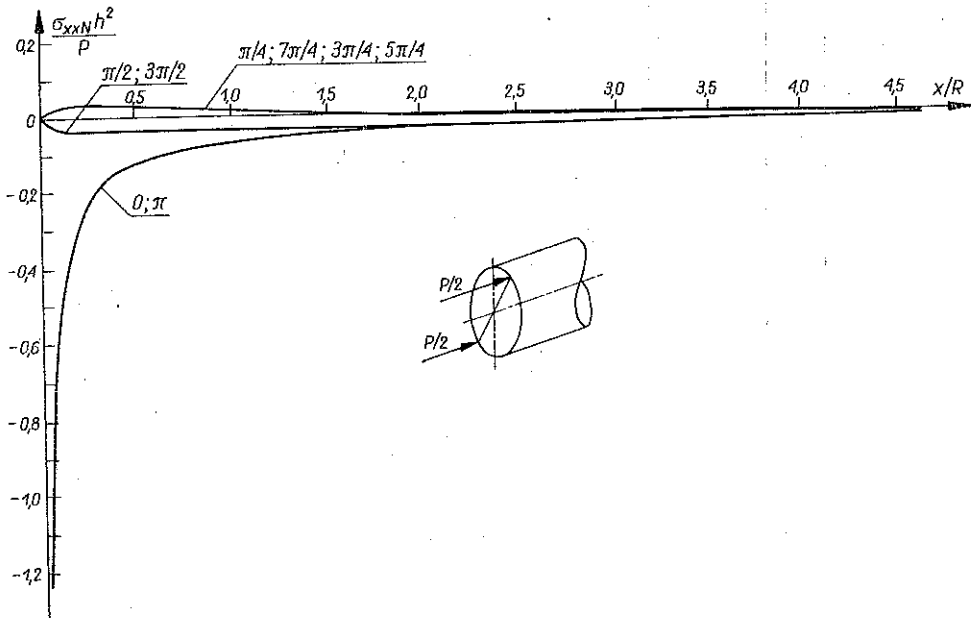


[280]

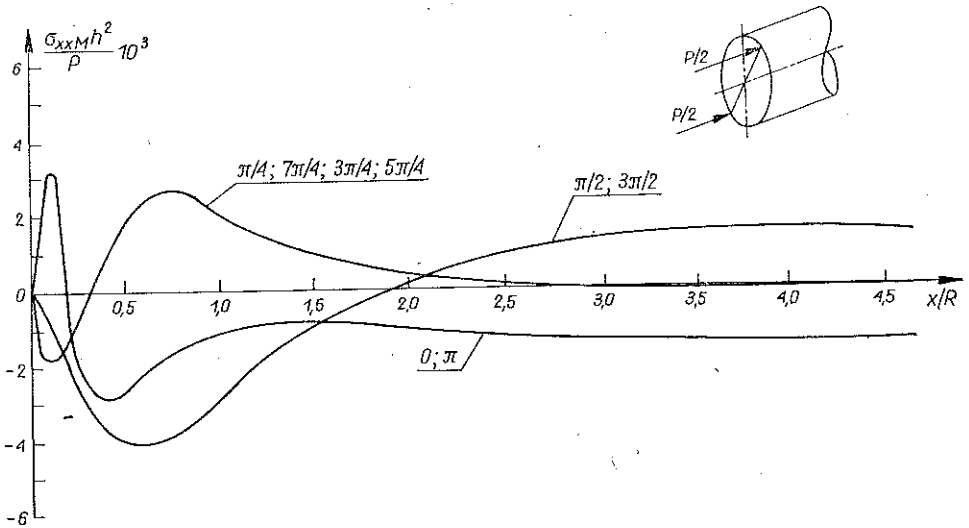
Rys. 9



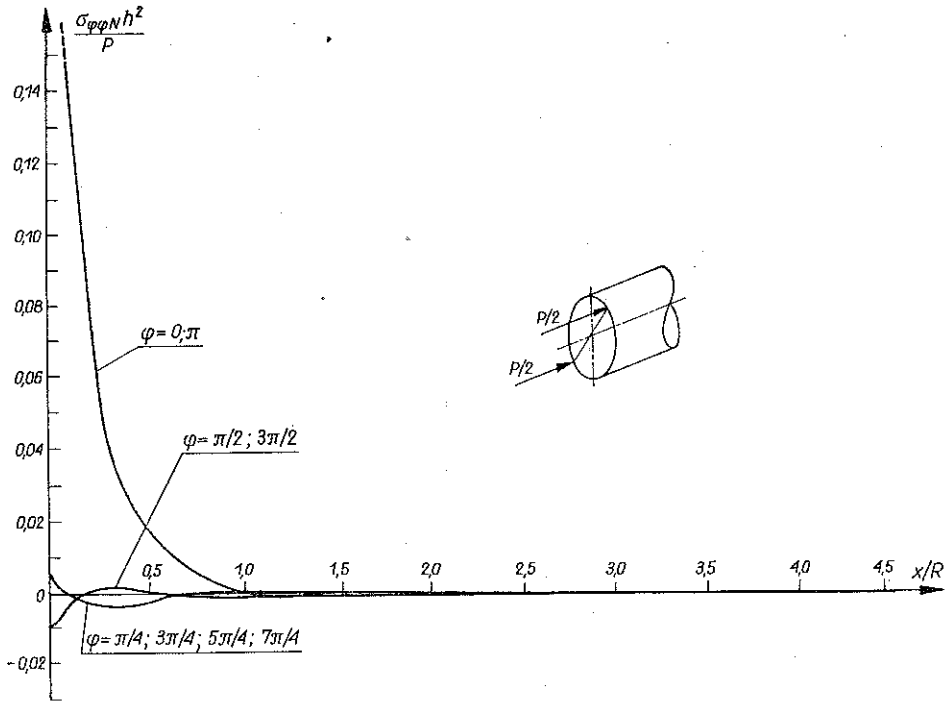
Rys. 10



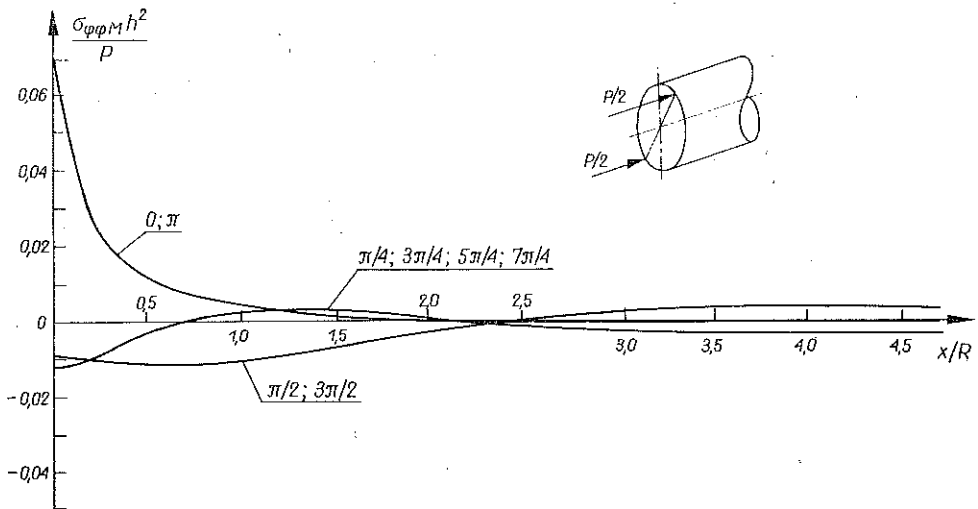
Rys. 11 a



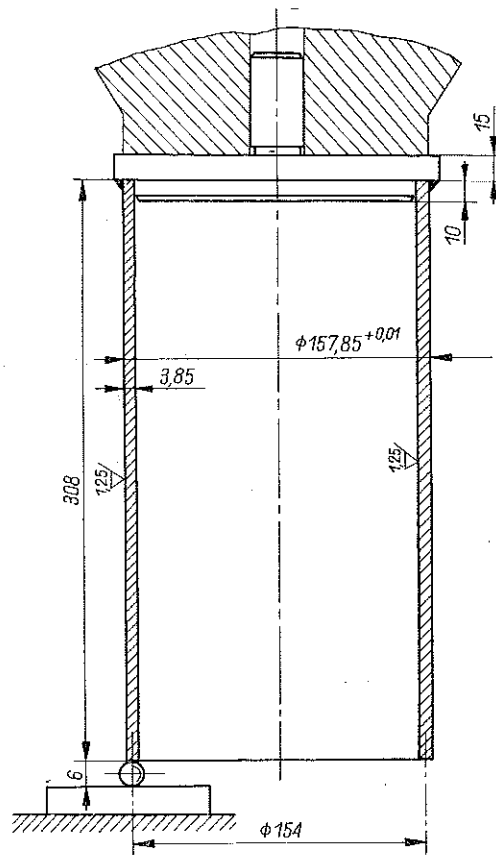
Rys. 11 b



Rys. 11 c



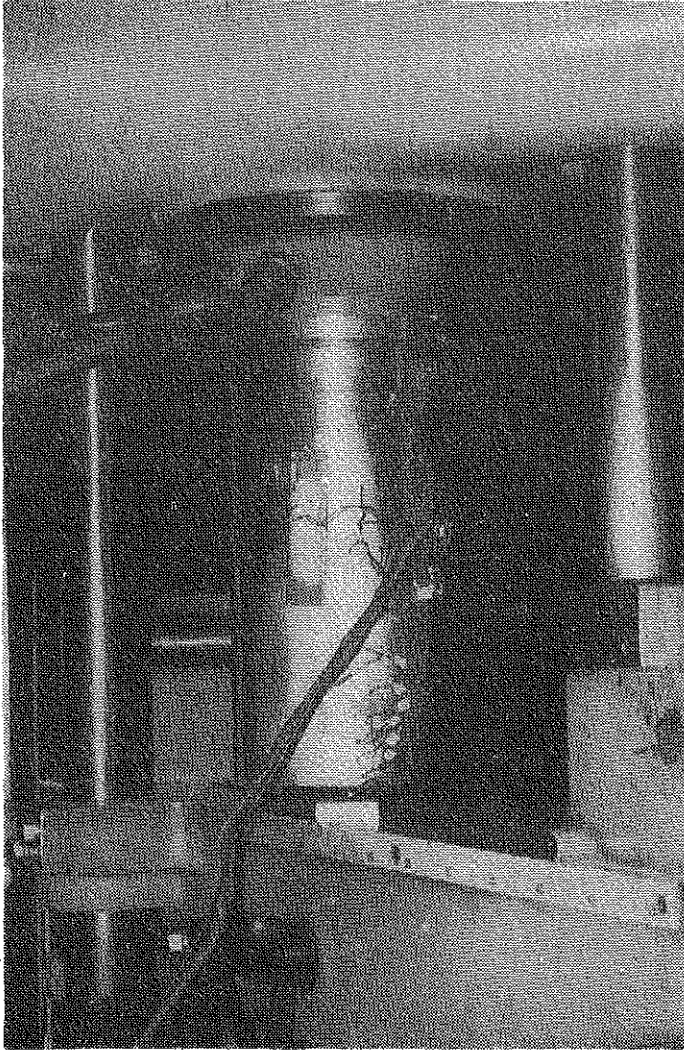
Rys. 11 d



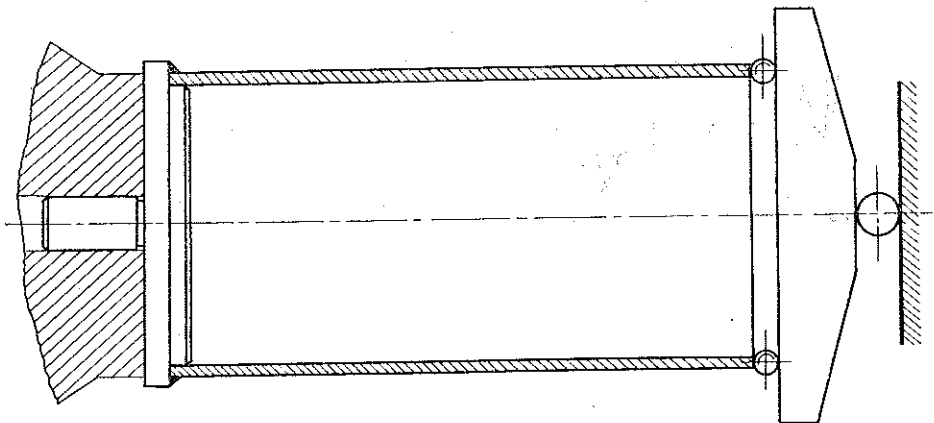
Rys. 12

Na rys. 15 pokazano zestawienie wyników dla powłoki obciążonej w jednym punkcie dla kąta $\varphi=0$. Prosta l odnosi się do maksymalnych naprężeń podłużnych, obliczonych dla rury traktowanej jak belka obciążona mimośrodowo. W rzeczywistości są to naprężenia błonowe występujące w dużej odległości od brzegu. Dla badanej rury wynoszą one około 8 MN/m^2 , co wyraża się na wykresie wielkością bezwymiarową $\sigma_{xx} h^2/P = 2,4 \cdot 10^{-2}$. Prosta l jest asymptotą dla krzywej naprężeń podłużnych, zbudowanej na podstawie wyprowadzonej teorii.

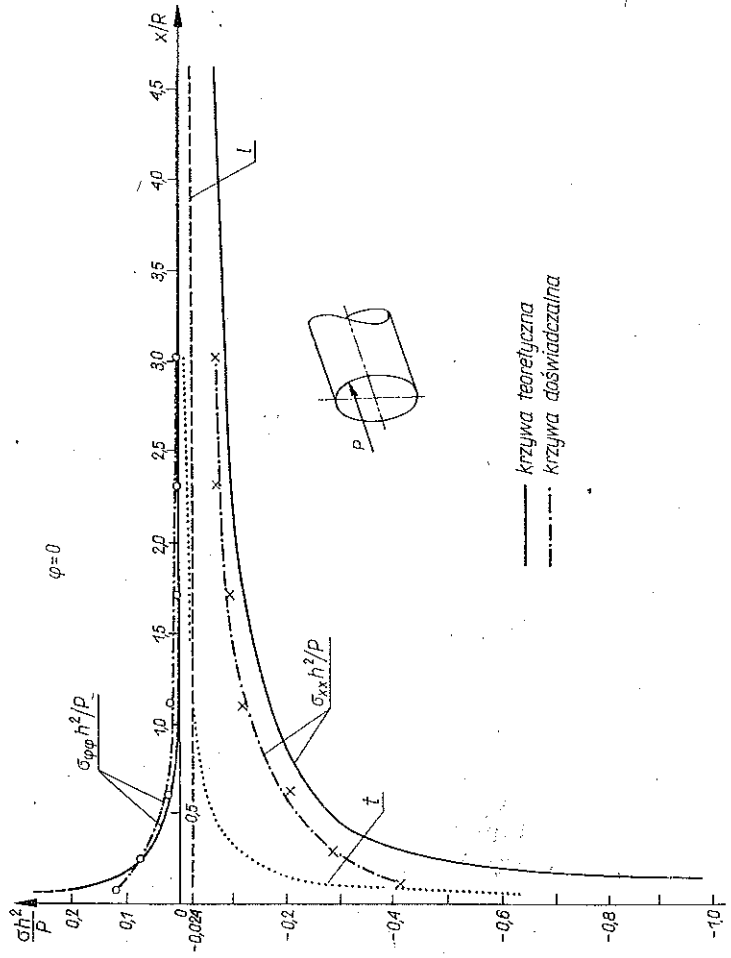
Rys. 16 przedstawia charakterystykę porównawczą wyników teoretycznych i doświadczalnych dla powłoki obciążonej w dwóch przeciwległych punktach obwodu. Wykres naprężeń obliczonych na podstawie wyprowadzonej teorii i zmierzonych tensometrycznie — odnosi się do kąta $\varphi=0, \pi$. Naprężenia odnoszące się do ilorazu wypadkowej sił obciążających rurę przez pole przekroju kołowego wynoszą około $5,4 \text{ MN/m}^2$. Występują one w znacznej odległości od swobodnego końca rury. Naprężenia te $\sigma_{xx} h^2/P = 8 \cdot 10^{-3}$ określa na wykresie prosta k . Również dla porównania na rys. 15 i 16 pokazana jest krzywa t naprężeń teoretycznych, występujących w półnieskończonej tarczy, obciążonej siłą skupioną normalną do brzegu i styczną do płaszczyzny środkowej.



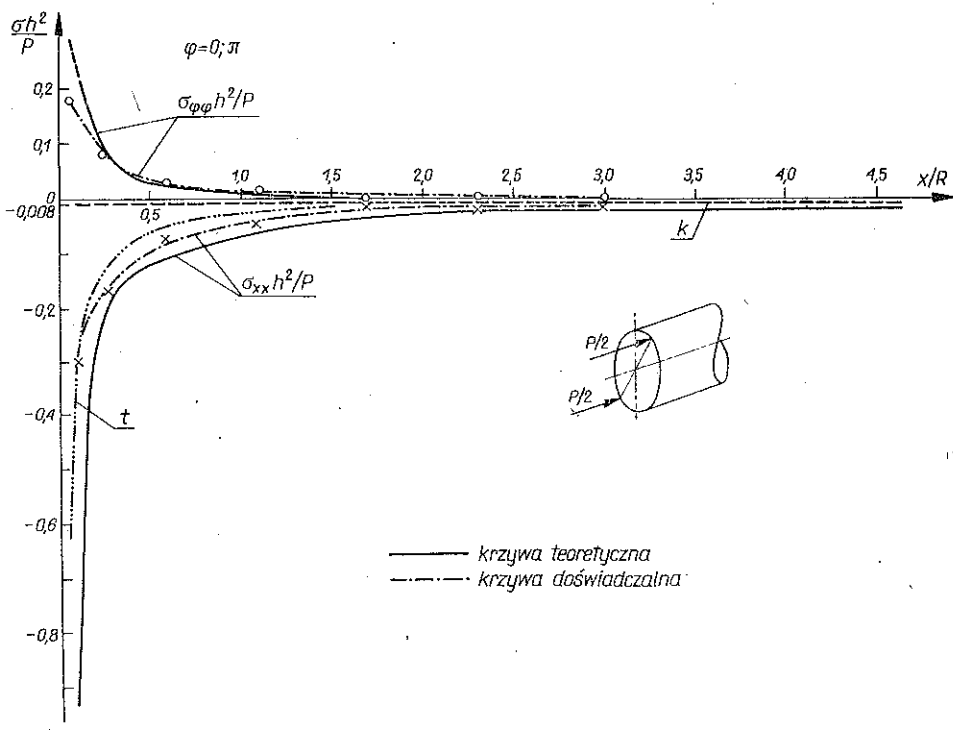
Rys. 13



Rys. 14



Rys. 15



Rys. 16

5. WNIOSKI

Na podstawie wyprowadzonej teorii krzywe naprężeń wykazują dostateczny stopień zgodności z wykresami uzyskanymi doświadczalnie. Z wykresu tych krzywych wynika, że dla obu przypadków obciążeń w odległości od swobodnego brzegu powłoki $x > R$ naprężenia są małe w porównaniu z występującymi w okolicy obciążonego punktu.

Dominujące znaczenie mają naprężenia podłużne, zwłaszcza dla powłoki obciążonej w dwóch przeciwległych punktach obwodu. Obliczone ugięcia promieniowe sięgają daleko wzdłuż tworzącej powłoki. Ze wzrostem x/R zmieniają one swoją wartość w sposób łagodniejszy niż naprężenia, które maleją bardzo gwałtownie w pobliżu miejsca obciążonego siłą skupioną.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. L. H. DONNELL, *Stability of thin walled tubes under torsion*, NACA Report 479, 1933.
2. В. З. Власов, *Общая теория оболочек*, Москва-Ленинград 1949.
3. S. ŁUKASIEWICZ, *Uzupełnienie równań technicznej teorii powłok*, Rozpr. Inżyn., **11**, 1, 1963.
4. L. S. D. MORLEY, *An improvement on Donnell's approximation for thin-walled circular cylinders*, Ing. Mech. App. Math., **12**, 89, 1959.

5. W. FLÜGGE, *Powłoki, obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1972.
6. А. М. Гольденвейзер, *Теория упругих тонких оболочек*, Москва 1953.
7. S. ŁUKASIEWICZ, *Obciążenia skupione w konstrukcjach cienkościemnych*, Praca habilitacyjna, Politechnika Warszawska 1966.
8. S. ŁUKASIEWICZ, *Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach*, PWN, Warszawa 1976.
9. A. KILDEGAARD, *Bending of a cylindrical shell subject to axial loading*, IUTAM Symposium Theory of thin shells, Copenhagen 1967.
10. V. V. NOVOSHILOV, *The theory of thin shells*, Groninggen 1959.

Резюме

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА НАГРУЖЕННАЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ НОРМАЛЬНЫМИ К ГРАНИЦЕ

Представлены рассуждения на тему цилиндрической оболочки нагруженной сосредоточенными силами нормальными к ее свободной границе и касательными к срединной поверхности. Выведены формулы опирающиеся на уравнение Доннелла-Власова. Проведены численные расчеты для двух случаев нагрузки. В первом оболочка нагружена одной силой, во втором — двумя силами действующими в двух противоположных точках периметра. Вычислены радиальные прогибы оболочки, а также напряжения. Результаты представлены в виде графиков. Проведены тензометрические измерения напряжений для обоих родов нагрузки. Теоретические результаты сравнены с экспериментальными. Констатировано, что вычисленные напряжения близки полученным экспериментальным путем.

SUMMARY

A CYLINDRICAL SHELL UNDER CONCENTRATED FORCES NORMAL TO THE BOUNDARY

A cylindrical shell loaded by concentrated forces applied in the direction perpendicular to the free edge and tangent to the middle surface is studied. Equations of the Donnell-Vlasov shell theory is used. Two types of shell loading are considered: a single force and a pair of forces applied of opposite sides of the circumference. In each case numerical solution is given providing plots of radial displacement and stresses.

Tensometric stress measurements are made for both types of loading. The correlation of theoretical solution with experimental results was found to be good.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT TECHNIKI LOTNICZEJ I MECHANIKI STOSOWANEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lipca 1976 r.