

## WARUNKI PLASTYCZNOŚCI DLA MATERIAŁÓW ZBROJONYCH WŁÓKNAMI

WITOLD FRYZE I ZENON MRÓZ (WARSZAWA)

Praca poświęcona jest systematycznemu wyprowadzeniu warunków plastyczności dla kompozytów zbrojonych jedną lub dwiema rodzinami włókien przy założeniu, że zarówno osnowa jak i włókna są materiałami sztywno-idealnie plastycznymi. Pomija się efekt ciągliwości poszczególnych materiałów, a tym samym takie mechanizmy zniszczenia jak pękanie włókien, czy generacja i propagacja szczelin w osnowie.

Rozważone są różne mechanizmy płynięcia dla kompozytu, tzn. jednoczesne uplastycznienie włókien i osnowy oraz plastyczne płynięcie osnowy przy jednym lub obu włóknach sztywnych. Przyjęto, że osnowa spełnia warunki plastyczności Hubera-Misesa, Treski oraz Johansena. W pracy podano metodę wyprowadzania warunków granicznych przy użyciu funkcji dysypacji oraz podano graficzną konstrukcję stanu naprężenia w kompozycie za pomocą kół Mohra.

### 1. WSTĘP

Materiały zbrojone włóknami znajdują coraz szersze zastosowanie przy projektowaniu elementów konstrukcji. Poza tradycyjnym już żelbetem, należy tu wymienić zbrojone polimery, metale, materiały ceramiczne czy też elementy stałych paliw raketowych. W każdym przypadku kompozyt otrzymujemy przez wprowadzenie jednej lub kilku rodzin włókien o dużej wytrzymałości do słabszej osnowy, bardziej zaś złożone układy laminatów powstają przez równoległe połączenie kilku warstw zbrojonych. Charakter pracy tak otrzymanego kompozytu zależy nie tylko od wytrzymałości osnowy i włókien, lecz również od stopnia odkształcalności poszczególnych materiałów. Tak np. w przypadku żelbetu kruchy materiał osnowy zbrojony jest ciągliwymi włóknami. Odwrotnie, w przypadku metali zbrojonych włóknami węglowymi lub boronowymi materiał podstawowy jest ciągliwy, włókna zaś kruche. Istnieją również przypadki, gdy zarówno osnowa jak i włókna są ciągliwe, np. w przypadku polimerów zbrojonych włóknami stalowymi lub miedziowymi.

Znajomość warunku granicznej wytrzymałości lub warunku plastyczności jest sprawą podstawową przy analizie konstrukcji z elementów zbrojonych. Warunek ten można uzyskać na drodze formalnej, wychodząc z ogólnego sformułowania kryterium zniszczenia lub uplastycznienia dla ciał anizotropowych lub też wychodząc z własności poszczególnych materiałów i modelu ich wzajemnego oddziaływania. Do pierwszej grupy warunków można zaliczyć warunek plastyczności HILLA [1] dla ciał anizotropowych będący uogólnieniem warunku Hubera-Misesa. Podobnie HU [2], SAWCZUK [3] i inni uogólnili kryterium plastyczności Treski dla ciał anizo-

tropowych. Użycie tych warunków dla kompozytów możliwe jest przy doświadczalnym wyznaczeniu odpowiedniej ilości stałych materiałowych. Wadą tego podejścia jest brak bezpośredniego związku pomiędzy cechami wytrzymałościowymi osnowy i włókien, a własnościami plastyczności całego kompozytu. Dlatego też bardziej obiecująca jest metoda wychodząca z uproszczonego modelu oddziaływania pomiędzy dwoma materiałami.

MULHERN, ROGERS i SPENCER [4] zaproponowali ogólną teorię zachowania się materiałów złożonych w stanie plastycznym. Przyjęli oni założenie, że włókna w materiale złożonym pozostają sztywne, czyli że deformacja plastyczna w kompozycie nie może zachodzić w kierunku włókien. Podobne założenia przyjął PRAGER [5], którego praca stanowi szczególny przypadek teorii Mulherna, Rogersa i Spencera. LANCE i ROBINSON [6] rozważyli możliwość uplastycznienia włókien, zaniebdali jednak fakt, że włókna przenoszą część naprężeń. Ich teoria płynięcia kompozytów opiera się na warunku Treski. W późniejszej pracy LANCE i HELFINSTINE [7] przyjęli, że materiał złożony jest ze sztywno-plastycznej osnowy podlegającej warunkowi Treski, zbrojonej sztywnymi włóknami. Założenia są zbieżne z tymi, które podał PRAGER [5].

Duży wkład w rozwój teorii materiałów zbrojonych włóknami wnieśli prace MC LAUGHLINA i BATTERMANA [8] oraz MC LAUGHLINA [9]. Podane w nich zostały zależności graniczne dla materiałów zbrojonych wieloma rodzinami włókien, przy czym uwzględniono takie zjawiska jak wyboczenie i wyrwanie włókien. W pracy [8] pominięto wytrzymałość osnowy, włókna zaś opisano modelem sprężysto-plastycznym; natomiast w pracy [9] uwzględniono już wpływ osnowy na wytrzymałość materiału złożonego.

Celem niniejszej pracy jest systematyczne wyprowadzenie warunków plastyczności dla kompozytów zbrojonych jedną lub dwiema rodzinami włókien przy założeniu, że zarówno osnowa jak i włókna są materiałami sztywno-idealnie plastycznymi. Pomijamy zatem efekt ciągliwości poszczególnych materiałów, a tym samym takie mechanizmy zniszczenia jak pękanie włókien, czy generacja i propagacja szczelin w osnowie. W stanie granicznym kompozytu rozpatrzymy kilka mechanizmów plastycznego płynięcia: jednoczesne plastyczne płynięcie włókien i osnowy oraz plastyczne płynięcie osnowy przy jednym lub obu włóknach sztywnych. W przypadku sztywnych włókien ich oddziaływanie na osnowę traktować będziemy jako więzy wymuszające zerowe prędkości odkształceń w kierunku włókien. Rozpatrzymy przypadki, gdy osnowa spełnia warunki plastyczności Hubera-Misesa, Treski oraz Johansena. W ten sposób wyprowadzone warunki plastyczności mogą być stosowane zarówno dla kompozytów metalowych, zbrojonych plastików, jak i z dostatecznym przybliżeniem dla żelbetu czy materiałów ceramicznych. Warunki te możemy traktować jako warunki granicznej wytrzymałości nawet w przypadku jednej fazy kruchej, jak to ma miejsce dla żelbetu. Zbadany zostanie przypadek płaskiego stanu naprężenia i odkształcenia.

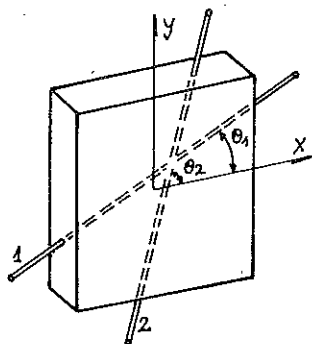
Szereg wyników w niniejszej pracy pokrywa się z wynikami uzyskanymi wcześniej i podanymi w literaturze technicznej dotyczącej stanów granicznych kompozytów. Tym niemniej dla jasności przedstawienia wszystkie warunki plastyczności zostały

wyprowadzone od nowa na podstawie przyjętego modelu upraszczającego. Praca zawiera jednocześnie sporo elementów oryginalnych, jak użycie funkcji dysypacji do wyprowadzenia warunku granicznego, czy też przedstawienie graficznej konstrukcji stanu naprężenia w kompozycie przy użyciu kół Mohra. Niniejsze opracowanie stanowić może zatem podstawę do analizy stanów granicznych zbrojonych tarcz, jak również do optymalizacji tych elementów konstrukcyjnych.

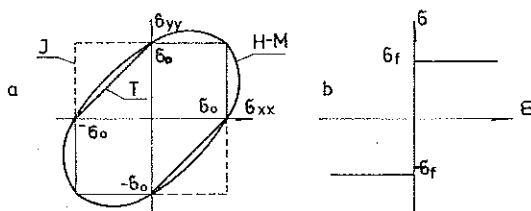
## 2. ZAŁOŻENIA OGÓLNE

Rozważać będziemy materiał składający się z płaskiej osnowy zbrojonej jedną lub dwiema rodzinami włókien, ułożonymi symetrycznie względem płaszczyzny środkowej takiej struktury. Przez rodzinę włókien rozumiemy włókna identyczne, ułożone z jednakową intensywnością, równoległe względem siebie. Taki typowy element pokazany jest na rys. 1.

Zakładamy, że zarówno materiał podstawowy jak i włókna wykonane są z materiału sztywno-idealnie plastycznego. Ponadto przeprowadzamy analizę przy trzech zależnościach granicznych dla izotropowego materiału podstawowego; są to kryteria typu: a) Hubera-Misesa, b) Treski, c) Johansena (rys. 2). Przy formułowaniu tej



Rys. 1. Typowy element kompozytowy



Rys. 2. a) rodzaje warunków granicznych dla osnowy, b) charakterystyka włókien

teorii mówi się o włóknach rozłożonych w pewnym kierunku, jednak należy sobie zdawać sprawę, że jest to teoria kontynualna, pomijająca trójwymiarowy rozkład naprężeń wokół włókien. Rozważa się jedynie wpływ, jaki wywierają włókna na zmianę powierzchni granicznej, przyjętej dla materiału podstawowego. Zupełnie pomija się natomiast takie efekty jak wyboczenie, czy wrywanie włókien.

Typowy element tarczowy (rys. 1) znajduje się w płaskim stanie naprężenia; możemy więc określić ten stan trzema składowymi tensora sił wewnętrznych  $N_{ij}$ :  $N_{xx}^c$ ,  $N_{yy}^c$ ,  $N_{xy}^c$ . Przyjmuje się, że obciążenie działające na element może być rozłożone na część przenoszoną przez materiał podstawowy oraz na część przenoszoną przez włókna. W ortogonalnym układzie współrzędnych powyższy fakt można zapisać następująco:

$$(2.1) \quad N_{ij}^c = N_{ij}^m + N_i n_i n_j,$$

przy czym indeksem  $c$  oznaczone są składowe tensora sił wewnętrznych przenoszonych przez kompozyt, a  $N_{ij}^m$  oraz  $N_s$ ,  $n_i$ ,  $n_j$  wyrażają odpowiednio części tych sił przenoszone przez osnowę oraz przez włókna ( $\mathbf{n}$ —wektor jednostkowy, styczny do kierunku włókien). Oznaczając przez  $A$  i  $A_m$  pole przekroju kompozytu i osnowy można napisać

$$(2.2) \quad N_{ij}^c = \sigma_{ij} A, \quad N_{ij}^m = \tilde{\sigma}_{ij}^{(m)} A_m, \quad N_s = \tilde{\sigma}_s (A - A_m),$$

gdzie symbole  $\sigma_{ij}^c$ ,  $\tilde{\sigma}_{ij}^m$  oraz  $\tilde{\sigma}_s$  oznaczają odpowiednie rzeczywiste naprężenie w kompozycie, osnowie i włóknach. Uwzględniając (2.1) i (2.2) otrzymujemy

$$(2.3) \quad \sigma_{ij}^c = \tilde{\sigma}_{ij}^{(m)} \frac{A_m}{A} + \tilde{\sigma}_s \left(1 - \frac{A_m}{A}\right) n_i n_j.$$

Wygodnie jest wprowadzić oznaczenia

$$(2.4) \quad \tilde{\sigma}_{ij}^m \frac{A_m}{A} = \sigma_{ij}^m, \quad \tilde{\sigma}_s \left(1 - \frac{A_m}{A}\right) = \sigma_s.$$

Podobnie można określić zastępcze granice plastyczności dla osnowy i włókien:

$$(2.5) \quad \sigma_0 = \tilde{\sigma}_0 \frac{A_m}{A}, \quad \sigma_f = \tilde{\sigma}_f \left(1 - \frac{A_m}{A}\right),$$

gdzie  $\tilde{\sigma}_s$  i  $\tilde{\sigma}_f$  oznaczają rzeczywiste granice plastyczności tych materiałów. Zdefiniowane w ten sposób wielkości zastępcze, odniesione do przekroju kompozytu, będą stałe używane w dalszej części pracy.

Naprężenia zastępcze dla osnowy i włókien (2.4) określają udział tych materiałów w przenoszeniu obciążenia działającego na kompozyt. Jeśli  $A_m \rightarrow A$ , to  $\sigma_{ij}^m \rightarrow \tilde{\sigma}_{ij}^m$ , a ponadto

$$(2.6) \quad \lim_{\substack{A_m \rightarrow A \\ \sigma_s \rightarrow \sigma_0}} \tilde{\sigma}_s \left(1 - \frac{A_m}{A}\right) \rightarrow \sigma_s.$$

Obierzmy układ współrzędnych taki, jak na rys. 1. Wzory (2.3) po uwzględnieniu (2.5) można przedstawić następująco:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx}^c &= \sigma_{xx}^m + \sigma_{s1} \cos^2 \theta_1 + \sigma_{s2} \cos^2 \theta_2, \\ \sigma_{yy}^c &= \sigma_{yy}^m + \sigma_{s1} \sin^2 \theta_1 + \sigma_{s2} \sin^2 \theta_2, \\ \sigma_{xy}^c &= \sigma_{xy}^m + \sigma_{s1} \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sigma_{s2} \sin \theta_2 \cos \theta_2. \end{aligned}$$

Przez  $\sigma_{s1}$  oznaczono naprężenie zredukowane w  $l$ -tej rodzinie włókien. Przyjęto równanie powierzchni granicznej dla osnowy napisane przy użyciu naprężeń zredukowanych:

$$(2.8) \quad f(\sigma_{ij}^m) = 0.$$

Założono, że rozważane w tej pracy materiały podlegają stowarzyszonemu prawu płynięcia. Dla gładkiej powierzchni płynięcia mamy

$$(2.9) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^m},$$

a dla miejsc osobliwych na powierzchni plastyczności

$$(2.10) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Jak to już było powiedziane we wstępie, rozpatrzono w pracy różne mechanizmy uplastycznienia kompozytu.

a) Pierwszy z nich to równoczesne uplastycznienie materiału podstawowego oraz włókien. Mechanizm taki zachodzi, gdy naprężenia osiągną wartość graniczną:

$$(2.11) \quad |\sigma_s| = \sigma_f,$$

a prędkość odkształcenia w kierunku włókien ma wartość niezerową,

$$(2.12) \quad \dot{\epsilon}_s = \dot{\epsilon}_{ij} n_i n_j \neq 0.$$

Należy zwrócić uwagę, że musi w tym przypadku zachodzić zgodność odkształceń kompozytu i włókien, czyli muszą być spełnione warunki

$$(2.13) \quad \sigma_s = \sigma_f \Rightarrow \dot{\epsilon}_s = \dot{\epsilon}_{ij} n_i n_j > 0$$

albo

$$(2.14) \quad \sigma_s = -\sigma_f \Rightarrow \dot{\epsilon}_s = \dot{\epsilon}_{ij} n_i n_j < 0.$$

Warunki (2.13) i (2.14) wyznaczają w przestrzeni naprężeń dwa obszary, wewnątrz których zawarte są jedynie te stany naprężenia spełniające warunek plastyczności  $f(\sigma_{ij}^e) = 0$ , dla których zachodzą warunki zgodności odkształceń kompozytu i włókien w rozpatrywanym mechanizmie plastycznego płynięcia. Niedopuszczalne są natomiast takie stany naprężeń na powierzchni granicznej (wyprowadzonej przy założeniu  $\sigma_s = \sigma_f$ ), dla których składowa wektora plastycznego płynięcia jest ujemna ( $\dot{\epsilon}_s = \dot{\epsilon}_{ij} n_i n_j < 0$ ). Oznaczałoby to, że prędkość odkształcenia kompozytu w kierunku włókien jest ujemna, mimo że założono płynięcie włókien w przeciwnym kierunku.

b) Inny mechanizm zniszczenia to plastyczne płynięcie osnowy przy jednym lub obu włóknach sztywnych. Taki przypadek może mieć miejsce, gdy naprężenia we włóknach zawarte są w przedziale

$$(2.15) \quad |\sigma_{st}| < \sigma_f,$$

a prędkość odkształcenia kompozytu w kierunku włókien jest równa zeru,

$$(2.16) \quad \dot{\epsilon}_{st} = 0.$$

W przestrzeni naprężeń mechanizm ten opisany jest walcową powierzchnią graniczną taką, że ortogonalny do niej wektor plastycznego płynięcia spełnia warunek (2.16). Poszukiwana powierzchnia płynięcia dla materiału złożonego będzie stanowiła kombinację wypukłą powierzchni opisujących omówione mechanizmy.

## 3. WARUNKI PŁASTYCZNOŚCI DLA MATERIAŁÓW ZBROJONYCH JEDNĄ RODZINĄ WŁÓKIEN

Rozważać będziemy materiał podstawowy zbrojony jedną rodziną włókien. Wzory (2.7) uproszczą się wtedy do postaci

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx}^c &= \sigma_{xx}^m + \sigma_s \cos^2 \theta, \\ \sigma_{yy}^c &= \sigma_{yy}^m + \sigma_s \sin^2 \theta, \\ \sigma_{xy}^c &= \sigma_{xy}^m + \sigma_s \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

Z kolei wyprowadzone zostaną warunki plastyczności dla kompozytów, których osnowa podlega różnym kryteriom płynięcia.

3.1 *Materiał podstawowy podlegający warunkowi Hubera-Misesa*

W tym przypadku równanie (2.8) przyjmuje postać

$$(3.2) \quad \sigma_{xx}^m{}^2 + \sigma_{yy}^m{}^2 - \sigma_{xx}^m \sigma_{yy}^m + 3\sigma_{xy}^m{}^2 = \sigma_0^2.$$

Po wykorzystaniu wzorów (3.1) otrzymujemy

$$(3.3) \quad (\sigma_{xx}^c - \sigma_s \cos^2 \theta)^2 + (\sigma_{yy}^c - \sigma_s \sin^2 \theta)^2 - (\sigma_{xx}^c - \sigma_s \cos^2 \theta)(\sigma_{yy}^c - \sigma_s \sin^2 \theta) + 3(\sigma_{xy}^c - \sigma_s \sin \theta \cos \theta)^2 = \sigma_0^2.$$

W zależności od stanu naprężenia istnieją dwa typy wyczerpania nośności omówione poprzednio:

a) *Włókna uplastycznione*. Muszą być w tym przypadku spełnione równania (2.13) albo (2.14).

W pierwszym przypadku (tzn. dla  $\sigma_s = \sigma_f$ ) otrzymamy następujący warunek graniczny:

$$(3.4) \quad (\sigma_{xx}^c - \sigma_f \cos^2 \theta)^2 + (\sigma_{yy}^c - \sigma_f \sin^2 \theta)^2 - (\sigma_{xx}^c - \sigma_f \cos^2 \theta)(\sigma_{yy}^c - \sigma_f \sin^2 \theta) + 3(\sigma_{xy}^c - \sigma_f \sin \theta \cos \theta)^2 = \sigma_0^2.$$

Odnosi się on do tych stanów naprężeń, dla których odpowiadający im wektor plastycznego płynięcia spełnia warunek  $\dot{\epsilon}_s = \dot{\epsilon}_{ij} n_i n_j > 0$ . Dla przypadku  $\sigma_s = -\sigma_f$  warunek graniczny ma postać

$$(3.5) \quad (\sigma_{xx}^c + \sigma_f \cos^2 \theta)^2 + (\sigma_{yy}^c + \sigma_f \sin^2 \theta)^2 - (\sigma_{xx}^c + \sigma_f \cos^2 \theta)(\sigma_{yy}^c + \sigma_f \sin^2 \theta) + 3(\sigma_{xy}^c + \sigma_f \sin \theta \cos \theta)^2 = \sigma_0^2.$$

Obszar ważności tego warunku wyznacza nierówność

$$n_i n_j < 0.$$

Równania (3.4) i (3.5) przedstawiają dwie elipsoidy przesunięte symetrycznie względem środka układu współrzędnych.

b) *Włókna sztywne*. Dla tego przypadku muszą być spełnione równania (2.15) i (2.16). Korzystając ze stowarzyszonego prawa płynięcia otrzymujemy

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{xx} &= \lambda [2\sigma_{xx}^c - \sigma_{yy}^c - \sigma_s (2\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)], \\ \dot{\epsilon}_{yy} &= \lambda [2\sigma_{yy}^c - \sigma_{xx}^c - \sigma_s (2\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)], \\ \dot{\gamma}_{xy} &= 2\dot{\epsilon}_{xy} = 6\lambda [\sigma_{xy}^c - \sigma_s \sin \theta \cos \theta]. \end{aligned}$$

Ze wzorów (2.16) i (3.6) dostajemy

$$(3.7) \quad \sigma_s = \frac{1}{2} (p \overset{c}{\sigma}_{xx} + r \overset{c}{\sigma}_{yy} + t \overset{c}{\sigma}_{xy}),$$

przy czym  $p = 2\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ ,  $r = 2\sin^2 \theta - \cos^2 \theta$ ,  $t = 6 \sin \theta \cos \theta$ . Podstawiając  $\sigma_s$  do równania (3.3) i porządkując, dostajemy następujący warunek graniczny

$$(3.8) \quad A(\theta) \overset{c}{\sigma}_{xx}^2 + B(\theta) \overset{c}{\sigma}_{yy}^2 - C(\theta) \overset{c}{\sigma}_{xx} \overset{c}{\sigma}_{yy} + D(\theta) \overset{c}{\sigma}_{xy}^2 - E(\theta) \overset{c}{\sigma}_{xx} \overset{c}{\sigma}_{xy} - F(\theta) \overset{c}{\sigma}_{yy} \overset{c}{\sigma}_{xy} = 4\sigma_0^2,$$

gdzie

$$A(\theta) = 4 - p^2 = 3 \sin^2 \theta (1 + 3 \cos^2 \theta),$$

$$B(\theta) = 4 - r^2 = 3 \cos^2 \theta (1 + 3 \sin^2 \theta),$$

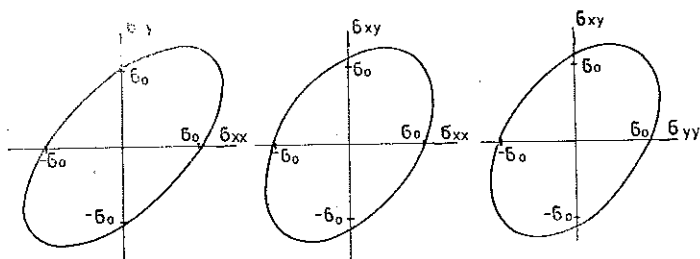
$$C(\theta) = 2(pr + 2) = 18 \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

$$D(\theta) = 12 - t^2 = 12(1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta),$$

$$E(\theta) = 2pt = 6 \sin 2\theta (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta),$$

$$F(\theta) = 2rt = 6 \sin 2\theta (2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta).$$

Równanie (3.8) przedstawia walec eliptyczny w ortogonalnym układzie współrzędnych  $\overset{c}{\sigma}_{xx}$ ,  $\overset{c}{\sigma}_{yy}$ ,  $\overset{c}{\sigma}_{xy}$  (rys. 3). Można wykazać, że walec ten jest styczny do elipsoid opisanych równaniami (3.4) i (3.5). Wraz z ich częściami tworzy zbiór wypukły, któ-



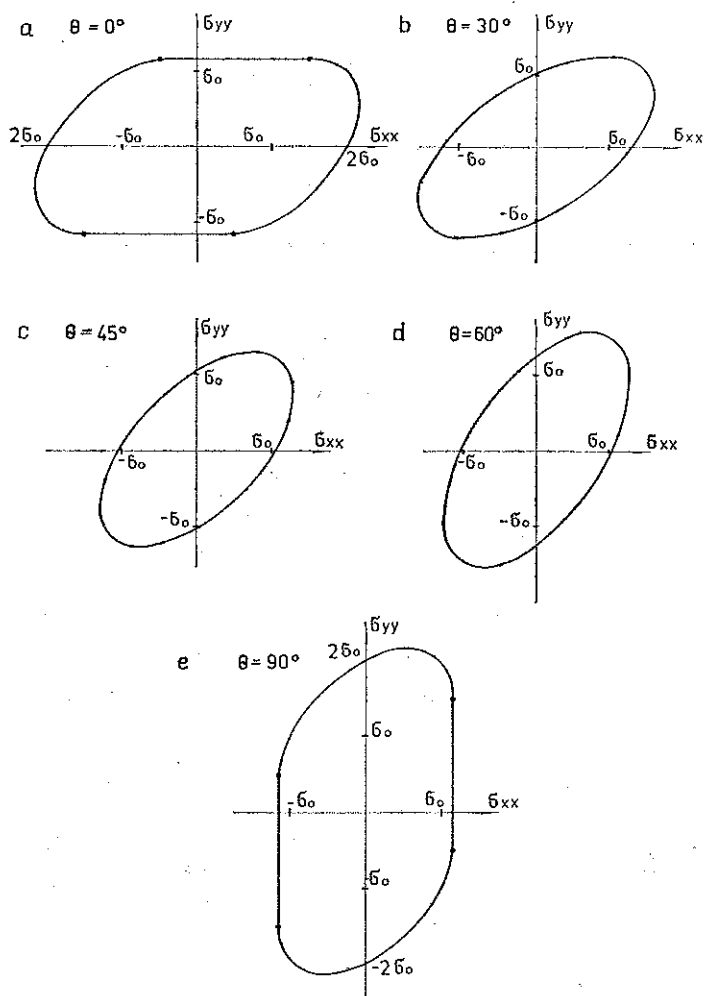
Rys. 3. Przekroje powierzchni walcowej dla  $\theta = 45^\circ$

rego brzegiem jest poszukiwana powierzchnia płynięcia. Zbiór punktów na powierzchni walca odpowiada takiemu mechanizmowi zniszczenia, w procesie którego włókna są sztywne; natomiast punkty na powierzchni elipsoid odpowiadają tym stanom, dla których zachodzi uplastycznienie włókien (rys. 4).

### 3.2. Materiał podstawowy podlegający warunkowi Treski

Warunek plastyczności Treski określony jest równaniami

$$(3.9) \quad \begin{aligned} f_1 &= \overset{m}{\sigma}_{xy}^2 - (\sigma_0 - \overset{m}{\sigma}_{xx}) (\sigma_0 - \overset{m}{\sigma}_{yy}) = 0, \\ f_2 &= (\overset{m}{\sigma}_{xx} - \overset{m}{\sigma}_{yy})^2 + 4\overset{m}{\sigma}_{xy}^2 - \sigma_0^2 = 0, \\ f_3 &= \overset{m}{\sigma}_{xy}^2 - (\sigma_0 + \overset{m}{\sigma}_{xx}) (\sigma_0 + \overset{m}{\sigma}_{yy}) = 0, \end{aligned}$$



Rys. 4. Warunki plastyczności typu Hubera-Misesa dla kompozytu przy różnej orientacji włókien  
 a)  $\theta=0^\circ$ , b)  $\theta=30^\circ$ , c)  $\theta=45^\circ$ , d)  $\theta=60^\circ$ , e)  $\theta=90^\circ$ ,  $\sigma_f=\sigma_0$

Równania te określają walec eliptyczny (3.9)<sub>2</sub> zamknięty dwoma stożkami (3.9)<sub>1</sub> i (3.9)<sub>3</sub> (rys. 5). Przecięcia tych powierzchni są elipsami o równaniach:

przecięcie  $f_1$  i  $f_2$

$$\sigma_{xx}^m + \sigma_{yy}^m = \sigma_0, \quad (3.10)$$

$$\sigma_{xy}^m + \sigma_{yy}^m - \sigma_0 \sigma_{yy}^m = 0;$$

przecięcie  $f_3$  i  $f_2$

$$\sigma_{xx}^m + \sigma_{yy}^m = -\sigma_0, \quad (3.11)$$

$$\sigma_{xy}^m + \sigma_{yy}^m + \sigma_0 \sigma_{yy}^m = 0.$$

Rozważmy obydwa mechanizmy wyczerpania nośności.



a) *Włókna uplastycznione*. Układ równań (2.13) i (3.9) prowadzi do równań granicznych

$$(3.12) \quad \begin{aligned} f_1 &= (\sigma_{xx}^c - \sigma_{yy}^c - \sigma_f \cos 2\theta)^2 + 4 \left( \sigma_{xy}^c - \frac{1}{2} \sigma_f \sin 2\theta \right)^2 - \sigma_0^2 = 0, \\ f_{2,3} &= \left( \sigma_{xy}^c - \frac{1}{2} \sigma_f \sin 2\theta \right)^2 - (\sigma_0 \pm \sigma_{xx}^c \mp \sigma_f \cos^2 \theta) (\sigma_0 \mp \sigma_{yy}^c \pm \sigma_f \sin^2 \theta) = 0. \end{aligned}$$

Równania te w układzie współrzędnych  $\sigma_{xx}^c$ ,  $\sigma_{yy}^c$ ,  $\sigma_{xy}^c$  określają dwa rozsunięte względem siebie obszary (3.9), tj. warunek Treski dla materiału izotropowego.

b) *Włókna sztywne*. Mechanizm ten w przypadku warunku plastyczności z osłabieniami ma bardziej skomplikowaną interpretację geometryczną. Jest rzeczą oczywistą, że może on być opisany jedynie powierzchnią walcową lub płaszczyzną, gdyż tylko wtedy może być spełniony warunek (2.16). Problem polega więc na znalezieniu takich punktów w obszarze plastyczności (3.9), w których wektor plastycznego płynięcia byłby normalny do powierzchni granicznej oraz spełniałby warunek (2.16). Punkty takie można znaleźć na liniach przecięcia opisanych równaniami (3.10) i (3.11) oraz na powierzchni opisanej równaniem (3.9)<sub>2</sub>. W pierwszym przypadku poszukujemy powierzchni walcowych przechodzących przez linie opisane równaniami (3.10) i (3.11), których tworzące są równoległe do danego kierunku. Ten poszukiwany kierunek wyznacza wektor

$$(3.13) \quad \mathbf{n} = \mathbf{i} \cos^2 \theta + \mathbf{j} \sin^2 \theta + \mathbf{k} \sin \theta \cos \theta.$$

Warunek (3.13) wynika z (2.16) i z warunku prostopadłości wektorów.

Równania tych powierzchni walcowych napisane w postaci parametrycznej mają formę

$$(3.14) \quad \frac{\sigma_{xx}^m - \sigma_{xx}^c}{\cos^2 \theta} = \frac{\sigma_{yy}^m - \sigma_{yy}^c}{\sin^2 \theta} = \frac{\sigma_{xy}^m - \sigma_{xy}^c}{\sin \theta \cos \theta},$$

$$\sigma_{xx}^m + \sigma_{yy}^m = \pm \sigma_0,$$

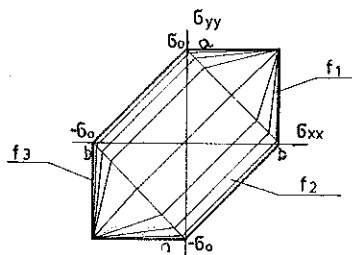
$$\sigma_{xy}^m + \sigma_{xy}^c \mp \sigma_{yy}^m \sigma_0 = 0.$$

Po wyeliminowaniu parametrów  $\sigma_{xx}^m$ ,  $\sigma_{yy}^m$  i  $\sigma_{xy}^m$  otrzymujemy równania graniczne:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} f_{4,5} &= \sigma_{xx}^c \sin^2 \theta + \sigma_{yy}^c \cos^2 \theta + \sigma_{xy}^c \mp \sigma_{xx}^c \sigma_0 \sin^2 \theta \mp \\ &\quad \mp \sigma_{yy}^c \sigma_0 \cos^2 \theta - (\sigma_{xx}^c + \sigma_{yy}^c) \sigma_{xy}^c \sin 2\theta \pm \sigma_{xy}^c \sigma_0 \sin 2\theta = 0. \end{aligned}$$

Rozpatrzmy teraz inną możliwość, tzn. poszukajmy takich miejsc na powierzchni  $f_2 = 0$ , w których spełniony byłby warunek (2.16). Ze stowarzyszonego prawa płynięcia mamy

$$(3.16) \quad \dot{\epsilon}_{xx} = 2\lambda (\sigma_{xx}^m - \sigma_{yy}^m), \quad \dot{\epsilon}_{yy} = -2\lambda (\sigma_{xx}^m - \sigma_{yy}^m), \quad \gamma_{xy} = 8\lambda \sigma_{xy}^m.$$



Rys. 5. Warunek plastyczności Treski

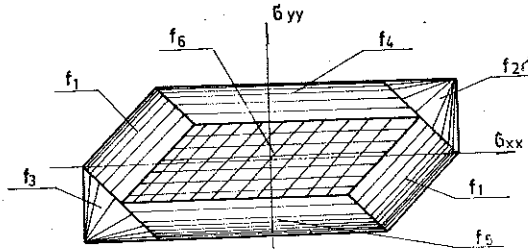
Wstawiając (3.16) do (2.16) otrzymujemy

$$(3.17) \quad (\sigma_{xx}^m - \sigma_{yy}^m) \cos^2 \theta - (\sigma_{xx}^m - \sigma_{yy}^m) \sin^2 \theta + 4\sigma_{xy}^m \sin \theta \cos \theta = 0.$$

Wykorzystanie związków (3.9)<sub>2</sub>, (3.17) oraz (3.1) pozwala otrzymać równanie graniczne:

$$(3.18) \quad f_{6,7} = [(\sigma_{xx}^c - \sigma_{yy}^c) \sin 2\theta - 2\sigma_{xy}^c \cos 2\theta]^2 = \sigma_0^2.$$

Powyższe równanie przedstawia dwie równoległe płaszczyzny styczne do walców eliptycznych określonych równaniami (3.15). Obszar wypukły określony przez te warunki tworzy nowy walec odpowiadający takiemu mechanizmowi zniszczenia,



Rys. 6. Warunek plastyczności Treski dla kompozytu:  $\theta = 0^\circ$ ,  $f_1, f_4, f_5$ —walce;  $f_2, f_3$ —stożki;  $f_6$ —płaszczyzna

w procesie którego włókna są sztywne (rys. 6). Natomiast brzeg obszaru wypukłego określonego przez wszystkie równania podane poniżej daje poszukiwany warunek plastyczności dla materiału zbrojonego. Przekroje tych obszarów płaszczyzną  $\sigma_{xy} = 0$  pokazane są na rys. 7.

### 3.3. Materiał podstawowy podlegający warunkowi Johansena

Warunek Johansena przedstawiony analitycznie ma postać

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \sigma_{xy}^m - (\sigma_0 - \sigma_{xx}^m)(\sigma_0 - \sigma_{yy}^m) &= 0, \\ \sigma_{xy}^m - (\xi\sigma_0 + \sigma_{xx}^m)(\xi\sigma_0 + \sigma_{yy}^m) &= 0, \end{aligned}$$

przy czym  $\xi$  oznacza dowolną liczbę dodatnią. Równania te określają dwa przecinające się stożki (rys. 8).

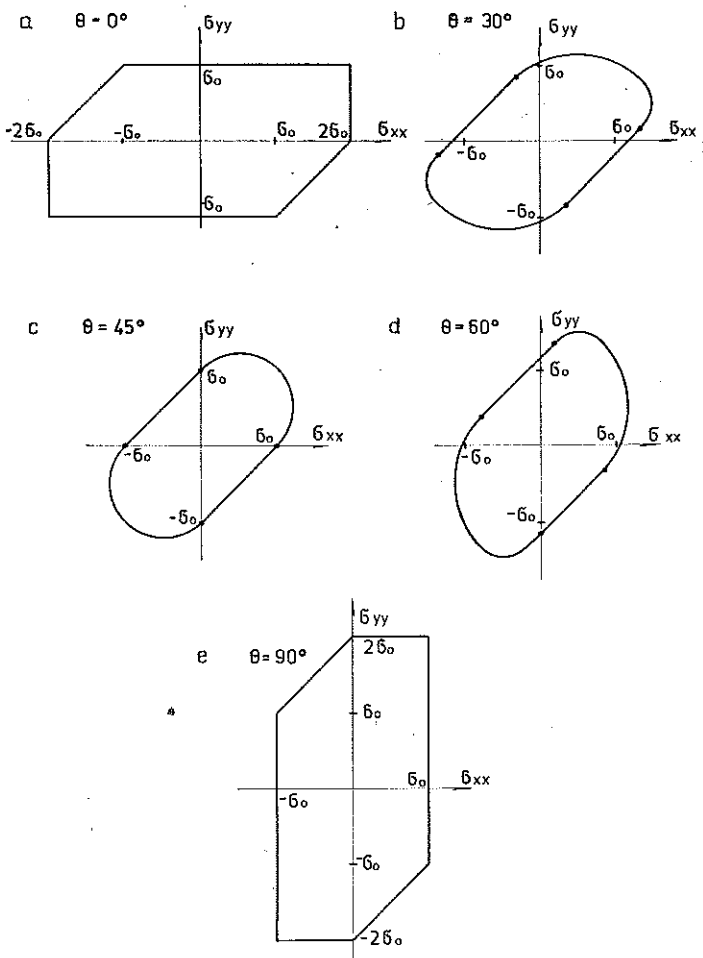
Przecięcie tych stożków jest określone równaniami

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx}^m + \sigma_{yy}^m &= \sigma_0(1 - \xi), \\ \sigma_{xy}^m + \sigma_{yy}^m - \sigma_{yy}^m \sigma_0(1 - \xi) - \xi\sigma_0^2 &= 0. \end{aligned}$$

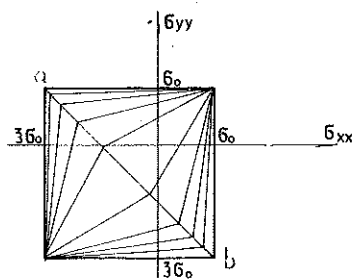
Przypadek włókien uplastycznionych opiszemy przez układ równań (2.13), (2.14), (3.1) i (3.19). Otrzymamy wtedy równanie powierzchni granicznej:

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \left( \sigma_{xy}^c - \frac{1}{2} \sigma_f \sin 2\theta \right)^2 - (\sigma_0 - \sigma_{xx}^c + \sigma_f \cos^2 \theta) (\sigma_0 - \sigma_{yy}^c + \sigma_f \sin^2 \theta) &= 0, \\ \left( \sigma_{xy}^c - \frac{1}{2} \sigma_f \sin 2\theta \right)^2 - (\xi\sigma_0 + \sigma_{xx}^c - \sigma_f \cos^2 \theta) (\xi\sigma_0 + \sigma_{yy}^c - \sigma_f \sin^2 \theta) &= 0. \end{aligned}$$

Natomiast przypadek włókien sztywnych zostanie opisany przez powierzchnię walcową, dla której krzywa (3.20) jest tworzącą spełniającą warunek (2.16). Sposób



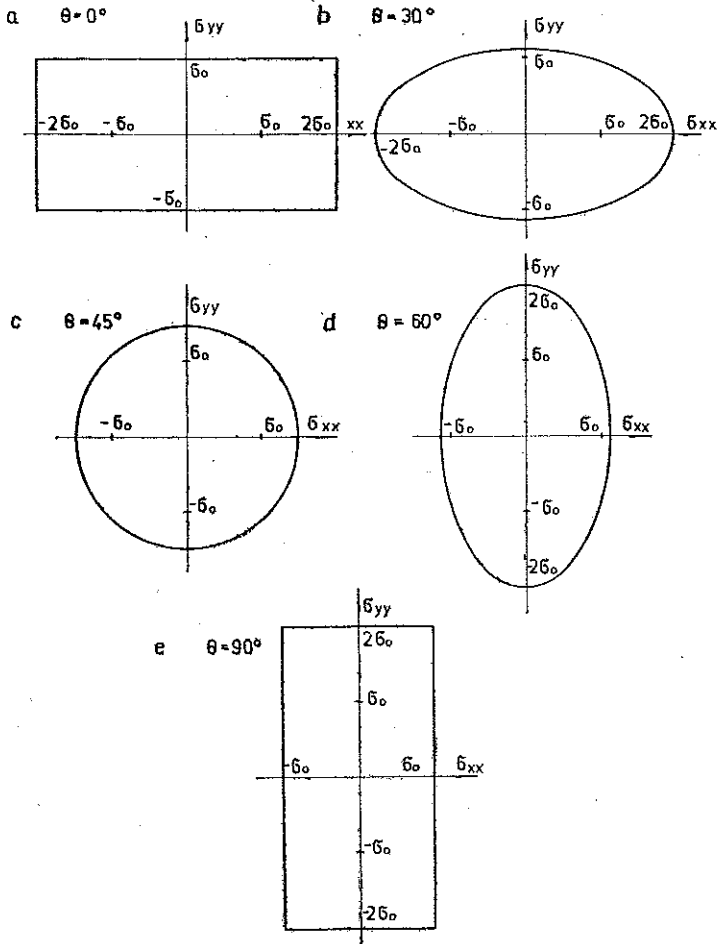
Rys. 7. Warunki plastyczności typu Treski dla kompozytu przy różnej orientacji włókien  
 a)  $\theta=0^\circ$ , b)  $\theta=30^\circ$ , c)  $\theta=45^\circ$ , d)  $\theta=60^\circ$ , e)  $\theta=90^\circ$ ,  $\sigma_f=\sigma_0$



Rys. 8. Warunek plastyczności Johansena

otrzymywania tej powierzchni jest taki sam, jak podany w poprzednim paragrafie. Zależność ta w ostatecznej formie ma postać (rys. 9)

$$(3.22) \quad \sigma_{xx}^2 \sin^2 \theta + \sigma_{yy}^2 \cos^2 \theta + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{xx} \sigma_0 (1 - \xi) (4 \cos^2 \theta - 1) \sin^2 \theta + \\ + \sigma_{yy} \sigma_0 (1 - \xi) (4 \sin^2 \theta - 1) \cos^2 \theta - \sigma_{xy} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \sin 2\theta - \\ - 2 \sigma_{xy} \sigma_0 (1 - \xi) \sin \theta \cos \theta - \xi \sigma_0^2 = 0.$$



Rys. 9. Warunki plastyczności typu Johansena dla kompozytu przy różnej orientacji włókien a)  $\theta=0^\circ$ , b)  $\theta=30^\circ$ , c)  $\theta=45^\circ$ , d)  $\theta=60^\circ$ , e)  $\theta=90^\circ$ ,  $\sigma_f = \sigma_0$

#### 4. WYZNACZANIE WARUNKÓW PLASTYCZNOŚCI DLA KOMPOZYTÓW PRZEZ WYKORZYSTANIE FUNKCJI DYSYPACJI

Równania powierzchni granicznych (tj. warunki graniczne) dla materiałów zbrojonych włóknami można uzyskać także w sposób różniący się od przedstawionego w poprzednich rozdziałach. W tym odmiennym podejściu wykorzystana zostanie

funkcja dysypacji. W pierwszym rzędzie należy więc określić postać takiej funkcji dla materiału zbrojonego. Na podstawie definicji możemy napisać ogólnie

$$(4.1) \quad D = \int_V^c \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV.$$

Ze względu na to, że kompozyt złożony jest z dwóch materiałów, możemy globalną moc dysypowaną (4.1) rozłożyć na części określające dysypację w osnowie oraz we włóknach. Mamy wtedy funkcje dysypacji w postaci sumy

$$(4.2) \quad D = \int_{V^m}^m \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int_{V^f}^f \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV,$$

gdzie indeks  $m$  dotyczy osnowy,  $f$  włókien oraz  $c$  kompozytu. Postać jawna pierwszej całki (4.2) zależy od tego, jakiemu warunkowi plastyczności podlega materiał podstawowy; drugą całkę możemy określić następująco:

$$(4.3) \quad D^f = \int_{A_f}^f \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dA_f = \sigma_{sl} \dot{\epsilon}_{sl} = \sigma_{sl} (\dot{\epsilon}_{xx} \cos^2 \theta_l + \dot{\epsilon}_{yy} \sin^2 \theta_l + \dot{\epsilon}_{xy} \sin 2\theta_l),$$

gdzie  $\sigma_{sl}$  oznacza naprężenie zastępcze we włóknach rodziny  $l$ .

#### 4.1. Kompozyt zbrojony jedną rodziną włókien

Funkcja dysypacji przyjmie wtedy postać

$$(4.4) \quad D = D^m(\dot{\epsilon}_{ij}) + \sigma_s (\dot{\epsilon}_{xx} \cos^2 \theta + \dot{\epsilon}_{yy} \sin^2 \theta + \dot{\epsilon}_{xy} \sin 2\theta).$$

Znając funkcję dysypacji  $D$ , możemy wyznaczyć składowe tensora naprężenia dla kompozytu, gdyż

$$(4.5) \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} = \sigma_{ij}.$$

Stąd mamy

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial D^m(\dot{\epsilon}_{ij})}{\partial \dot{\epsilon}_{xx}} + \sigma_s \cos^2 \theta, \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial D^m(\dot{\epsilon}_{ij})}{\partial \dot{\epsilon}_{yy}} + \sigma_s \sin^2 \theta, \\ \sigma_{xy} &= \frac{\partial D^m(\dot{\epsilon}_{ij})}{\partial \dot{\epsilon}_{xy}} + \sigma_s \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Pierwsze składniki we wzorach (4.6) określają naprężenia w materiale podstawowym, ponieważ

$$(4.7) \quad \frac{\partial D^m(\dot{\epsilon}_{ij})}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} = \sigma_{ij}.$$

Jeżeli w stanie granicznym kompozytu włókna są uplastycznione, to

$$(4.8) \quad |\sigma_s| = \sigma_f, \quad \text{przy czym} \quad \dot{\epsilon}_s \neq 0.$$

W takim przypadku ze wzorów (4.6) obliczamy  $\sigma_{ij}^m$  i wstawiamy do funkcji uplastycznienia  $f(\sigma_{ij}^m)=0$ . Otrzymujemy w ten sposób szukane warunki graniczne dla tego mechanizmu płynięcia plastycznego.

Jeśli natomiast włókna w kompozycie pozostają sztywne, czyli zachodzą warunki (4.9):

$$|\sigma_s| < \sigma_f, \quad \dot{\epsilon}_s = 0,$$

to należy odwrócić wzory (4.6), a wyliczone w ten sposób wielkości  $\dot{\epsilon}_{ij}$  wstawić do warunku  $\dot{\epsilon}_s = 0$ . Można wtedy wyliczyć nieznanne  $\sigma_s$ . Pozostaną jeszcze do wykonania przekształcenia algebraiczne, które pozwolą uzyskać końcową formę poszukiwanych warunków granicznych.

Rozpatrzmy dla przykładu osnowę wykonaną z materiału typu Hubera-Misesa. Wtedy

$$(4.10) \quad D^m = \frac{2\sigma_0 \sqrt{3}}{3} (\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2 + \dot{\epsilon}_{xx} \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{xy}^2)^{1/2}.$$

Natomiast warunki (4.6) przyjmą postać

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{k}{\dot{\epsilon}_i} (2\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy}) + \sigma_s \cos^2 \theta, \\ \sigma_{yy} &= \frac{k}{\dot{\epsilon}_i} (2\dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{xx}) + \sigma_s \sin^2 \theta, \\ \sigma_{xy} &= \frac{k}{\dot{\epsilon}_i} \dot{\epsilon}_{xy} + \sigma_s \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Z tych wzorów znajdziemy

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{xx} &= \frac{\dot{\epsilon}_i}{3k} [2\sigma_{xx}^c - \sigma_{yy}^c - \sigma_s (2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)], \\ \dot{\epsilon}_{yy} &= \frac{\dot{\epsilon}_i}{3k} [2\sigma_{yy}^c - \sigma_{xx}^c - \sigma_s (2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta)], \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= \frac{\dot{\epsilon}_i}{2k} [\sigma_{xy}^c - \sigma_s \sin 2\theta], \end{aligned}$$

gdzie

$$\dot{\epsilon}_i = (\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2 + \dot{\epsilon}_{xx} \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{xy}^2)^{1/2}, \quad k = \frac{2\sigma_0 \sqrt{3}}{3}.$$

Po wstawieniu (4.12) do warunku  $\dot{\epsilon}_s = 0$  obliczamy nieznaną wielkość  $\sigma_s$ . Dalszy sposób postępowania jest już oczywisty.

## 5. GRAFICZNA ILUSTRACJA STANU GRANICZNEGO MATERIAŁU ZBROJONEGO JEDNĄ RODZINĄ WŁÓKNIEN

Rozważania przedstawione w punkcie 3 można zinterpretować graficznie, używając do tego celu płaszczyzny naprężeń Mohra. Ilustracja taka jest, naszym zdaniem, ciekawa z inżynierskiego punktu widzenia, gdyż pozwala lepiej uzmysłowić sobie

zachowanie się kompozytu w stanie granicznym. Wspomniana płaszczyzna naprężeń Mohra wyznaczona jest w ortogonalnym układzie współrzędnych  $\sigma_n$ ,  $\tau_n$ , przy czym zmienne te oznaczają odpowiednio składową normalną i styczną wektora naprężenia w rozpatrywanym punkcie przekroju.

Zależność między tymi składowymi w każdym wybranym punkcie ciała można zilustrować graficznie na omówionej płaszczyźnie za pomocą koła Mohra, przy czym każdy punkt tego koła przedstawia związek między  $\sigma_n$  i  $\tau_n$  w płaszczyźnie przekroju określonej wektorem normalnym  $\mathbf{n}$ . Równanie koła Mohra można napisać następująco:

$$(5.1) \quad (\sigma_n - \sigma)^2 + \tau_n^2 = \tau_{\max}^2,$$

gdzie  $\sigma = 1/2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$  jest naprężeniem średnim, a  $\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_n^2}$  oznacza maksymalne naprężenie styczne, geometrycznie interpretowane jako promień koła Mohra.

Aby zilustrować graficznie stan graniczny kompozytu należy w pierwszym rzędzie odwzorować na płaszczyźnie Mohra warunek plastyczności dla osnowy. W tym celu trzeba potraktować równanie (5.1) jako równanie dwuparametrowej rodziny kół Mohra, przy czym parametrami tymi będą  $\sigma$  i  $\tau_{\max}$ . Obwiednia tych kół obrazowa będzie warunek plastyczności na płaszczyźnie  $\sigma_n$ ,  $\tau_n$ .

W celu znalezienia takiej obwiedni należy z równania

$$(5.2) \quad F(\sigma_n, \tau_n; \sigma, \tau_{\max}) = (\sigma_n - \sigma)^2 + \tau_n^2 - \tau_{\max}^2 = 0$$

wyeliminować parametry  $\sigma$  i  $\tau_{\max}$ . Aby to uczynić, musimy dysponować dwiema zależnościami wiążącymi te parametry. Pierwszy z nich otrzymamy pisząc wybrany warunek plastyczności (np. Hubera-Misesa w PSN) przy użyciu tych zmiennych.

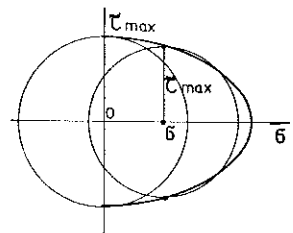
Z równania koła Mohra można znaleźć

$$(5.3) \quad \sigma_1 = \sigma + \tau_{\max}, \quad \sigma_2 = \sigma - \tau_{\max}.$$

Wykorzystując te równanie, z warunku H-M otrzymujemy

$$(5.4) \quad \sigma^2 + 3\tau_{\max}^2 = \sigma_0^2.$$

Równanie to przedstawia elipsę przechodzącą przez punkty  $(\sigma, \tau_{\max})$  kół Mohra obrazujących stan naprężenia na granicy plastyczności w omawianym PSN (rys. 10).



Rys. 10. Wykresy funkcji (5.4)

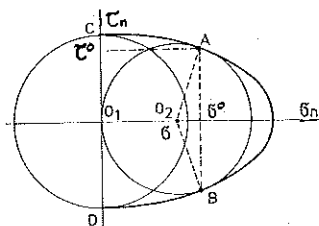
Wykorzystując równanie (5.4) oraz warunek  $\partial F / \partial \sigma = 0$ , otrzymujemy następujące równanie obwiedni (rys. 11):

$$(5.5) \quad 3\sigma_n^2 + 12\tau_n^2 = 4\sigma_0^2.$$

Należy zwrócić uwagę, że obwiednia ta dotyczy jedynie kół Mohra obrazujących stany naprężenia zawarte w obszarze, dla którego równania PSN są typu hiperbo-

licznego i parabolicznego. Mając równanie obwiedni, możemy przejść do zilustrowania stanu granicznego kompozytu.

Zauważmy, że kierunki włókien o zerowej prędkości wydłużenia są kierunkami charakterystycznymi. Wiadomo ponadto, że kierunki charakterystyczne w materiale mogą być obrazowane na płaszczyźnie Mohra jedynie przez te proste, które przechodzą przez punkty styczności koła Mohra z obwiednią. Znaczący to, że ten sam warunek muszą spełniać proste określające kierunki włókien sztywnych. W takim

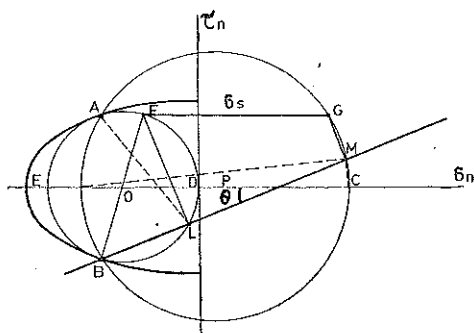


Rys. 11. Fragment obwiedni granicznej dla warunku H-M w PSN

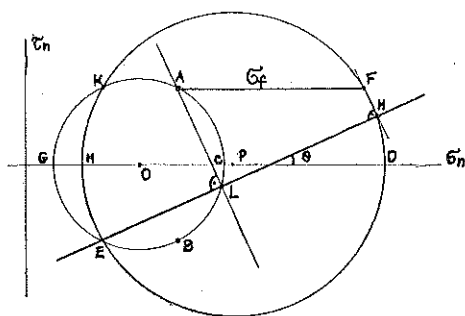
razie konstrukcja koła Mohra dla kompozytu, którego włókna pozostają sztywne w procesie zniszczenia, wygląda następująco (rys. 12): Spośród wszystkich kół stycznych do obwiedni granicznej wybierzemy jedno określające stan naprężenia w materiale podstawowym. Z kolei należy przedstawić graficznie funkcję (2.1) określającą stan naprężenia w materiale złożonym.

Niech prosta przechodząca przez punkt  $B$ , nachylona pod kątem  $\theta$  do osi  $\sigma_n$ , przedstawia kierunek włókien. Punkt  $L$  będzie wtedy biegunem koła Mohra.

W takim razie, prowadząc z bieguna prostą prostopadłą do kierunku włókien, znajdujemy punkt  $F$  wyznaczający stan naprężenia na płaszczyźnie prostopadłej do włókien. W przekroju tym zgodnie z (2.1) zbrojenie nie wpływa na zmianę naprężeń stycznych, natomiast naprężenie normalne wzrasta o  $\sigma_s$ , czyli o wielkość przenoszoną przez włókna. Ze względu na sztywno-plastyczną charakterystykę włókien wielkości tej nie można wyrazić za pomocą składowych ten-



Rys. 12. Konstrukcja koła Mohra dla kompozytu zbrojonego jednym włóknem (sztywnym) w PSN



Rys. 13. Konstrukcja koła Mohra dla kompozytu z jednym włóknem (uplastycznionym) w PSN

sora  $\sigma_{ij}^m$ . Istnieje natomiast jednoznaczna zależność pomiędzy naprężeniem we włóknach, a stanem naprężenia w kompozycie (wzór (3.7)). Stąd wniosek, że dla każdego  $\sigma_s$  koło Mohra dla kompozytu daje się określić w sposób jednoznaczny. Konstrukcja polega na odłożeniu z punktu  $F$ , równoległe do osi  $\sigma_n$ , odcinka obrazującego wartość  $\sigma_s$ . Uzyskujemy w ten sposób punkt  $G$ , przez który musi przechodzić



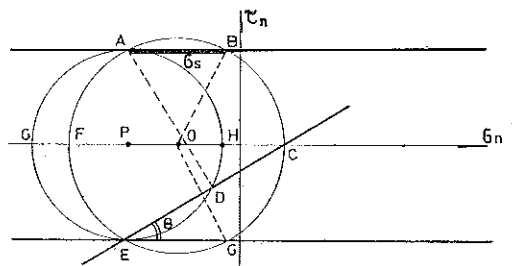
poszukiwane koło. Punkt  $B$  jest wspólny dla obydwu kół, gdyż w kierunku prostopadłym do włókien nie zwiększa się nośność kompozytu. Trzecim punktem wyznaczającym koło Mohra dla kompozytu jest punkt  $A$  ze względu na symetrię względem osi  $\sigma_n$ . Otrzymane w ten sposób koło ma biegun w punkcie  $M$ .

Odmienne przebiega konstrukcja koła Mohra dla kompozytu o włóknach uplastycznionych w chwili zniszczenia (rys. 13). Podobnie jak poprzednio spośród kół stycznych do obwiedni wybieramy jedno określające stan naprężenia w osnowie.

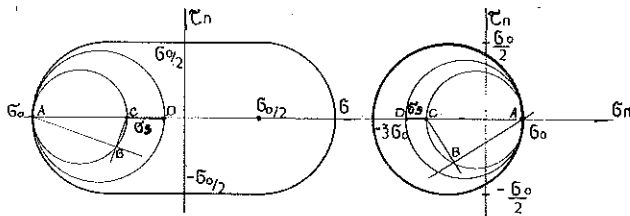
Tym razem nie jest znane położenie bieguna  $L$ , gdyż prosta obrazująca kierunek włókien nie przechodzi przez punkt styczności koła z obwiednią. Wiemy natomiast, że na płaszczyźnie prostopadłej do kierunku włókien materiał podstawowy osiąga stan graniczny. W takim razie prosta prostopadła do kierunku włókien musi przechodzić przez punkt styczności koła Mohra z obwiednią graniczną. Wyznacza ona w ten sposób położenie bieguna  $L$ .

Dalsza część konstrukcji przebiega już podobnie jak w poprzedniej wersji. Z punktu  $A$  odkładamy znaną wielkość  $\sigma_f$  i wykreślamy koło Mohra dla kompozytu wiedząc, że musi ono przechodzić przez punkty  $E$ ,  $K$  i  $F$ . Biegunem tego koła jest punkt  $M$ . Zagadnienie może być również rozpatrywane pod kątem projektowania kompozytów. Jeśli wiemy, jakie naprężenia działają na kompozyt, to jesteśmy w stanie wyznaczyć odpowiednie koło Mohra. Wtedy potrafimy określić graficznie zależność między wytrzymałością osnowy i włókien.

Zasada postępowania w obydwu opisanych przypadkach nie zmieni się, jeżeli przyjmimy inne kryterium plastyczności dla materiału podstawowego. Zmiana



Rys. 14. Konstrukcja koła Mohra zbrojonego jednym włóknem sztywnym w PSO



Rys. 15. Obwiednia dla warunku Treski

Rys. 16. Obwiednia dla warunku Johansena

taka wpływa wyłącznie na postać obwiedni. I tak warunek plastyczności Hubera-Misesa w PSO jest przedstawiony na płaszczyźnie Mohra przez dwie proste równoległe do osi  $\sigma_n$ , odległe od niej o wartość  $\pm k$ . Obwiednię tę wraz z konstrukcją koła Mohra dla kompozytu przedstawia rys. 14. Obwiednie graniczne dla warunków plastyczności Treski i Johansena są przedstawione na rys. 15 i 16.

## 6. WARUNKI PLASTYCZNOŚCI DLA MATERIAŁÓW ZBROJONYCH DWIEMA RODZINAMI WŁÓKIEŃ

W tej części pracy zajmiemy się kompozytami składającymi się z materiału podstawowego (osnowy) zbrojonego dwiema rodzinami włókien. Założenia ogólne zrobione w p. 2 pozostają nadal w mocy. Dla przypomnienia przytoczymy najważniejsze z nich. Zakładać więc będziemy : a) idealną współpracę osnowy i włókien, czego konsekwencją jest pokrywanie się tensorów odkształcenia osnowy i kompozytu,  $\dot{\epsilon}^c = \dot{\epsilon}^m$ ; b) współosiowość tensorów  $\sigma^m$  i  $\dot{\epsilon}^m$ , czyli izotropię materiału podstawowego; c) stowarzyszone prawo płynięcia oraz d) sztywno-plastyczną charakterystykę osnowy i włókien. Ponadto założono, że obciążenie działające na kompozyt może być rozłożone na części przenoszone przez osnowę oraz przez włókna. W związku z tym dla materiału zbrojonego dwiema rodzinami włókien mamy

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx}^c &= \sigma_{xx}^m + \sigma_{s1} \cos^2 \theta_1 + \sigma_{s2} \cos^2 \theta_2, \\ \sigma_{yy}^c &= \sigma_{yy}^m + \sigma_{s1} \sin^2 \theta_1 + \sigma_{s2} \sin^2 \theta_2, \\ \sigma_{xy}^c &= \sigma_{xy}^m + \sigma_{s1} \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sigma_{s2} \sin \theta_2 \cos \theta_2. \end{aligned}$$

Warunki plastyczności dla kompozytów wyprowadzone zostaną w kilku wersjach w zależności od przyjęcia postaci funkcji  $f(\sigma^m) = 0$  czyli w zależności od zdefiniowania materiału podstawowego.

### 6.1. Materiał podstawowy podlegający warunkowi Hubera-Misesa

Warunek plastyczności Hubera-Misesa określa funkcja uplastycznienia o postaci

$$(6.2) \quad f(\sigma_{ij}) = J_2 - k^2 = 0,$$

gdzie  $J_2$  jest drugim niezmiennikiem dewiatora tensora naprężenia,

$$(6.3) \quad J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}.$$

Równanie (6.2) przedstawia najogólniejszą postać warunku H-M dla materiału izotropowego. W tej pracy ograniczymy się do rozpatrzenia dwóch szczególnych przypadków funkcji (6.2) opisujących płaski stan naprężenia PSN oraz płaski stan odkształcenia PSO.

*Płaski stan naprężenia.* Równanie (6.2) przybiera w tym przypadku postać

$$(6.4) \quad \sigma_{xx}^m + \sigma_{yy}^m - \sigma_{xx}^m \sigma_{yy}^m + 3\sigma_{xy}^m = \sigma_0^2.$$

Wykorzystując związki (6.1) możemy (6.4) napisać następująco:

$$(6.5) \quad \begin{aligned} &(\sigma_{xx}^c - \sigma_{s1} \cos^2 \theta_1 - \sigma_{s2} \cos^2 \theta_2)^2 + (\sigma_{yy}^c - \sigma_{s1} \sin^2 \theta_1 - \sigma_{s2} \sin^2 \theta_2)^2 - \\ &- (\sigma_{xx}^c - \sigma_{s1} \cos^2 \theta_1 - \sigma_{s2} \cos^2 \theta_2)(\sigma_{yy}^c - \sigma_{s1} \sin^2 \theta_1 - \sigma_{s2} \sin^2 \theta_2) + \\ &+ 3(\sigma_{xy}^c - \sigma_{s1} \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sigma_{s2} \sin \theta_2 \cos \theta_2)^2 = \sigma_0^2. \end{aligned}$$

Podobnie jak w pierwszej części pracy przeanalizujemy wszystkie typy wyczerpania nośności kompozytu.

Łatwo się zorientować, że istnieją cztery takie mechanizmy

a) *Włókna obydwu rodzin uplastycznione*. Przykład ten ma miejsce, jeśli spełnione są następujące warunki:

$$(6.6) \quad |\sigma_{s1}| = \sigma_{f1}, \quad |\sigma_{s2}| = \sigma_{f2}.$$

Prędkość odkształcenia w kierunkach obydwu rodzin włókien musi być niezerowa:

$$(6.7) \quad \dot{\epsilon}_{s1} \neq 0, \quad \dot{\epsilon}_{s2} \neq 0,$$

przy czym jest dodatnia, gdy włókna są rozciągane, a ujemna—gdy ściskane:

$$(6.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{s1} = \sigma_{f1} &\Rightarrow \dot{\epsilon}_{s1} > 0, & \sigma_{s2} = \sigma_{f2} &\Rightarrow \dot{\epsilon}_{s2} > 0, \\ \sigma_{s1} = -\sigma_{f1} &\Rightarrow \dot{\epsilon}_{s1} < 0, & \sigma_{s2} = -\sigma_{f2} &\Rightarrow \dot{\epsilon}_{s2} < 0. \end{aligned}$$

Funkcję uplastycznienia dla rozpatrywanego przypadku otrzymamy łatwo podstawiając funkcje (6.6) do (6.5). Mamy wtedy

$$(6.9) \quad \begin{aligned} &(\overset{c}{\sigma}_{xx} - \sigma_{f1} \cos^2 \theta_1 - \sigma_{f2} \cos^2 \theta_2)^2 + (\overset{c}{\sigma}_{yy} - \sigma_{f1} \sin^2 \theta_1 - \sigma_{f2} \sin^2 \theta_2) - \\ & - (\overset{c}{\sigma}_{xx} - \sigma_{f1} \cos^2 \theta_1 - \sigma_{f2} \cos^2 \theta_2)(\overset{c}{\sigma}_{yy} - \sigma_{f1} \sin^2 \theta_1 - \sigma_{f2} \sin^2 \theta_2) + \\ & + 3(\overset{c}{\sigma}_{xy} - \sigma_{f1} \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sigma_{f2} \sin \theta_2 \cos \theta_2)^2 = \sigma_0^2. \end{aligned}$$

Równanie to określa cztery elipsoidy przesunięte względem środka układu współrzędnych  $\overset{c}{\sigma}_{xx}$ ,  $\overset{c}{\sigma}_{yy}$ ,  $\overset{c}{\sigma}_{xy}$ , przy czym każda z tych elipsoid odpowiada innym przypadkom

b) *Włókna pierwszej rodziny—uplastycznione, drugiej—sztywne*. Ten przypadek zachodzi, jeśli spełnione są warunki

$$(6.10) \quad |\sigma_{s1}| = \sigma_{f1}, \quad |\sigma_{s2}| < \sigma_{f2}.$$

Prędkość odkształcenia w tym przypadku wynosi

$$(6.11) \quad \dot{\epsilon}_{s1} \neq 0, \quad \dot{\epsilon}_{s2} = 0,$$

przy czym

$$(6.12) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{s1} > 0, & \quad \text{gdy} \quad \sigma_{s1} = \sigma_{f1}, \\ \dot{\epsilon}_{s1} < 0, & \quad \text{gdy} \quad \sigma_{s1} = -\sigma_{f1}. \end{aligned}$$

Sposób postępowania prowadzący do otrzymania warunku plastyczności jest tutaj analogiczny do przedstawionego w poprzedniej części pracy przy omawianiu kompozytu zbrojonego jedną rodziną włókien. Mając do dyspozycji równania (6.1), (6.4), (6.10), (6.11) oraz stowarzyszone prawo płynięcia, należy wyeliminować z nich  $\overset{m}{\sigma}_{s2}$  oraz  $\overset{m}{\sigma}_{ij}$  tak, aby otrzymać następujący warunek uplastycznienia:

$$(6.13) \quad f(\overset{2}{\sigma}_{ij}, \sigma_{f1}, \sigma_0) = 0,$$

Wyrażna postać tego związku jest następująca:

$$(6.14) \quad 3 \sin^2 \theta_2 (3 \cos^2 \theta_2 + 1) \overset{c}{\sigma}_{xx}^2 + 3 \cos^2 \theta_2 (3 \sin^2 \theta_2 + 1) \overset{c}{\sigma}_{yy}^2 + \\ + 3(4 - 3 \sin^2 2\theta_2) \overset{c}{\sigma}_{xy}^2 - 18 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2 \overset{c}{\sigma}_{xx} \overset{c}{\sigma}_{yy} - \\ - 6 \sin 2\theta_2 (3 \cos^2 \theta_2 - 1) \overset{c}{\sigma}_{xx} \overset{c}{\sigma}_{xy} - 6 \sin 2\theta_2 (3 \sin^2 \theta_2 - 1) \overset{c}{\sigma}_{yy} \overset{c}{\sigma}_{xy} + \\ + 2[2p_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) - p_2 \sin^2(\theta_2 - \theta_1) - 2p_1] \sigma_{f1} \overset{c}{\sigma}_{xx} + \\ + 2[2r_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) - r_2 \sin^2(\theta_2 - \theta_1) - 2r_1] \sigma_{f1} \overset{c}{\sigma}_{yy} + \\ + 6[2 \sin 2\theta_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) - \sin 2\theta_2 \sin^2(\theta_2 - \theta_1) - 2 \sin 2\theta_1] \sigma_{f1} \overset{c}{\sigma}_{xy} + \\ + [m^2 + 4 - 4m \cos^2(\theta_2 - \theta_1) + 2m \sin^2(\theta_2 - \theta_1)] \sigma_{f1}^2 = 4\sigma_0^2,$$

przy czym przyjęto następujące oznaczenia:  $p_i = 2 \cos^2 \theta_i - \sin^2 \theta_i$ ,  $r_i = 2 \sin^2 \theta_i - \cos^2 \theta_i$ ,  $m = 2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) - \sin^2(\theta_1 - \theta_2)$ .

Równanie (6.14) przedstawia dwa walce eliptyczne (przypadki (6.12)) w ortogonalnym układzie współrzędnych  $\overset{c}{\sigma}_{xx}$ ,  $\overset{c}{\sigma}_{yy}$ ,  $\overset{c}{\sigma}_{xy}$ . Walce te są styczne do odpowiednich elipsoid (6.9).

c) *Włókna pierwszej rodziny — sztywne, drugiej — uplastycznione.* Przypadek ten jest odwrotny do poprzednio rozpatrywanego, tzn.

$$(6.15) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{s1} &= 0, & \text{gdy} & \quad |\sigma_{s1}| < \sigma_{f1}, \\ \varepsilon_{s2} &\neq 0, & \text{gdy} & \quad |\sigma_{s2}| = \sigma_{f2}. \end{aligned}$$

Sposób uzyskania funkcji uplastycznienia jest identyczny dla przypadku b) i prowadzi do następującego warunku uplastycznienia:

$$(6.16) \quad 3 \sin^2 \theta_1 (3 \cos^2 \theta_1 + 1) \overset{c}{\sigma}_{xx}^2 + 3 \cos^2 \theta_1 (3 \sin^2 \theta_1 + 1) \overset{c}{\sigma}_{yy}^2 + 3(4 - 3 \sin^2 2\theta_1) \overset{c}{\sigma}_{xy}^2 - \\ - 18 \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 \overset{c}{\sigma}_{xx} \overset{c}{\sigma}_{yy} - 6 \sin 2\theta_1 (3 \cos^2 \theta_1 - 1) \overset{c}{\sigma}_{xx} \overset{c}{\sigma}_{xy} - \\ - 6 \sin 2\theta_1 (3 \sin^2 \theta_1 - 1) \overset{c}{\sigma}_{yy} \overset{c}{\sigma}_{xy} + 2[p_1 m - 2p_2] \sigma_{f2} \overset{c}{\sigma}_{xx} + 2[r_1 m - \\ - 2r_2] \sigma_{f2} \overset{c}{\sigma}_{yy} + 6[m \sin 2\theta_1 - 2 \sin 2\theta_2] \sigma_{f2} \overset{c}{\sigma}_{xy} + (4 - m^2) \sigma_{f2}^2 = 4\sigma_0^2.$$

Równanie (6.16) określa, podobnie jak poprzednie, dwa walce eliptyczne styczne do pozostałych dwóch elipsoid (6.9).

d) *Obydwie rodziny włókien sztywne.* W tym przypadku naprężenia we włóknach obydwu rodzin nie przekraczają granicy plastyczności:

$$(6.17) \quad |\sigma_{s1}| < \sigma_{f1}, \quad |\sigma_{s2}| < \sigma_{f2},$$

natomiast prędkości odkształcenia w kierunku obydwu włókien są równe zeru:

$$(6.18) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{s1} &= \dot{\varepsilon}_{xx} \cos^2 \theta_1 + \dot{\varepsilon}_{yy} \sin^2 \theta_1 + \gamma_{xy} \sin \theta_1 \cos \theta_1, \\ \dot{\varepsilon}_{s2} &= \dot{\varepsilon}_{xx} \cos^2 \theta_2 + \dot{\varepsilon}_{yy} \sin^2 \theta_2 + \gamma_{xy} \sin \theta_2 \cos \theta_2. \end{aligned}$$

Włókna są więc niewydłużalne, czyli ich kierunki są kierunkami charakterystycznymi.

Na rys. 17 przedstawiono koło Mohra dla prędkości odkształceń i zilustrowano omawiany przypadek. Dla dwóch nieodkształcalnych rodzin włókien znane są kierunki zerowych wydłużeń w materiale. Pozwala to natychmiast określić kierunki główne odkształceń. Przebiegają one po dwusiecznych kątów pomiędzy kierunkami włókien obydwu rodzin. Fakt ten łatwo można udowodnić. Otóż  $\sphericalangle CSB = \sphericalangle BSA = \frac{1}{2} \sphericalangle CSA$ , gdyż kąty te oparte są na równych łukach  $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \frac{1}{2} \widehat{AC}$ . Ze względu na współosiowość tensorów  $\epsilon$  i  $\sigma^m$  wynikającą z izotropii materiału podstawowego znane są kierunki główne tensora  $\sigma^m$ .

W układzie osi głównych warunki (6.18) można wyrazić następująco:

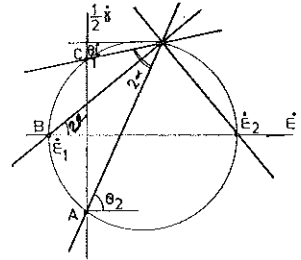
$$(6.19) \quad \dot{\epsilon}_{s1} = \dot{\epsilon}_{s2} = \dot{\epsilon}_{11} \cos^2 \alpha + \dot{\epsilon}_{22} \sin^2 \alpha = 0, \quad \dot{\epsilon}_{12} = 0,$$

stąd

$$(6.20) \quad \frac{\dot{\epsilon}_{11}}{\dot{\epsilon}_{22}} = -\operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Ze stowarzyszonego prawa płynięcia otrzymujemy

$$(6.21) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11} &= \lambda (2\sigma_{11}^m - \sigma_{22}^m), \\ \dot{\epsilon}_{22} &= \lambda (2\sigma_{22}^m - \sigma_{11}^m). \end{aligned}$$



Rys. 17. Koła Mohra dla prędkości odkształcenia przy dwóch włóknach sztywnych

Po podstawieniu tych wielkości do poprzedniego wzoru otrzymujemy

$$(6.22) \quad \frac{2\sigma_{11}^m - \sigma_{22}^m}{2\sigma_{22}^m - \sigma_{11}^m} = -\operatorname{tg}^2 \alpha,$$

czyli

$$(6.23) \quad \frac{\sigma_{11}^m}{\sigma_{22}^m} = \frac{1 - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{3 \cos^2 \alpha - 2}{3 \cos^2 \alpha - 1}.$$

Ze wzoru (6.23) oraz z warunku plastyczności (6.4) napisanego w składowych głównych tensora  $\sigma^m$ ,

$$(6.24) \quad \sigma_{11}^m - \sigma_{11}^m \sigma_{22}^m + \sigma_{22}^m = \sigma_0^2,$$

wynika

$$(6.25) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^m &= \pm \sigma_0 \frac{3 \cos^2 \alpha - 2}{\sqrt{3} (3 \cos^4 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 1)^{1/2}}, \\ \sigma_{22}^m &= \pm \sigma_0 \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{\sqrt{3} (3 \cos^4 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 1)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Stąd wniosek, że stan naprężenia w osnowie daje się wyznaczyć, jeśli znane są dwa kierunki zerowych wydłużeń w materiale. Innymi słowy, dwa kierunki charakterystyczne wyznaczają stan naprężenia w materiale podstawowym.

Wzory (6.25) w dowolnym układzie współrzędnych mają postać

$$(6.26) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx}^m &= \pm \frac{\sigma_0 \sqrt{3}}{6} \frac{3 \cos 2\alpha - \cos 2\vartheta}{(3 \cos^4 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 1)^{1/2}}, \\ \sigma_{yy}^m &= \pm \frac{\sigma_0 \sqrt{3}}{6} \frac{3 \cos 2\alpha + \cos 2\vartheta}{(3 \cos^4 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 1)^{1/2}}, \\ \sigma_{xy}^m &= \mp \frac{\sigma_0 \sqrt{3}}{6} \frac{\sin 2\vartheta}{(3 \cos^4 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 1)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Jeśli orientację włókien określimy za pomocą kątów  $\theta_1$  i  $\theta_2$ , to wzory (6.26) przybierają postać

$$(6.27) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx}^m &= \pm \frac{\sigma_0 \sqrt{3}}{3} \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_1 + 2 \sin \theta_2 \sin \theta_1}{(3 \cos^4 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 1)^{1/2}}, \\ \sigma_{yy}^m &= \pm \frac{\sigma_0 \sqrt{3}}{3} \frac{2 \cos \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \sin \theta_1}{(3 \cos^4 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 1)^{1/2}}, \\ \sigma_{xy}^m &= \mp \frac{\sigma_0 \sqrt{3}}{6} \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{(3 \cos^4 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 1)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Poszukiwany warunek plastyczności uzyskamy podstawiając do równań (6.1) wyliczone składowe tensora  $\overset{m}{\sigma}$  i eliminując parametry  $\sigma_{s1}$  i  $\sigma_{s2}$ . Otrzymujemy wtedy

$$(6.28) \quad \begin{aligned} \overset{c}{\sigma}_{xx} \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \overset{c}{\sigma}_{yy} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \overset{c}{\sigma}_{xy} \sin(\theta_1 + \theta_2) = \\ = \pm \frac{\sigma_0 \sqrt{3}}{6} \frac{4 \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin \theta_1 \sin \theta_2 + 4 \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_1 + \sin^2(\theta_1 + \theta_2)}{(3 \cos^4 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 1)^{1/2}} \end{aligned}$$

lub pisząc inaczej

$$(6.29) \quad \begin{aligned} \overset{c}{\sigma}_{xx} \sin(\vartheta - \alpha) \sin(\vartheta + \alpha) + \overset{c}{\sigma}_{yy} \cos(\vartheta - \alpha) \cos(\vartheta + \alpha) - \\ - \overset{c}{\sigma}_{xy} \sin 2\vartheta = \pm \frac{\sigma_0 \sqrt{3}}{6} \frac{1 + 3 \cos^2 2\alpha}{(3 \cos^4 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 1)^{1/2}}. \end{aligned}$$

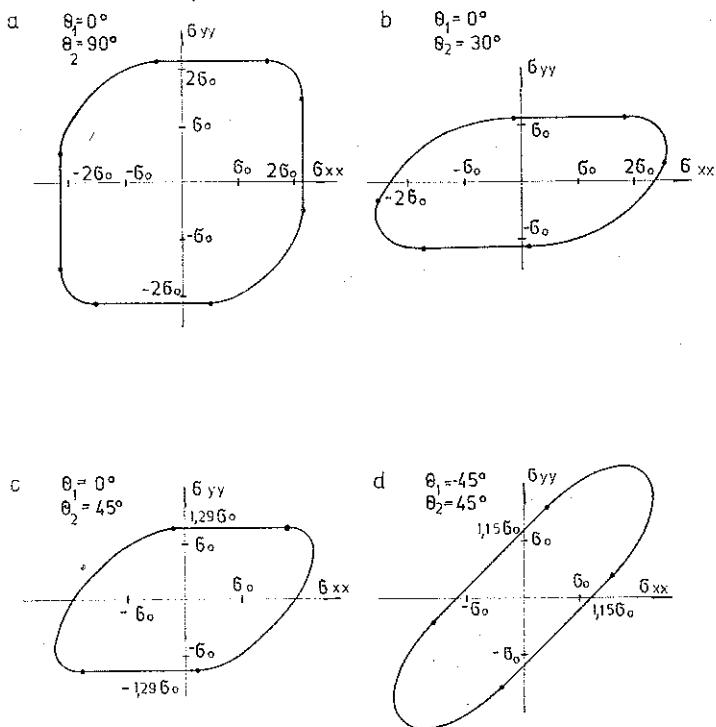
Równania te określają dwie równoległe płaszczyzny styczne zarówno do wszystkich elipsoid (6.9) jak i do wszystkich walców eliptycznych (6.14) i (6.16).

Tak więc dla kompozytu zbrojonego dwiema rodzinami włókien (rys. 18) warunki uplastycznienia odpowiadające przypadkom a) – d) wyznaczają odpowiednie obszary wypukłe.

*Plaski stan odkształcenia.* W tym przypadku warunek Hubera-Misesa dla materiału izotropowego przybiera postać

$$(6.30) \quad (\overset{m}{\sigma}_{xx} - \overset{m}{\sigma}_{yy})^2 + 4\overset{m}{\sigma}_{xy}^2 = 4k^2,$$

gdzie  $k = \sigma_0 / \sqrt{3}$ .



Rys. 18. Warunki plastyczności Hubera-Misesa w PSN dla materiału zbrojonego dwiema rodzinami włókien

a)  $\theta_1=0^\circ$ ,  $\theta_2=90^\circ$ ; b)  $\theta_1=0^\circ$ ,  $\theta_2=30^\circ$ ; c)  $\theta_1=0^\circ$ ,  $\theta_2=45^\circ$ ; d)  $\theta_1=-45^\circ$ ,  $\theta_2=45^\circ$ ,  $\sigma_{f1}=\sigma_{f2}=\sigma_0$

Postępując podobnie jak w przypadku PSN otrzymujemy kolejno warunki plastyczności opisujące różne mechanizmy zniszczenia kompozytu. Rozważmy je kolejno.

a) *Włókna obydwu rodzin są uplastycznione.* W tym przypadku warunek plastyczności ma postać

$$(6.31) \quad (\sigma_{xx}^c - \sigma_{yy}^c - \sigma_{f1} \cos 2\theta_1 - \sigma_{f2} \cos 2\theta_2)^2 + (2\sigma_{xy}^c - \sigma_{f1} \sin 2\theta_1 - \sigma_{f2} \sin 2\theta_2)^2 = 4k^2.$$

b) *Włókna obydwu rodzin są sztywne.* Analiza odkształceń dla tego mechanizmu prowadzi do wzoru

$$(6.32) \quad \frac{\dot{\epsilon}_{11}}{\dot{\epsilon}_{22}} = -\operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Ze stowarzyszonego prawa płynięcia otrzymujemy

$$(6.33) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11} &= 2\lambda^m (\sigma_{11}^m - \sigma_{22}^m), \\ \dot{\epsilon}_{22} &= 2\lambda^m (\sigma_{22}^m - \sigma_{11}^m), \end{aligned}$$

czyli po wstawieniu do poprzedniego wzoru mamy

$$(6.34) \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + n \frac{\pi}{2}.$$

Wypływa stąd ważny wniosek, że w PSO mechanizm b) zachodzi tylko wtedy, gdy włókna są ortogonalne.

Jesteśmy w stanie określić graniczny stan naprężenia w materiale podstawowym z dokładnością do ciśnienia średniego  $\sigma$ . Wzory (6.1), po uwzględnieniu ograniczenia (6.34), można napisać następująco:

$$(6.35) \quad \begin{aligned} \overset{c}{\sigma}_{xx} &= \sigma + k \sin 2\theta_1 + \sigma_{s1} \cos^2 \theta_1 + \sigma_{s2} \sin^2 \theta_1, \\ \overset{c}{\sigma}_{yy} &= \sigma - k \sin 2\theta_1 + \sigma_{s1} \sin^2 \theta_1 + \sigma_{s2} \cos^2 \theta_1, \\ \overset{c}{\sigma}_{xy} &= k \cos 2\theta_1 + \sigma_{s1} \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sigma_{s2} \sin \theta_1 \cos \theta_1. \end{aligned}$$

Po wyeliminowaniu parametrów  $\sigma$  i  $\sigma_{s1} - \sigma_{s2}$  otrzymujemy warunek graniczny

$$(6.26) \quad [(\overset{c}{\sigma}_{xx} - \overset{c}{\sigma}_{yy}) \sin 2\theta_1 - 2\overset{c}{\sigma}_{xy} \cos 2\theta_1]^2 = \frac{4}{3} \sigma_0^2.$$

c) *Jedna rodzina włókien jest uplastyczniona, druga—sztywna.* Do wzorów (6.35) podstawiamy albo  $|\sigma_{s1}| = \sigma_{f1}$  albo  $|\sigma_{s2}| = \sigma_{f2}$  i, eliminując odpowiedni parametr, otrzymujemy warunki plastyczności:

$$(6.37) \quad [(\overset{c}{\sigma}_{xx} - \overset{c}{\sigma}_{yy}) \sin 2\theta_1 - 2\overset{c}{\sigma}_{xy} \cos 2\theta_1 + \sigma_{f2} \sin 2(\theta_1 - \theta_2)]^2 = \frac{4}{3} \sigma_0^2,$$

gdy  $|\sigma_{s2}| = \sigma_{f2}$  oraz

$$(6.38) \quad [(\overset{c}{\sigma}_{xx} - \overset{c}{\sigma}_{yy}) \sin 2\theta_2 - 2\overset{c}{\sigma}_{xy} \cos 2\theta_2 + \sigma_{f1} \sin 2(\theta_2 - \theta_1)]^2 = \frac{4}{3} \sigma_0^2,$$

gdy  $|\sigma_{s1}| = \sigma_{f1}$ .

## 6.2. Material podstawowy podlegający warunkowi Treski

Warunek plastyczności Treski dla materiału podstawowego określony jest przez następujące funkcje:

$$(6.39) \quad \begin{aligned} f_1 &= \overset{m}{\sigma}_{xy}^2 - (\sigma_0 - \overset{m}{\sigma}_{xx})(\sigma_0 - \overset{m}{\sigma}_{yy}) = 0, \\ f_2 &= (\overset{m}{\sigma}_{xx} - \overset{m}{\sigma}_{yy})^2 + 4\overset{m}{\sigma}_{xy}^2 - \sigma_0^2 = 0, \\ f_3 &= \overset{m}{\sigma}_{xy}^2 - (\sigma_0 + \overset{m}{\sigma}_{xx})(\sigma_0 + \overset{m}{\sigma}_{yy}) = 0. \end{aligned}$$

W przestrzeni naprężeń  $\overset{m}{\sigma}_{ij}$  funkcje  $f_1$  i  $f_3$  określają dwa stożki połączone walcem eliptycznym opisanym funkcją  $f_2$ . Przecięcia tych powierzchni drugiego stopnia są elipsami o następujących równaniach:

$$(6.40) \quad \begin{aligned} \overset{m}{\sigma}_{xx} + \overset{m}{\sigma}_{yy} &= \sigma_0, \\ \overset{m}{\sigma}_{xy} + \overset{m}{\sigma}_{yy} - \overset{m}{\sigma}_{xy} \sigma_0 &= 0 \end{aligned}$$



dla przecięcia  $f_1$  i  $f_2$  oraz

$$(6.41) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx}^m + \sigma_{yy}^m &= -\sigma_0, \\ \sigma_{xy}^m + \sigma_{yy}^m + \sigma_{yy}^m \sigma_0 &= 0 \end{aligned}$$

dla drugiego przypadku.

Wykorzystując wzory (2.1) możemy funkcje (6.39) przedstawić następująco:

$$(6.42) \quad \begin{aligned} f_1 &= (\sigma_{xy}^c - \sigma_{s1} \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sigma_{s2} \sin \theta_2 \cos \theta_2)^2 - \\ &\quad - (\sigma_0 + \sigma_{s1} \cos^2 \theta_1 + \sigma_{s2} \cos^2 \theta_2 - \sigma_{xx}^c) (\sigma_0 + \sigma_{s1} \sin^2 \theta_1 + \sigma_{s2} \sin^2 \theta_2 - \sigma_{yy}^c) = 0, \\ f_2 &= (\sigma_{xx}^c - \sigma_{yy}^c - \sigma_{s1} \cos 2\theta_1 - \sigma_{s2} \cos 2\theta_2)^2 + 4 \left( \sigma_{xy}^c - \frac{1}{2} \sigma_{s1} \sin 2\theta_1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sigma_{s2} \sin 2\theta_2 \right)^2 = \sigma_0^2, \\ f_3 &= (\sigma_{xy}^c - \sigma_{s1} \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sigma_{s2} \sin \theta_2 \cos \theta_2)^2 - \\ &\quad - (\sigma_0 + \sigma_{xx}^c - \sigma_{s1} \cos^2 \theta_1 - \sigma_{s2} \cos^2 \theta_2) (\sigma_0 + \sigma_{yy}^c - \sigma_{s1} \sin^2 \theta_1 - \sigma_{s2} \sin^2 \theta_2) = 0. \end{aligned}$$

Podobnie jak dla warunku Hubera-Misesa, rozważmy różne możliwe stany włókien podczas osiągnięcia przez kompozyt stanu granicznego.

a) *Włókna obydwu rodzin są uplastycznione.* Przypadek taki zachodzi, jeśli

$$(6.43) \quad |\sigma_{s1}| = \sigma_{f1}, \quad |\sigma_{s2}| = \sigma_{f2}.$$

Prędkość odkształceń w kierunku włókien nie może znikać

$$(6.44) \quad \dot{\epsilon}_{s1} \neq 0, \quad \dot{\epsilon}_{s2} \neq 0,$$

przy czym

$$(6.45) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{s1} > 0, & \quad \text{gdy} \quad \sigma_{s1} = \sigma_{f1}, & \dot{\epsilon}_{s2} > 0, & \quad \text{gdy} \quad \sigma_{s2} = \sigma_{f2}; \\ \dot{\epsilon}_{s1} < 0, & \quad \text{gdy} \quad \sigma_{s1} = -\sigma_{f1}, & \dot{\epsilon}_{s2} < 0, & \quad \text{gdy} \quad \sigma_{s2} = -\sigma_{f2}. \end{aligned}$$

Podstawiając (6.43) do (6.42) otrzymujemy szukane warunki graniczne dla przypadku a). Uzyskane w ten sposób równania, po uwzględnieniu wszystkich kombinacji, (6.45) przedstawiają cztery powierzchnie opisane równaniami (6.39), przesunięte względem środka układu współrzędnych.

Rozważmy z kolei następny przypadek:

b) *Włókna pierwszej rodziny są uplastycznione, drugiej — sztywne.* Ten przypadek zachodzi, jeśli

$$(6.46) \quad |\sigma_{s1}| = \sigma_{f1}, \quad |\sigma_{s2}| < \sigma_{f2}.$$

Prędkość odkształceń jest wtedy określona następująco:

$$(6.47) \quad \dot{\epsilon}_{s1} \neq 0, \quad \dot{\epsilon}_{s2} = 0,$$

a ponadto

$$(6.48) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{s1} > 0, & \quad \text{gdy} \quad \sigma_{s1} = \sigma_{f1}; \\ \dot{\epsilon}_{s1} < 0, & \quad \text{gdy} \quad \sigma_{s1} = -\sigma_{f1}. \end{aligned}$$

Sposób postępowania prowadzący do znalezienia odpowiednich warunków granicznych jest analogiczny do przedstawionego w rozdziale omawiającym przypadek sztywnych włókien w kompozycie zbrojonym jedną ich rodziną. Powierzchnie walcowe opisujące ten przypadek różnią się tylko od opisanych we wspomnianym rozdziale równoległym przesunięciem. Parametryczna postać równań określających te powierzchnie jest następująca:

$$(6.49) \quad \frac{\sigma_{xx}^c - \sigma_{xx}^m - \sigma_{f1} \cos^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_2} = \frac{\sigma_{yy}^c - \sigma_{yy}^m - \sigma_{f1} \sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2} = \frac{\sigma_{xy}^c - \sigma_{xy}^m - \sigma_{f1} \sin \theta_1 \cos \theta_1}{\sin \theta_2 \cos \theta_2} = \sigma_{s2},$$

$$\sigma_{xx}^m + \sigma_{yy}^m = \pm \sigma_0, \quad \sigma_{xy}^m + \sigma_{yy}^m \mp \sigma_{xy}^m \sigma_0 = 0.$$

Po wyeliminowaniu parametrów  $\sigma_{xx}^m$ ,  $\sigma_{yy}^m$ ,  $\sigma_{xy}^m$  otrzymujemy szukane warunki graniczne dla omawianego przypadku. Mają one następującą formę:

$$(6.50) \quad \sigma_{xx}^c \sin^2 \theta_2 + \sigma_{yy}^c \cos^2 \theta_2 + \sigma_{xy}^c - (\sigma_{xx}^c + \sigma_{yy}^c) \sigma_{xy} \sin 2\theta_2 \mp \mp \sigma_{xx}^c \sigma_0 \sin^2 \theta_2 \mp \sigma_{yy}^c \sigma_0 \cos^2 \theta_2 \pm \sigma_{xy}^c \sigma_0 \sin 2\theta_2 + + 2\sigma_{xx}^c \sigma_{f1} \sin(\theta_1 - \theta_2) \sin \theta_2 \cos \theta_1 - 2\sigma_{yy}^c \sigma_{f1} \sin(\theta_1 - \theta_2) \sin \theta_1 \cos \theta_2 - - 2\sigma_{xy}^c \sigma_{f1} \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \pm \sigma_0 \sigma_{f1} \sin^2(\theta_1 - \theta_2) + + \sigma_{f1}^2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2) = 0.$$

Rozpatrzmy następnie możliwość spełnienia warunków (6.46) na powierzchni  $f_2$ . Jest to przypadek analogiczny do omówionego w poprzednim rozdziale mechanizmu płynięcia kompozytu w PSO. Wykorzystujemy więc wzory (6.35) i po wyeliminowaniu odpowiednich parametrów otrzymujemy następujący warunek graniczny:

$$(6.51) \quad [(\sigma_{xx}^c - \sigma_{yy}^c) \sin 2\theta_2 - 2\sigma_{xy}^c \cos 2\theta_2 + \sigma_{f1} \sin 2(\theta_1 - \theta_2)]^2 = \sigma_0^2.$$

Rozważmy teraz przypadek odwrotny:

c) *Włókna pierwszej rodziny są sztywne, drugiej — uplastycznione.* Przypadek ten zachodzi, jeśli spełnione są warunki

$$(6.52) \quad |\sigma_{s1}| < \sigma_{f2}, \quad |\sigma_{s2}| = \sigma_{f2}.$$

Podobnie jak poprzednio, prędkość odkształcenia jest wtedy określona następująco:

$$(6.53) \quad \dot{\epsilon}_{s1} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{s2} \neq 0,$$

przy czym

$$\dot{\epsilon}_{s2} > 0, \quad \text{gdy} \quad \sigma_{s2} = \sigma_{f2};$$

$$\dot{\epsilon}_{s2} < 0, \quad \text{gdy} \quad \sigma_{s2} = -\sigma_{f2}.$$

Powtarzając tok postępowania otrzymamy następujące warunki graniczne:

$$(6.54) \quad \begin{aligned} & \sigma_{xx}^c \sin^2 \theta_1 + \sigma_{yy}^c \cos^2 \theta_1 + \sigma_{xy}^c - (\sigma_{xx}^c + \sigma_{yy}^c) \sigma_{xy}^c \sin 2\theta_1 \mp \sigma_{xx}^c \sigma_0 \sin^2 \theta_1 \mp \\ & \mp \sigma_{yy}^c \sigma_0 \cos^2 \theta_1 \pm \sigma_{xy}^c \sigma_0 \sin 2\theta_1 + 2\sigma_{xx}^c \sigma_{f2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \\ & - 2\sigma_{yy}^c \sigma_{f2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \sin \theta_2 \cos \theta_1 - 2\sigma_{xy}^c \sigma_{f2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_2 - \theta_1) \pm \\ & \pm \sigma_0 \sigma_{f2} \sin^2(\theta_2 - \theta_1) + \sigma_{f2}^2 \sin^2(\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{aligned}$$

oraz

$$(6.55) \quad [(\sigma_{xx}^c - \sigma_{yy}^c) \sin 2\theta_1 - 2\sigma_{xy}^c \cos 2\theta_1 + \sigma_{f2} \sin 2(\theta_2 - \theta_1)]^2 = \sigma_0^2.$$

Rozwiązania (6.50) i (6.54) określają walce eliptyczne, równania zaś (6.51) i (6.55) płaszczyzny odpowiednio równoległe względem siebie i styczne do tych walców.

Ostatni możliwy przypadek

d) *Włókna obydwu rodzin są sztywne.* Z charakterystyki mechanicznej włókien wynika, że w takim przypadku naprężenia we włóknach obydwu rodzin nie osiągają granicy plastyczności:

$$(6.56) \quad |\sigma_{s1}| < \sigma_{f1}, \quad |\sigma_{s2}| < \sigma_{f2},$$

prędkości zaś odkształcenia włókien przyjmują wartości zerowe:

$$(6.57) \quad \dot{\epsilon}_{s1} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{s2} = 0.$$

Powtarzając rozumowanie przytoczone w p. 6.1, dotyczące takiego przypadku, otrzymujemy analogicznie

$$(6.58) \quad \frac{\dot{\epsilon}_{xx}}{\dot{\epsilon}_{yy}} = -\operatorname{tg}^2 \alpha, \quad \dot{\epsilon}_{xy} = 0,$$

przy czym  $\alpha$  oznacza kąt między kierunkiem włókien, a dwusieczną kąta pomiędzy nimi. Jeśli  $\alpha$  jest dowolne, to warunki (6.58) spełnione są wyłącznie w punktach a) lub b) na powierzchni plastyczności dla osnowy (rys. 5).

Inne możliwości ze względu na izotropię osnowy nie wchodzą w rachubę. Punkty a) i b) przedstawiają jednoosiowe stany naprężenia:

$$(6.59) \quad \begin{aligned} \text{punkt a)} & \Rightarrow \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = \pm \sigma_0, \quad \text{gdy} \quad \alpha \leq \frac{\pi}{4}; \\ \text{punkt b)} & \Rightarrow \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{11} = \pm \sigma_0, \quad \text{gdy} \quad \alpha \geq \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Szukany warunek graniczny w formie ogólnej ma postać

$$(6.60) \quad \dot{\epsilon}_{11} (\sigma_{11}^c - \sigma_{11}^m) + \dot{\epsilon}_{22} (\sigma_{22}^c - \sigma_{22}^m) = 0.$$

Po podstawieniu (6.58) i (6.59) otrzymujemy następujące warunki graniczne w układzie naprężeń głównych

$$(6.61) \quad \begin{aligned} \sigma_{22}^c - \sigma_{11}^c \operatorname{tg}^2 \alpha &= \pm \sigma_0, & 0 \leq \alpha \leq \pi/4, \\ \sigma_{22}^c - \sigma_{11}^c \operatorname{tg}^2 \alpha &= \pm \sigma_0 \operatorname{tg}^2 \alpha, & \pi/4 \leq \alpha \leq \pi/2. \end{aligned}$$

W dowolnym układzie współrzędnych obróconym względem osi głównych o kąt  $\vartheta$  mamy

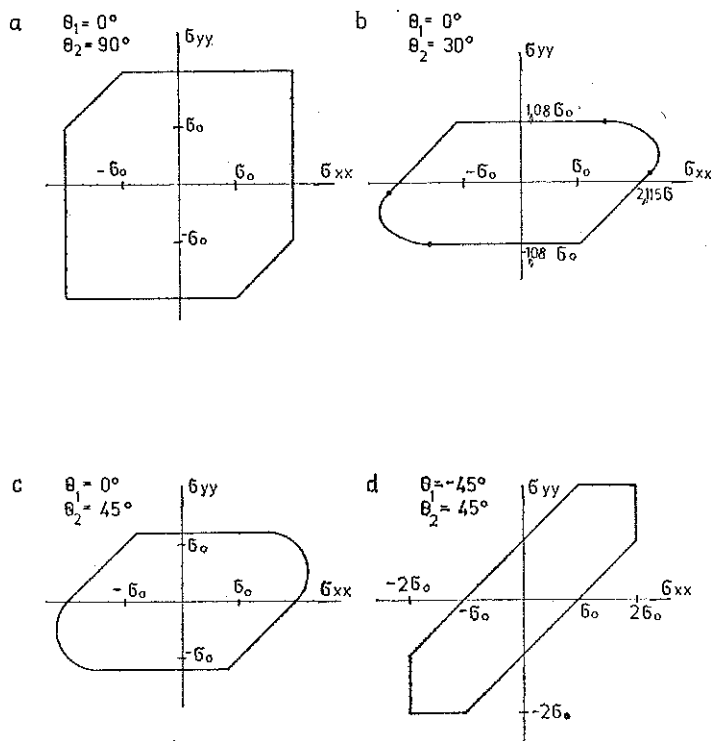
$$(6.62) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx}^c \sin(\vartheta + \alpha) \sin(\vartheta - \alpha) + \sigma_{yy}^c \cos(\vartheta + \alpha) \cos(\vartheta - \alpha) + \\ + \sigma_{xy}^c \sin 2\vartheta = \pm \sigma_0 \cos^2 \alpha, \quad \text{jeżeli} \quad 0 \leq \alpha \leq \pi/4; \\ = \pm \sigma_0 \sin^2 \alpha, \quad \text{jeżeli} \quad \pi/4 \leq \alpha \leq \pi/2 \end{aligned}$$

lub inaczej

$$(6.63) \quad \sigma_{xx}^c \sin \theta_2 \sin \theta_1 + \sigma_{yy}^c \cos \theta_2 \cos \theta_1 + \sigma_{xy}^c \sin(\theta_1 + \theta_2) = \begin{cases} \pm \sigma_0 \cos^2 \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right), \\ \pm \sigma_0 \sin^2 \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right). \end{cases}$$

Omówiony przypadek nie wyczerpuje wszystkich możliwości. Stan odkształcenia określony przez (6.58) może być zrealizowany również na powierzchni walcowej  $f_2$ . Przypadek taki był już omówiony w p. 6.1 w trakcie analizy PSO dla materiału Hubera-Misesa. Pominiemy więc wyprowadzenie równań, ograniczając się do podania ostatecznej postaci warunku granicznego:

$$(6.64) \quad [(\sigma_{xx}^c - \sigma_{yy}^c) \sin 2\theta_1 - 2\sigma_{xy}^c \cos 2\theta_1]^2 = \sigma_0^2.$$



Rys. 19. Warunki plastyczności Treski dla materiału zbrojonego dwiema rodzinami włókien  
a)  $\theta_1=0^\circ$ ,  $\theta_2=90^\circ$ ; b)  $\theta_1=0^\circ$ ,  $\theta_2=30^\circ$ ; c)  $\theta_1=0^\circ$ ,  $\theta_2=45^\circ$ ; d)  $\theta_1=-45^\circ$ ,  $\theta_2=45^\circ$

Wypukły obszar określony przez warunki graniczne wyprowadzone w tym paragrafie daje poszukiwaną powierzchnię plastyczności dla kompozytu. Składa się ona z dwóch rodzajów powierzchni drugiego stopnia, mianowicie ze stożków i walców eliptycznych oraz z płaszczyzn (rys. 19).

### 6.3. Materiał podstawowy podlegający warunkowi Johansena

Następujące dwie funkcje uplastycznienia określają warunek plastyczności Johansena dla izotropowego materiału podstawowego:

$$(6.65) \quad \begin{aligned} f_1 &= \sigma_{xy}^m - (\sigma_0 - \sigma_{xx}^m)(\sigma_0 - \sigma_{yy}^m) = 0, \\ f_2 &= \sigma_{xy}^m - (\xi\sigma_0 + \sigma_{xx}^m)(\xi\sigma_0 + \sigma_{yy}^m) = 0. \end{aligned}$$

Równania te przedstawiają dwa przecinające się stożki. Przecięcie tych stożków jest elipsą o równaniu

$$(6.66) \quad \begin{aligned} \sigma_{xy}^m + \sigma_{yy}^m - \sigma_{yy}^m \sigma_0 (1 - \xi) - \xi \sigma_0^2 &= 0, \\ \sigma_{yy}^m + \sigma_{xx}^m &= \sigma_0 (1 - \xi). \end{aligned}$$

Podobnie jak w dwóch poprzednich paragrafach rozważamy różne stany włókien w chwili osiągnięcia przez kompozyt stanu granicznego.

a) *Włókna obydwu rodzin są uplastycznione.* Warunki graniczne opisujące ten mechanizm mają postać

$$(6.67) \quad \begin{aligned} f_1 &= (\sigma_{xy}^c - \sigma_{f1} \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sigma_{f2} \sin \theta_2 \cos \theta_2)^2 - (\sigma_0 + \sigma_{f1} \cos^2 \theta_1 + \\ &\quad + \sigma_{f2} \cos^2 \theta_2 - \sigma_{xx}^c)(\sigma_0 + \sigma_{f1} \sin^2 \theta_1 + \sigma_{f2} \sin^2 \theta_2 - \sigma_{yy}^c) = 0, \\ f_2 &= (\sigma_{xy}^c - \sigma_{f1} \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sigma_{f2} \sin \theta_2 \cos \theta_2)^2 - (\xi \sigma_0 + \sigma_{xx}^c - \sigma_{f1} \cos^2 \theta_1 - \\ &\quad - \sigma_{f2} \cos^2 \theta_2)(\xi \sigma_0 + \sigma_{yy}^c - \sigma_{f1} \sin^2 \theta_1 - \sigma_{f2} \sin^2 \theta_2) = 0. \end{aligned}$$

Równanie (6.67), po uwzględnieniu wszystkich kombinacji (6.45), określa cztery bryły odpowiadające (6.65), przesunięte względem środka układu współrzędnych.

Rozważmy następny przypadek.

b) *Włókna pierwszej rodziny są uplastycznione, a drugiej—sztywne.* Metoda znajdowania warunku granicznego dla tego przypadku jest analogiczna do metody stosowanej przy omawianiu warunku Treski. Parametryczna postać tych warunków jest następująca:

$$(6.68) \quad \begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}^c - \sigma_{xx}^m - \sigma_{f1} \cos^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_2} &= \frac{\sigma_{yy}^c - \sigma_{yy}^m - \sigma_{f1} \sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_2} = \\ &= \frac{\sigma_{xy}^c - \sigma_{xy}^m - \sigma_{f1} \sin \theta_1 \cos \theta_1}{\sin \theta_2 \cos \theta_2} = \sigma_{s2}, \\ \sigma_{xy}^m + \sigma_{yy}^m - \sigma_{yy}^m \sigma_0 (1 - \xi) - \xi \sigma_0^2 &= 0, \quad \sigma_{yy}^m + \sigma_{xx}^m = \sigma_0 (1 - \xi). \end{aligned}$$

Po wyeliminowaniu parametrów  $\overset{m}{\sigma}_{xx}$ ,  $\overset{m}{\sigma}_{yy}$ ,  $\overset{m}{\sigma}_{xy}$  otrzymujemy szukaną zależność graniczną:

$$(6.69) \quad \overset{c}{\sigma}_{xx}^2 \sin^2 \theta_2 + \overset{c}{\sigma}_{yy}^2 \cos^2 \theta_2 + \overset{c}{\sigma}_{xy}^2 - (\overset{c}{\sigma}_{xx} + \overset{c}{\sigma}_{yy}) \overset{c}{\sigma}_{xy} \sin 2\theta_2 - \overset{c}{\sigma}_{xx} \sigma_0 (1 - \xi) \sin^2 \theta_2 - \\ - \overset{c}{\sigma}_{yy} \sigma_0 (1 - \xi) \cos^2 \theta_2 + \overset{c}{\sigma}_{xy} \sigma_0 (1 - \xi) \sin 2\theta_2 + \\ + 2\overset{c}{\sigma}_{xx} \sigma_{f1} \sin(\theta_1 - \theta_2) \sin \theta_2 \cos \theta_1 - 2\overset{c}{\sigma}_{yy} \sigma_{f1} \sin(\theta_1 - \theta_2) \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \\ - 2\overset{c}{\sigma}_{xy} \sigma_{f1} \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) + \sigma_0 (1 - \xi) \sigma_{f1} \sin^2(\theta_1 - \theta_2) + \\ + \sigma_0^2 [(1 - \xi)^2 \sin^4 \theta_2 - \xi] + \sigma_{f1}^2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2) = 0.$$

c) *Analogiczne równanie dla przypadku odwrotnego.*

$$(6.70) \quad \overset{c}{\sigma}_{xx}^2 \sin^2 \theta_1 + \overset{c}{\sigma}_{yy}^2 \cos^2 \theta_1 + \overset{c}{\sigma}_{xy}^2 - (\overset{c}{\sigma}_{xx} + \overset{c}{\sigma}_{yy}) \overset{c}{\sigma}_{xy} \sin 2\theta_1 - \overset{c}{\sigma}_{xx} \sigma_0 (1 - \xi) \sin^2 \theta_1 - \\ - \overset{c}{\sigma}_{yy} \sigma_0 (1 - \xi) \cos^2 \theta_1 + \overset{c}{\sigma}_{xy} \sigma_0 (1 - \xi) \sin 2\theta_1 + \\ + 2\overset{c}{\sigma}_{xx} \sigma_{f2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \sin \theta_1 \cos \theta_2 - 2\overset{c}{\sigma}_{yy} \sigma_{f2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \sin \theta_2 \cos \theta_1 - \\ - 2\overset{c}{\sigma}_{xy} \sigma_{f2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_2 - \theta_1) + \sigma_0 (1 - \xi) \sigma_{f2} \sin^2(\theta_2 - \theta_1) + \\ + \sigma_0^2 [(1 - \xi)^2 \sin^4 \theta_1 - \xi] + \sigma_{f2}^2 \sin^2(\theta_2 - \theta_1) = 0.$$

Równania (6.69) i (6.70) określają w układzie  $\overset{c}{\sigma}_{xx}$ ,  $\overset{c}{\sigma}_{yy}$ ,  $\overset{c}{\sigma}_{xy}$  walce eliptyczne, dla których linią tworzącą jest elipsa (6.66).

Ostatnią możliwością jest przypadek następujący:

d) *Włókna obydwu rodzin są sztywne.* Warunki opisujące ten przypadek mogą być spełnione w punktach a) lub b) na powierzchni plastyczności dla osnowy (rys. 8).

Punkty te mają współrzędne:

$$(6.71) \quad \begin{array}{l} \text{punkt a) } \overset{m}{\sigma}_{11} = -\xi \sigma_0, \quad \overset{m}{\sigma}_{22} = \sigma_0; \\ \text{punkt b) } \overset{c}{\sigma}_{11} = \sigma_0, \quad \overset{m}{\sigma}_{22} = -\xi \sigma_0. \end{array}$$

Szukany warunek graniczny można przedstawić w następującej formie:

$$(6.72) \quad \dot{\epsilon}_{11} (\overset{c}{\sigma}_{11} - \overset{m}{\sigma}_{11}) + \dot{\epsilon}_{22} (\overset{c}{\sigma}_{22} - \overset{m}{\sigma}_{22}) = 0,$$

co oznacza spełnienie warunku (6.57) oraz uwzględnienie faktu, że szukana powierzchnia graniczna musi przechodzić przez punkty a) i b). Po uwzględnieniu (6.58) i (6.71) otrzymujemy warunki graniczne:

$$(6.73) \quad \begin{array}{l} \overset{c}{\sigma}_{11} \operatorname{tg}^2 \alpha - \overset{c}{\sigma}_{22} = \sigma_0 (\operatorname{tg}^2 \alpha + \xi) \quad \text{dla punktu b),} \\ \overset{c}{\sigma}_{22} - \overset{c}{\sigma}_{11} \operatorname{tg}^2 \alpha = \sigma_0 (\xi \operatorname{tg}^2 \alpha + 1) \quad \text{dla punktu a).} \end{array}$$

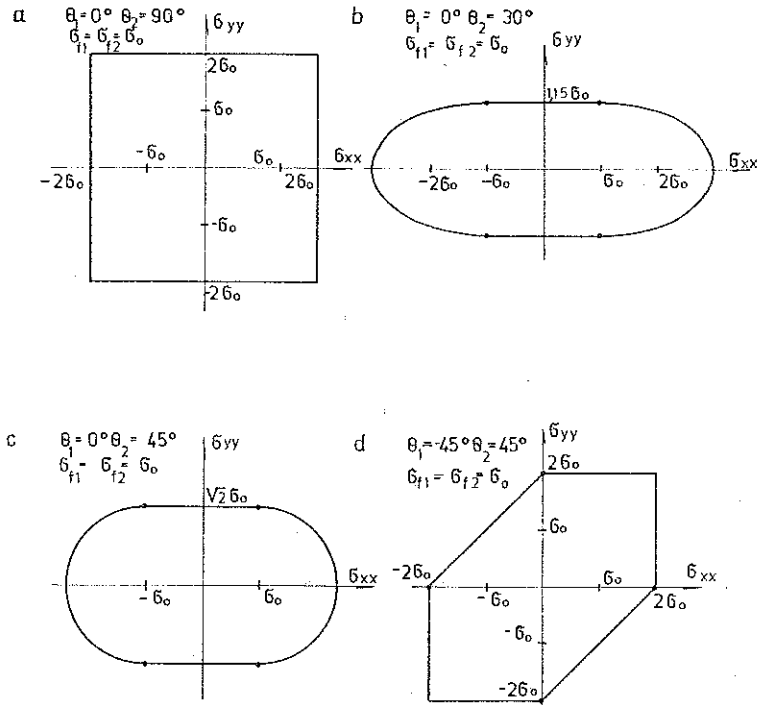
W dowolnym układzie współrzędnych równania (6.73) przyjmują postać:

$$\overset{c}{\sigma}_{xx} \sin(\alpha + \vartheta) \sin(\alpha - \vartheta) - \overset{c}{\sigma}_{yy} \cos(\alpha + \vartheta) \cos(\alpha - \vartheta) - \overset{c}{\sigma}_{xy} \sin 2\vartheta = \sigma_0 (\sin^2 \alpha + \xi \cos^2 \alpha)$$

oraz

$$(6.74) \quad \sigma_{xx}^c \sin(\vartheta + \alpha) \sin(\vartheta - \alpha) + \sigma_{yy}^c \cos(\vartheta + \alpha) \cos(\vartheta - \alpha) + \sigma_{xy}^c \sin 2\vartheta = \\ = \sigma_0 (\xi \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha).$$

Poszukiwaną powierzchnią graniczną jest powierzchnia obszaru wypukłego, określonego przez warunki graniczne otrzymane dla wszystkich rozważanych przypadków (rys. 20).



Rys. 20. Warunki plastyczności Johansena dla materiału zbrojonego dwiema rodzinami włókien przy  $\xi = -1$

## 7. WYKORZYSTANIE FUNKCJI DYSYPACJI DO WYZNACZANIA WARUNKÓW PLASTYCZNOŚCI DLA KOMPOZYTU ZBROJONEGO DWIEMA RODZINAMI WŁÓKNIEN

Wykorzystanie funkcji dysypacji do wyznaczenia warunków granicznych dla materiałów zbrojonych dwiema rodzinami włókien również nie nastęrcza trudności, jest natomiast, naszym zdaniem, podejściem prostszym merytorycznie od przedstawionych we wcześniejszych rozdziałach pracy.

Niech moc dysypowana w kompozycie będzie wyrażona wzorem

$$(7.1) \quad D = \int_{V^m} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int_{V^f} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV.$$

Pierwsza całka wyrażająca dysypację w materiale podstawowym nie ulega naturalnie zmianie, natomiast moc dysypowaną we włóknach wyrażamy w omawianym przypadku, w następującej formie:

$$(7.2) \quad D_f = \sigma_{s1} (\dot{\epsilon}_{xx} \cos^2 \theta_1 + \dot{\epsilon}_{yy} \sin^2 \theta_1 + \dot{\epsilon}_{xy} \sin 2\theta_1) + \\ + \sigma_{s2} (\dot{\epsilon}_{xx} \cos^2 \theta_2 + \dot{\epsilon}_{yy} \sin^2 \theta_2 + \dot{\epsilon}_{xy} \sin 2\theta_2).$$

Znając postać funkcji dysypacji, możemy wyznaczyć składowe tensora naprężenia dla kompozytu, gdyż

$$(7.3) \quad \sigma_{ij}^c = \frac{\partial D}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}.$$

Mamy wtedy

$$(7.4) \quad \sigma_{xx}^c = \frac{\partial D^m(\dot{\epsilon}_{ij})}{\partial \dot{\epsilon}_{xx}} + \sigma_{s1} \cos^2 \theta_1 + \sigma_{s2} \cos^2 \theta_2, \\ \sigma_{yy}^c = \frac{\partial D^m(\dot{\epsilon}_{ij})}{\partial \dot{\epsilon}_{yy}} + \sigma_{s1} \sin^2 \theta_1 + \sigma_{s2} \sin^2 \theta_2, \\ \sigma_{xy}^c = \frac{\partial D^m(\dot{\epsilon}_{ij})}{\partial \dot{\epsilon}_{xy}} + \sigma_{s1} \sin 2\theta_1 + \sigma_{s2} \sin 2\theta_2.$$

Zakładamy, że funkcja dysypacji  $D^m$  dla izotropowego materiału podstawowego jest znana. Wtedy pierwsze składniki po prawej stronie równań (7.4) przedstawiają składowe stanu naprężenia w materiale podstawowym wyrażone *explicite*, bądź też jako funkcje składowych stanu odkształcenia. Występujące w tych wzorach wielkości  $\sigma_{s1}$  i  $\sigma_{s2}$  w stanie granicznym mogą przybierać wartości

$$(7.5) \quad |\sigma_{s1}| \leq \sigma_{f1}, \quad |\sigma_{s2}| \leq \sigma_{f2}.$$

Rozróżnić można, tak jak w poprzedniej części pracy, cztery różne przypadki. Rozpatrzone zostaną kolejno.

a) *Włókna obydwu rodzin są uplastycznione.* W takim przypadku podstawiamy przekształcone funkcje (7.4) do funkcji uplastycznienia  $f(\sigma_{ij}^m) = 0$  pamiętając przy tym, że

$$(7.6) \quad \frac{\partial D^m(\dot{\epsilon}_{ij})}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} = \sigma_{ij}^m.$$

Otrzymuje się wtedy warunki graniczne dla kompozytu.

b), c) *Włókna jednej rodziny są sztywne a drugiej — uplastycznione.* Postępowanie nasze sprowadza się do wyeliminowania parametrów  $\sigma_{s1}$  bądź  $\sigma_{s2}$ . W tym celu odwracamy wzory (7.4) i określone w ten sposób wielkości wstawiamy do warunków określających zerowe wydłużenie odpowiednich włókien, tzn.  $\dot{\epsilon}_{s1}$  lub  $\dot{\epsilon}_{s2}$ . Możemy wtedy wyznaczyć nieznaną wielkość  $\sigma_{s1}$  albo  $\sigma_{s2}$ . Wykonane następnie przekształcenia algebraiczne pozwolą uzyskać szukane równania graniczne.



Ostatni przypadek, przy którym włókna obydwu rodzin pozostają sztywne wymaga jednoczesnego spełnienia warunków

$$(7.7) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{s_1} &= \dot{\epsilon}_{xx} \cos^2 \theta_1 + \dot{\epsilon}_{yy} \sin^2 \theta_1 + \dot{\epsilon}_{xy} \sin 2\theta_1 = 0, \\ \dot{\epsilon}_{s_2} &= \dot{\epsilon}_{xx} \cos^2 \theta_2 + \dot{\epsilon}_{yy} \sin^2 \theta_2 + \dot{\epsilon}_{xy} \sin 2\theta_2 = 0. \end{aligned}$$

Rozwiązując taki układ równań jednorodnych z trzema niewiadomymi otrzymujemy

$$(7.8) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{xx} &= 2\rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin(\theta_1 - \theta_2), \\ \dot{\epsilon}_{yy} &= 2\rho \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin(\theta_1 - \theta_2), \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= \rho \sin(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_2 + \theta_1). \end{aligned}$$

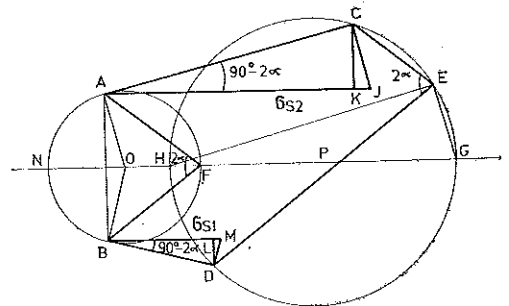
W przypadku dwóch włókien sztywnych stan odkształcenia jest więc określony z dokładnością do parametru  $\rho$ , przy czym  $\rho$  jest dowolną liczbą różną od zera. Podstawienie funkcji (7.8) do wzoru (7.6) pozwala na jednoznaczne określenie stanu naprężenia w osnowie, gdyż funkcja jest funkcją jednorodną rzędu zerowego względem prędkości odkształceń. W tym przypadku należy jeszcze tylko wyeliminować parametry  $\sigma_{s_1}$  i  $\sigma_{s_2}$  z równań (7.4). Po tej operacji otrzymujemy szukane równanie graniczne.

## 8. GRAFICZNA ILUSTRACJA STANU GRANICZNEGO MATERIAŁU ZBROJONEGO DWIEMA RODZINAMI WŁÓKNIEN

Sposób wyznaczania obwiedni granicznych dla materiału podstawowego podlegającego różnego typu warunkom granicznym przedstawiony został w pierwszej części pracy, poświęconej analizie kompozytów zbrojonych jedną rodziną włókien. W związku z tym z tej części pracy zagadnienie to potraktujemy jako znane i przejdziemy do następnego etapu rozważań. Pierwszym krokiem będzie wyznaczenie koła Mohra, obrazującego stan graniczny materiału podstawowego przy dwóch włóknach sztywnych.

Dla warunku Hubera-Misesa w PSN da się to uczynić w sposób jednoznaczny, gdyż znane są z góry kierunki charakterystyczne, pokrywające się z kierunkami sztywnych włókien. Istnieje bowiem tylko jedno takie koło Mohra, które umożliwia z dowolnie obranego bieguna  $P$  poprowadzenie dwóch prostych, przechodzących przez punkty styczności

z obwiednią, nachylonych względem siebie pod znanym kątem  $2\alpha$ . Istotnie, analizując rys. 21 widzimy, że kąt wpisany  $2\alpha$  oparty jest na tym samym łuku co kąt środkowy  $\sphericalangle AOB = 4\alpha$ . Ale oś  $\sigma_n$  jest dwusieczną tego kąta, więc prosta przechodząca przez środek koła  $O$  i punkt styczności  $A$  (czyli normalna do obwiedni) na-



Rys. 21. Konstrukcja koła Mohra dla kompozytu zbrojonego dwoma włóknami (sztywnymi)

chylona jest do osi  $\sigma_n$  właśnie pod kątem  $2\alpha$ . Ponieważ przy eliptycznej obwiedni istnieje tylko jedna normalna o takim współczynniku kątowym, przeto określa ona jednoznacznie szukane koło Mohra.

Współczynnik kątowy normalnej do elipsy o równaniu  $\sigma_n^2/a^2 + \tau_n^2/b^2 = 1$  określony jest wzorem

$$(8.1) \quad m = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{a^2 \tau_n^0}{b^2 \sigma_n^0}.$$

Znając jego wartości możemy określić współrzędne punktów styczności koła Mohra do obwiedni oraz środek i promień tego koła. W naszym przypadku  $a^2 = 4\sigma_0^2/3$ ,  $b^2 = \sigma_0^2/3$ , a stąd obliczamy

$$(8.2) \quad \sigma^0 = \pm \frac{4\sigma_0 \sqrt{3}}{3\sqrt{4+\operatorname{tg}^2 2\alpha}}, \quad \tau = \pm \frac{\sigma_0 \sqrt{3} \operatorname{tg} 2\alpha}{3\sqrt{4+\operatorname{tg}^2 2\alpha}}$$

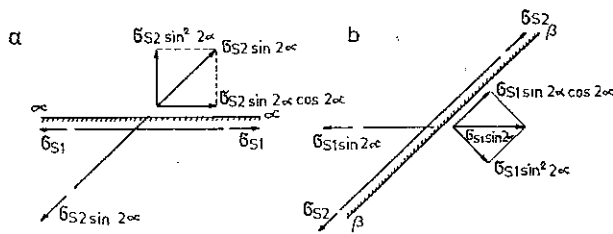
oraz

$$\sigma = \frac{\sqrt{3} \sigma_0}{\sqrt{4+\operatorname{tg}^2 2\alpha}}, \quad R = \tau_{\max} = \frac{\sqrt{3} \sigma_0}{3 \cos 2\alpha \sqrt{4+\operatorname{tg}^2 2\alpha}}.$$

Znając powyższe wielkości możemy określić graniczny stan naprężenia w osnowie:

$$(8.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx}^m &= \frac{\sqrt{3} \sigma_0}{\sqrt{4+\operatorname{tg}^2 2\alpha}} \left( 1 + \frac{\cos 2\vartheta}{3 \cos 2\alpha} \right), \\ \sigma_{yy}^m &= \frac{\sqrt{3} \sigma_0}{\sqrt{4+\operatorname{tg}^2 2\alpha}} \left( 1 - \frac{\cos 2\vartheta}{3 \cos 2\alpha} \right), \\ \sigma_{xy}^m &= \frac{\sqrt{3} \sigma_0 \sin 2\vartheta}{3 \cos 2\alpha \sqrt{4+\operatorname{tg}^2 2\alpha}}. \end{aligned}$$

Wzory (8.3) po wykonaniu przekształceń trygonometrycznych dadzą się doprowadzić do postaci (6.26).



Rys. 22. Stan naprężenia w kompozycie w przekroju równoległym do pierwszej i drugiej rodziny włókien

Następnym etapem jest wyznaczenie koła Mohra obrazującego stan graniczny kompozytu. Wykorzystamy w tym celu wzory (6.1) określające stan naprężenia w kompozycie na dowolnych ortogonalnych płaszczyznach. Taka forma nie jest

dogodna do ilustracji graficznej. Zauważmy, że jeśli przetniemy kompozyt płaszczynami równoległymi odpowiednio do pierwszej i drugiej rodziny włókien i określimy stan naprężenia na tych płaszczynach, to otrzymamy dużo prostsze wzory, w których składowe styczne i normalne wektora naprężenia nie zawierają jednocześnie obydwu parametrów  $\sigma_{s1}$  i  $\sigma_{s2}$ .

Zgodnie z rys. 22 i równaniami (6.1), w których przyjęto a)  $\theta_1=0$ , b)  $\theta_2=0$  mamy w przypadku a)

$$(8.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx}^c &= \sigma_{xx}^m + \sigma_{s1} + \sigma_{s2} \cos^2 2\alpha, \\ \sigma_{yy}^c &= \sigma_{yy}^m + \sigma_{s2} \sin^2 2\alpha, \\ \sigma_{xy}^c &= \sigma_{xy}^m + \sigma_{s2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha; \end{aligned}$$

w przypadku b)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^c &= \sigma_{xx}^m + \sigma_{s1} \cos^2 2\alpha + \sigma_{s2}, \\ \sigma_{yy}^c &= \sigma_{yy}^m + \sigma_{s1} \sin^2 2\alpha, \\ \sigma_{xy}^c &= \sigma_{xy}^m + \sigma_{s1} \sin 2\alpha \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Po wykonaniu wykresów funkcji (8.4) jesteśmy w stanie wyznaczyć koło Mohra dla kompozytu (rys. 21).

Stan naprężenia w osnowie na płaszczyźnie  $\theta_1=0$  obrazuje punkt *A*, a na płaszczyźnie  $\theta_2=0$  — punkt *B*. Z punktów tych prowadzimy proste nachylone pod kątem  $2\alpha$  do osi  $\tau_n$  (styczne do koła Mohra). Na tych prostych odkładamy odpowiednio wielkości  $\sigma_{s1} \sin 2\alpha$  i  $\sigma_{s2} \sin 2\alpha$ . Przez punkty *C* i *D* prowadzimy okrąg, którego środek leży na osi  $\sigma_n$ .

Dla każdej pary parametrów  $\sigma_{s1}$  i  $\sigma_{s2}$  istnieje tylko jeden taki okrąg. Na rys. 21 można zaobserwować dewiację kierunków głównych tensorów  $\sigma^m$  i  $\sigma^c$ . Kompozyt w ogólnym przypadku wykazuje silną anizotropię. Jedynie wtedy, gdy włókna obydwu rodzin przenoszą jednakowe siły ( $|\sigma_{s1}|=|\sigma_{s2}|$ ) zachodzi współosiowość  $\sigma_{ij}^m$  i  $\sigma_{ij}^c$ .

Obwiednia kół Mohra znalezionych dla różnych wartości  $\sigma_{s1}$  i  $\sigma_{s2}$  będzie przedstawiać na płaszczyźnie Mohra wykres szukanego warunku plastyczności dla kompozytu. Równanie to ma postać

$$(8.5) \quad \begin{aligned} \sigma_n^c \sin(\vartheta - \alpha) \sin(\vartheta + \alpha) - \tau_n \sin 2\vartheta = \\ = \pm \frac{\sigma_0 \sqrt{3}}{6} \frac{[\cos 2\alpha \cos(\vartheta + \alpha) \cos(\vartheta - \alpha) + \sin 2\vartheta]}{(3 \cos^4 \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 1)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Podobnie ilustruje się graficznie inne mechanizmy wyczerpania nośności kompozytu. Jeżeli włókna jednej rodziny są uplastycznione, a drugiej pozostają sztywne, to sposób postępowania sprowadzi się do powtórzenia odpowiednich konstrukcji opisanych w punkcie 5 poświęconym kompozytom zbrojonym jedną rodziną włókien. Dotyczy to również przypadku, kiedy włókna obydwu rodzin są uplastycznione.

Jeżeli przyjmiemy inny warunek plastyczności dla osnowy, to ulegnie zmianie postać obwiedni granicznej na płaszczyźnie Mohra.

Różne rodzaje tych obwiedni były pokazane w pierwszej części pracy. Omówimy w skrócie pewne, związane z ich kształtem zmiany, jakie zajdą w przytaczanej analizie.

a) Obwiednią kół Mohra dla warunku Hubera-Misesa w PSO są dwie proste równoległe do osi  $\sigma_n$ , odległe od niej o  $\pm k$ . W związku z tym koło Mohra dla osnowy można wyznaczyć jedynie z dokładnością do ciśnienia średniego  $\sigma$ . Przypadek dwóch włókien sztywnych może zajść jedynie dla włókien ortogonalnych.

b) Obwiednia graniczna dla warunku Treski składa się z dwóch prostych zakończonych półkołami. Wynika stąd, że mechanizm płynięcia przy sztywnych włóknach ułożonych względem siebie pod dowolnym kątem  $\alpha$  ilustrować mogą jedynie dwa koła Mohra o środkach  $(\sigma_0/2, 0)$  oraz  $(-\sigma_0/2, 0)$ .

Pozostałe koła styczne do obwiedni opisują stan graniczny osnowy wtedy, jeśli włókna są ułożone ortogonalnie.

c) Koło Mohra dla stanu granicznego izotropowej osnowy spełniającej warunek Johansena jest jednoznacznie określone, co wynika ze szczególnej postaci obwiedni opisującej ten przypadek.

Wyznaczenie koła Mohra dla kompozytu polega na powtórzeniu postępowania opisanego wcześniej w tym punkcie.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press Oxford 1950.
2. L. W. HU, *Modified Tresca's yield conditions and associated flow for anisotropic materials and applications*, Journal of Franklin Institute, **265**, 187, 1958.
3. A. SAWCZUK, *Linear theory of an anisotropic bodies and its applications to problems of limit analysis*, Arch. Mech. Stos., **11**, 541, 1959.
4. J. F. MULHERN, T. G. ROGERS, A. J. M. SPENCER, *A continuum theory of a plastic—elastic fibre—reinforced material*, Int. J. of Eng. Science, **7**, 2, 1969
5. W. PRAGER, *Plastic failure of fiber—reinforced materials*, J. Appl. Mech., **36**, Trans. Am. Soc. Mech. Eng., **91**, Series E, Sept. 1969, 542–544.
6. R. H. LANCE, D. N. ROBINSON, *A maximum shear stress theory of plastic failure for fiber—reinforced materials*, J. Mech. Phys. Sol., **19**, 49–60, 1971.
7. J. D. HELFESTINE, R. M. LANCE, *Yielding of fiber-reinforced Tresca material*, J. Eng. Mech. Div., EM4, Aug., 649–866, 1972.
8. P. V. McLAUGHLIN jr., S. C. BATTERMAN, *Limit behaviour of fibrous materials*, Int. J. Solids Struct., **6** 1357–1376, 1970.
9. P. V. McLAUGHLIN jr., *Plastic behaviour and failure of filament reinforced materials*, Int. J. Solids Struct., **8**, 1299–1318, 1972.

#### Резюме

#### УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ МАТЕРИАЛОВ АРМИРОВАННЫХ ВОЛОКНАМИ

Работа посвящена систематическому выводу условий пластичности для композитов армированных одним или двумя семействами волокон при предположении, что так основа, как и волокна являются жестко-идеально пластическими материалами.

Пренебрегается эффектом тягучести отдельных материалов, а таким образом пренебрегается такими механизмами разрушения как разрыв волокон или генерация и распростра-

одновременная пластичность волокон и основы, а также пластическое течение основы, при наличии трещин в основе. Рассматриваются разные механизмы течения для композита, т.е. одним или обоим жестких волокон. Принимается, что основа удовлетворяет условиям пластичности Губера-Мизеса, Треска и ПИогансена. В работе приведен метод вывода граничных условий при использовании функции диссипации, а также дается графическое построение напряженного состояния в композите при помощи кругов Мора.

## SUMMARY

## YIELD CONDITIONS FOR FIBRE-REINFORCED MATERIALS

This paper provides a systematic derivation of yield conditions for composites reinforced by one or two families of fibres assuming that both the matrix and the fibres are perfectly plastic materials. Such mechanisms of failure as fibre rupture or pull-out and matrix cracking are neglected. Three mechanisms of plastic flow are discussed: 1) plastic matrix and plastic fibres, 2) plastic matrix and one fibre family rigid, 3) plastic matrix and two fibre families rigid. The yield condition for matrix has the form of familiar Huber-Mises, Tresca or Johansen conditions usually applied for metals or reinforced concrete. The forms of dissipation functions are derived and geometric discussion of fibre-matrix interaction is presented using Mohr's circle. This work constitutes a first step toward solution of optimal synthesis problems for fibre-reinforced composites.

POLSKA AKADEMIA NAUK  
 INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
 i  
 INSTYTUT TECHNIKI BUDOWLANEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 9 lutego 1976 r.*