

## METODA TEORETYCZNEGO WYZNACZANIA NAPRĘŻEŃ W ŻELBETOWYCH TARCZACH ZARYSOWANYCH

MACIEJ MINCH (WROCLAW)

Przedstawiono sposób wyznaczania naprężeń i przemieszczeń w żelbetowych tarczach zarysowanych. Rozważania przeprowadzono w klasie funkcji nieciągłych. Otrzymano funkcję Greena tarczy sprężystej dla dowolnego kształtu konturu, jednorodnych nieciągłych warunków brzegowych i obciążenia. Funkcję tę opisano za pomocą układu silnie osobliwych równań całkowych, w których uniwersalnymi jądrami są dane w postaci zamkniętej całki szczególne równania różniczkowego tarczy obciążonej w swoim obszarze siłą skupioną. Korzystając z teorii dystrybucji, teorii potencjałów i funkcji Greena sformułowano warunki graniczne w rysie, dane jako warunki Burgersa dla dyslokacji. Naprężenia i przemieszczenia w tarczy zarysowanej określono za pomocą osobliwych równań całkowych, które rozwiązano numerycznie. Zamieszczono przykłady liczbowe.

### 1. WSTĘP

Zagadnienie wyznaczania naprężeń w żelbetowych tarczach niezarysowanych uważać można w zasadzie za znane. Odbywa się to za pomocą teorii sprężystości, przy czym zakłada się, że zbrojenie nie zaburza izotropii tarczy, bądź też uwzględnia się jego wpływ przez odpowiednie współczynniki anizotropii. Praktycznie do chwili obecnej wymiaruje się tarcze pracujące w fazie II, a więc z dopuszczeniem ich zarysowania, również jak tarcze niezarysowane. Można mieć wiele zastrzeżeń co do poprawności takiego postępowania. Wynika to stąd, że z chwilą pojawienia się rys naruszone zostają warunki zgodności odkształceń. Konstrukcja przestaje być «jednorodna». Wydzielają się części tarczy, które wzajemnie na siebie oddziałują przez uzewnętrznione zbrojenie w rysie. Powodować to może istotne przegrupowania sił wewnętrznych w ustroju zarysowanym w porównaniu do jego stanu bez rys. Aby określić wielkość tego przegrupowania, należy w rozwiązaniu zastosować odpowiedni rachunek opisujący nieciągłość wektora przemieszczania na brzegach pęknięć.

Pierwsze próby uwzględnienia wpływu szczelin o kształcie eliptycznym na wytrzymałość materiałów kruchych podał A. GRIFFITH w roku 1923. Korzystając z metody energetycznej K. WOLF [1] pokazał zastosowanie teorii A. Griffitha w tarczach prostokątnych i kołowych.

I. SNEDDON w monografii [2] przedstawił bogaty przegląd rozwiązań własnych i innych autorów uzyskany dla różnych przypadków szczelin dwuwymiarowych w ośrodku nieskończonym, półprzestrzeni lub paśmie nieskończonym. Podstawowymi metodami rozwiązań tych zadań były metody funkcji zmiennej zespolonej

omówione przez N. MUSCHELISZWILEGO [3] i metody przekształceń całkowych podane w monografii I. UFLANDA [4].

Wśród polskich prac na uwagę zasługują teorie dyskretnych defektów przedstawione przez H. ZORSKIEGO [5] i E. KOSSECKĄ [6]. Teorie te polegają na sformułowaniu odpowiednich potencjałów, których pochodne opisują skoki wektora przemieszczenia na brzegach szczeliny. E. KOSSECKA [7 i 8], stosując różne typy sił podwójnych odpowiadających potencjałom podwójnym, pokazuje, że siły te odpowiednio dobrane posiadają wszystkie własności defektów. M. MATCZYŃSKI [9 i 10] korzystając z potencjałów wprowadzonych przez H. Zorskiego znalazł rozwiązanie dla ośrodka nieograniczonego, osłabionego szczeliną Griffitha w płaskim stanie odkształcenia. Warunki, jakie muszą być spełnione, aby rozwiązanie było jednoznaczne, podane zostały przez J. GRYCZA [11], E. KOSSECKĄ i H. SCHÖPPA [12].

Wykorzystanie matematycznych modeli dyslokacji przedstawionych powyżej napotyka w żelbecie na poważne trudności. Dlatego też w nielicznych pracach poświęconych zarysowanym tarczom żelbetowym rozwiązań poszukuje się za pomocą metod kontynualnych.

F. LEONHARDT i E. MÖNNING [13] określają naprężenia w tarczy, wykorzystując warunki równowagi w rysie. Zakładają przy tym, że rysa nie powstaje w kierunku głównego naprężenia ściskającego. Realizacja warunku na minimum pracy odkształcenia daje kierunek rysy. N. KARPIENKO [14 i 15] oblicza tarczę zarysowaną jak anizotropową. Współczynniki anizotropii dobiera z warunków równowagi w rysie i teorii rys. Rozwiązanie otrzymuje stosując metodę różnic skończonych.

Zastosowanie metody elementów skończonych do analizy żelbetowych tarcz zarysowanych podali L. CEDOLIN, S. DEI POLI, B. S. KAPUR [16]. Obszary zarysowane określają oni w sposób iteracyjny. Obszary te mają inne własności niż części tarczy bez rys. Zadanie zostało w ten sposób uśrednione, ponieważ brzegi elementów nie muszą pokrywać się z brzegami rys.

Przedstawione wyżej trzy sposoby obliczania tarcz zarysowanych są ciągłe w sensie rachunku różniczkowego i całkowego, ponieważ nie uwzględniają one skoku w wektorze przemieszczenia w miejscu rysy. Wadą takiego podejścia jest rozmazanie efektów wywołanych zarysowaniem w bezpośrednich obszarach dyslokacji, choć globalny efekt wpływów od pęknięć w konstrukcji jest prawidłowy.

Rozwiązania nieciągłe dla belek i płyt żelbetowych podał A. BORCZ [17]. Zmianę sztywności konstrukcji uwzględnił on jedynie w przekroju zarysowanym. Rozwarcia rysy opisał deformacjami trwałymi i deformacjami sprężystymi proporcjonalnymi do zmiany krzywizny w kierunku normalnym do rysy. Przyjmując w rysie skok kąta obrotu opisany funkcją Heaviside'a, wyprowadził dystrybucyjne równanie różniczkowe dla płyty zarysowanej. Do rozwiązania tego równania wykorzystał funkcję Greena, otrzymując równania całkowe na poszukiwane wielkości po linii dyslokacji  $D$ . Zastosowanie w tym podejściu definicji dyslokacji powierzchniowej dla powierzchni  $S$  o brzegu  $\partial S = D$  takiej, że w odpowiadającym jej polu przemieszczeń  $u$  występuje skok przy przejściu przez powierzchnię  $S$ ,

$$(1.1) \quad [u]_S = b,$$

gdzie  $\mathbf{b}$  jest wektorem Burgersa linii dyslokacji  $D$ , prowadzi do wniosku, że naprężenia i odkształcenia muszą mieć na powierzchni dyslokacji  $S$  osobliwości typu delty Diraca, a zatem rozwiązań należy szukać nie w klasie funkcji, a w klasie dystrybucji. Aby miały one sens i były jednoznaczne, spełnione muszą być warunki przedstawione przez E. DE JAGERA [18].

Do weryfikacji rozwiązań teoretycznych posłużyć mogą badania przeprowadzone na żelbetowych tarczach zarysowanych. Badań takich jest jednak niewiele. Większość z nich nastawiona była na określenie nośności granicznej, dlatego też otrzymane rezultaty trudno jest przyjmować do analizy przegrupowania naprężeń lub przemieszczeń dla tarcz znajdujących się w fazie II.

Spośród autorów badań zagranicznych wymienić należy prace H. KLINGROTHA [19], H. SCHÜTTA [20], F. LEONHARDTA [21]. W Polsce jedyne i najbardziej obszerne badania tarcz przeprowadził T. ĆWIRKO-GODYCKI [22]. Analizując wyniki powyższych eksperymentów dojść można do wniosku, że po zarysowaniu następuje istotna zmiana ramienia sił wewnętrznych. Aby zachowane zostały warunki równowagi oczywiste jest, że musi zachodzić przegrupowanie powierzchni naprężeń i przemieszczeń w tarczy zarysowanej, w porównaniu z tarczą sprężystą.

Teoretyczne określenie wielkości tego przegrupowania pozwoliłoby na efektywne wymiarowanie tarcz w fazie II bez konieczności uciekania się do kosztownych badań doświadczalnych. Aby to było możliwe, należy do rozwiązania przyjąć odpowiedni matematyczny model rysy. Model ten musi spełniać pewne wymagania. Powinien opisywać podstawowe cechy dyslokacji (1.1) i makroskopowe własności materiałów, z których zbudowana jest konstrukcja. Model ten powinien być także «rachunkowo dostępny». Zaletą takiego podejścia będzie możliwość uzyskania prawidłowego globalnego rozwiązania wywołanego rysami w konstrukcji oraz możliwość analizy wpływu zarysowania na stan wyężenia tarczy w bezpośrednich obszarach pęknięć.

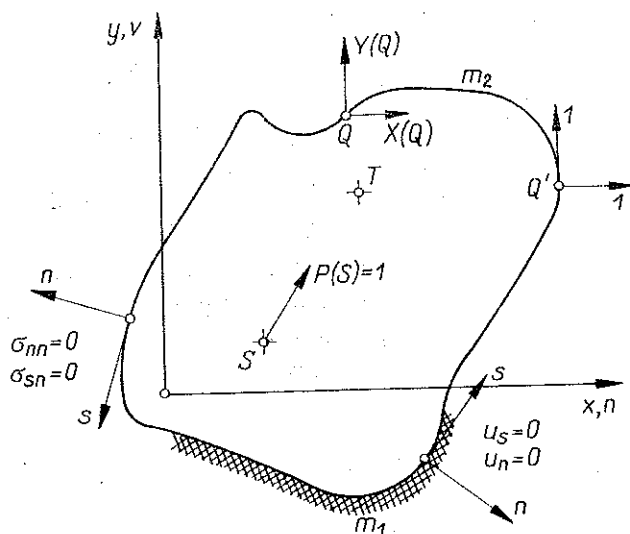
Założono, że rysa traktowana być może jako szczególnego rodzaju dyslokacja powierzchniowa w konstrukcji z tym zastrzeżeniem, że brzegi jej nie będą wolne od naprężeń, ponieważ przecinają je pręty zbrojenia. Pozwoli to wykorzystać dobrze rozwinięty aparat teorii potencjałów. Rozwiązania poszukiwać się będzie standardową metodą działania funkcji Greena. Prawo konstytutywne opisujące rozwieranie się dyslokacji przyjęte będzie dzięki teorii wykorzystaniu rysy.

## 2. FUNKCJA GREENA

Rozpatrzono tarczę ograniczoną dowolnym konturem  $m$ , na odcinku  $m_1$  sztywno zamocowaną, na odcinku  $m_2$  wolną od obciążeń (rys. 1). Warunki brzegowe zadania mają następującą postać:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u_s = u_1 = 0, \\ u_n = u_2 = 0 \end{aligned} \quad \text{dla } m_1;$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{sn} = \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{nn} = \sigma_{22} = 0 \end{aligned} \quad \text{dla } m_2,$$



Rys. 1

gdzie  $u_n$  jest składową przemieszczenia w kierunku normalnej  $n$ , a  $u_s$  w kierunku stycznej  $s$ .

Pod wpływem obciążenia siłą skurioną  $P(S)=1$  ustali się w tarczy stan przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia. Jeżeli przemieszczenia i naprężenia przyjmuje się w postaci całek szczególnych równania różniczkowego, danych w prostej zamkniętej postaci i przedstawionych przez W. NOWACKIEGO [23],

$$(2.3) \quad \Delta \Delta G = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0),$$

to zadanie sprowadzi się do wyznaczenia wielkości sił poziomych  $X(Q)$  i sił pionowych  $Y(Q)$  jako funkcji położenia punktu  $Q$  na brzegu dobranych tak, aby spełnione były odpowiednie warunki brzegowe (2.1) lub (2.2).

Przemieszczenia i naprężenia w punkcie  $T$ , wywołane działaniem siły skupionej  $P$  przyłożonej w punkcie  $S$ , oznaczono przez  $u_\alpha^0(T, S)$  i odpowiednio  $\sigma_{\alpha\beta}^0(T, S)$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ).

Założono, że w punkcie  $Q'$  na brzegu  $m$  działa jednostkowa siła skupiona skierowana w kierunku osi  $X$ . Przemieszczenia i naprężenia w punkcie  $T$  obliczyć można również z całek szczególnych równania (2.3). Oznaczono je odpowiednio  $u_\alpha^{(x)}(T, Q')$  i  $\sigma_{\alpha\beta}^{(x)}(T, Q')$ . Postępując analogicznie, dla siły przyłożonej w punkcie  $Q'$  ale w kierunku osi  $y$ , otrzymano  $u_\alpha^{(y)}(T, Q')$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}^{(y)}(T, Q')$ . Zauważyć można, że przyjęte funkcje  $u_\alpha^0$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}^0$  z założenia spełniają równanie (2.3). Nie zachodzi również potrzeba transformacji wielkości  $u_\alpha^{(x)}$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}^{(x)}$ ,  $u_\alpha^{(y)}$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}^{(y)}$  na kierunki styczny i normalny do brzegu tarczy.

Otrzymanie wektora przemieszczenia  $u$  i tensora naprężenia  $\sigma_{\alpha\beta}$  dla tarczy ograniczonej danym konturem  $m$  z określonymi na tym konturze warunkami brzo-

wymi (2.1) lub (2.2) możliwe jest na drodze superpozycji przemieszczeń i naprężeń wywołanych reakcjami  $X(Q')$  i  $Y(Q')$  oraz siłą skupioną  $P(S)=1$ :

$$(2.4) \quad u_{\alpha}(T, S) = u_{\alpha}^0(T, S) + \int_m X(Q') u_{\alpha}^{(x)}(T, Q') dm(Q') + \\ + \int_m Y(Q') u_{\alpha}^{(y)}(T, Q') dm(Q'), \quad \alpha=1, 2,$$

$$(2.5) \quad \sigma_{\alpha\beta}(T, S) = \sigma_{\alpha\beta}^0(T, S) + \int_m X(Q') \sigma_{\alpha\beta}^{(x)}(T, Q') dm(Q') + \\ + \int_m Y(Q') \sigma_{\alpha\beta}^{(y)}(T, Q') dm(Q'), \quad \alpha, \beta=1, 2.$$

W równaniach tych niewiadomymi funkcjami są  $X(Q')$  i  $Y(Q')$ . Aby wyznaczyć te funkcje skorzystać trzeba z warunków brzegowych (2.1) dla brzegu  $m_1$ .

Otrzymano następujący układ dwóch równań całkowych dla przemieszczeń:

$$(2.6) \quad u_{\alpha}^0(Q, S) + \int_m X(Q') u_{\alpha}^{(x)}(Q, Q') dm(Q') + \\ + \int_m Y(Q') u_{\alpha}^{(y)}(Q, Q') dm(Q') = 0, \quad \alpha=1, 2.$$

Po skorzystaniu z warunków (2.3) dla brzegu  $m_2$  otrzymano układ dwóch równań całkowych dla naprężeń

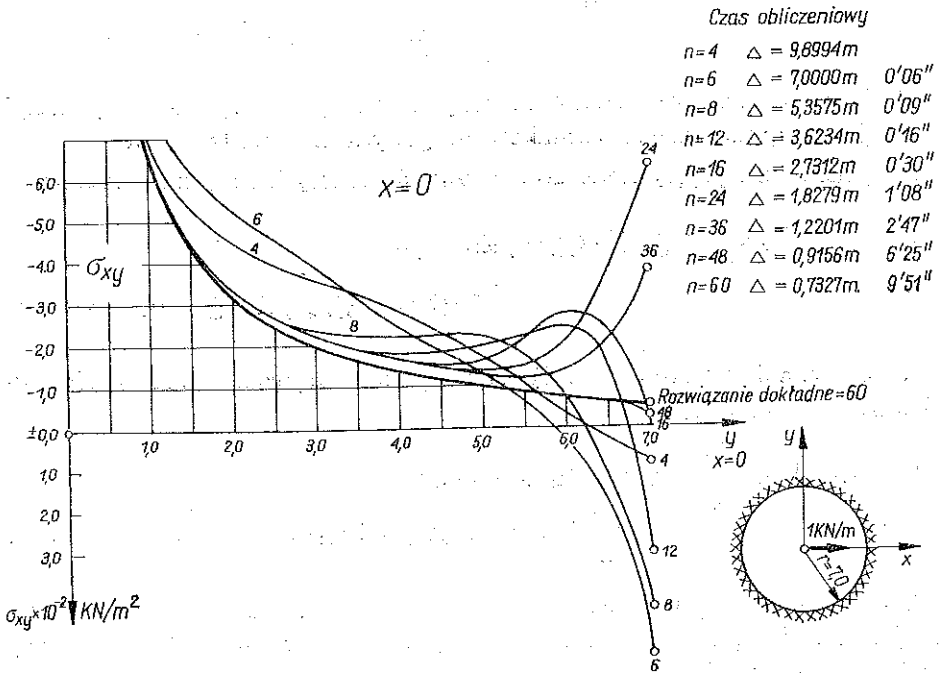
$$(2.7) \quad \sigma_{\alpha\beta}^0(Q, S) + \int_m X(Q') \sigma_{\alpha\beta}^{(x)}(Q, Q') dm(Q') + \\ + \int_m Y(Q') \sigma_{\alpha\beta}^{(y)}(Q, Q') dm(Q') = 0, \quad \alpha=1, 2, \quad \beta=2.$$

Równania (2.6) i (2.7) są silnie osobliwymi równaniami całkowymi Fredholma I rodzaju. Okazuje się, że istnieje rozwiązanie tych równań w sensie wartości głównej Cauchy'ego. Otrzytać można zatem nieznanne funkcje  $X(Q)$  i  $Y(Q)$  na konturze. Po wstawieniu tych funkcji do równań (2.4) i (2.5) wyznaczyć można składowe wektora przemieszczenia i tensora naprężenia w tarczy ograniczonej dowolnie danym konturem  $m$ .

Ponieważ analityczne rozwiązanie równań (2.6) i (2.7) okazuje się praktycznie niemożliwe, przeto do ich rozwiązania wykorzystano metody numeryczne. Zastosowano metodę kolokacji, spełniając dokładnie warunki brzegowe w skończonej liczbie punktów. Pozwoliło to sprowadzić równania całkowe do odpowiednich układów równań algebraicznych tak, żeby otrzymane rozwiązanie przybliżone było zadowalające.

Program obliczeń numerycznych funkcji Greena na maszynie ODRA 1300 przetestowano na przykładzie tarczy kołowej sztywno zamocowanej na brzegu, obciążonej w środku siłą skupioną. Zamknięta postać rozwiązania takiego przypadku przedstawiona jest przez S. ŁUKASIEWICZA [24]. Grubość tarczy  $h=1,0$  m, promień  $r=7,0$  m. Stałe materiałowe  $E=1,0$  kN/m<sup>2</sup>,  $\nu=1/6$ . Obciążenie siłą skupioną o wartości  $P=1,0$  kN/m działa w kierunku osi  $X$ . Pominięto siły masowe i inne obciążenia.

Rys. 2 przedstawia przykładowy wykres naprężeń  $\sigma_{xy}$  wzdłuż promienia tarczy. Poszczególne krzywe oznaczone są cyframi arabskimi, które oznaczają liczbę przyjętych w rozwiązaniu punktów kolokacji. Dla sześćdziesięciu punktów kolokacji rozwiązanie numeryczne pokrywa się z rozwiązaniem teoretycznym przy błędzie względnym na brzegu mniejszym od 1%. Czas trwania obliczeń dla poszczególnych serii oraz długości boków wieloboków foremnych, którymi aproksymowano tarczę kołową, odczytać można na wykresach.

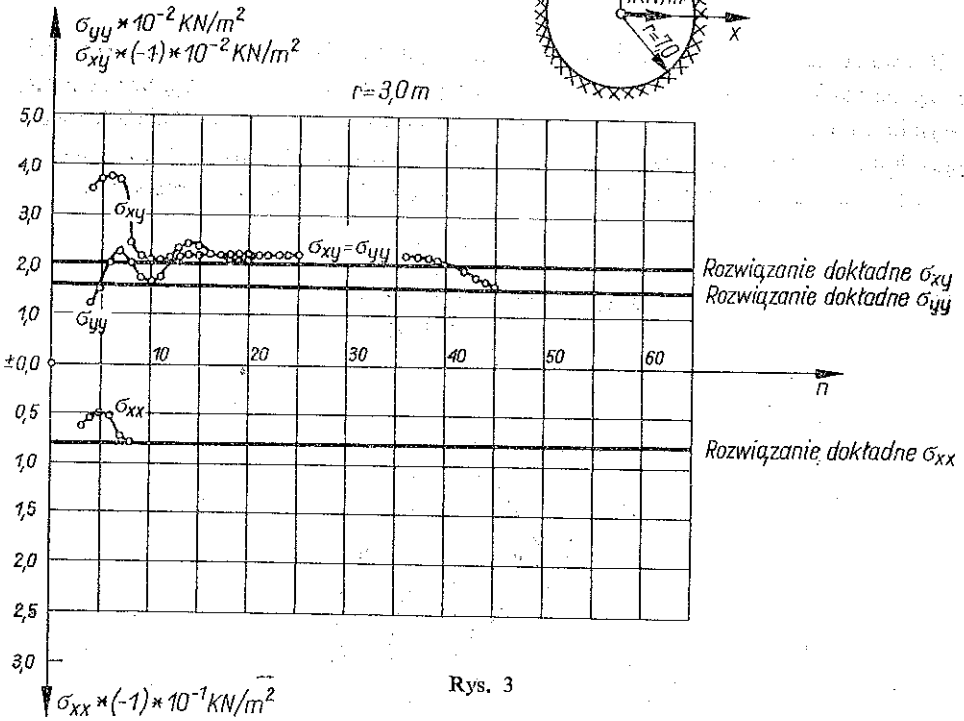
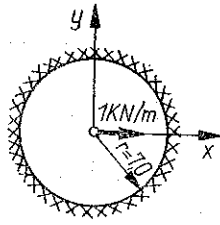


Rys. 2

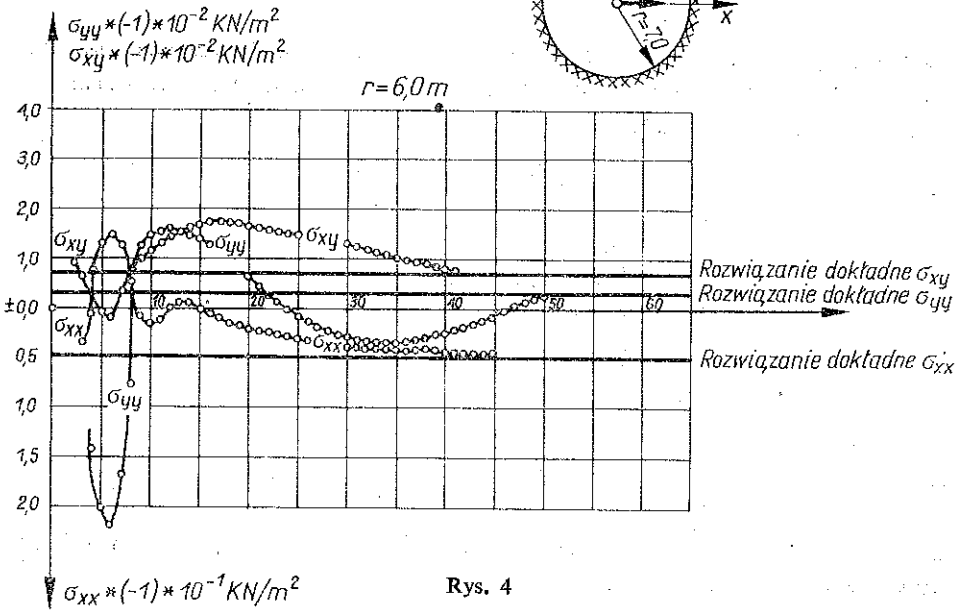
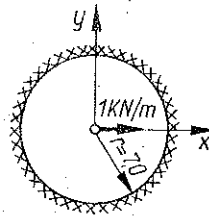
Na rys. 3 i 4 pokazano zbieżność numerycznego rozwiązania funkcji Greena dla naprężeń  $\sigma_{\alpha\beta}$  w wybranych punktach tarczy do rozwiązania dokładnego, w zależności od liczby punktów kolokacji  $n$ . Składowe naprężeń powinny być odkładane punktowo dla liczb całkowitych na osi  $n$ . Punkty te połączone jednak linią ciągłą w celu lepszej ilustracji funkcji  $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}(n)$ . Zauważyć można, że zgodnie z zasadą lokalności de Saint-Venanta zbieżność rozwiązania numerycznego do dokładnego jest gorsza w punkcie bliżej brzegu tarczy.

Rozwiązanie funkcji Greena sformułowanej za pomocą równań (2.4) i (2.5) pozwoliło otrzymać osobliwości w przemieszczeniach i naprężeniach pod siłą skupioną oraz realizację jednorodnych nieciągłych warunków brzegowych. Tak opisana funkcja Greena wykorzystana będzie do określenia przemieszczeń i naprężeń w żelbetowej tarczy z rysami.

$\sigma_{xx}$  punkt (3,0)  
 $\sigma_{yy}$  punkt (3,0)  
 $\sigma_{xy}$  punkt (0,3)



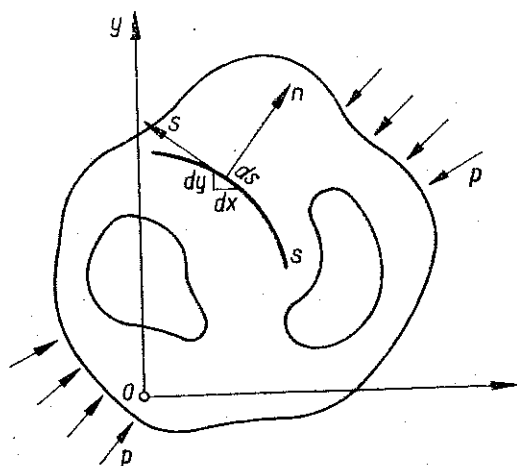
$\sigma_{xx}$  punkt (6,0)  
 $\sigma_{yy}$  punkt (6,0)  
 $\sigma_{xy}$  punkt (0,6)



## 3. MATEMATYCZNY MODEL RYS

Rozważa się tarczę jedno lub wielospójną w płaszczyźnie  $x, y$  (rys. 5). Określać się będzie skoki składowych wektora przemieszczenia lub tensora naprężenia przy przejściu przez brzeg  $s$ , od pewnych charakterystycznych typów obciążeń działających na tej krzywej. Otrzymanie rozwiązania możliwe będzie przez wykorzystanie wzoru aproksymującego  $\delta$ -Diraca przedstawionego w artykule H. ZORSKIEGO [25]

$$(3.1) \quad \delta(\varepsilon, s) = \frac{K\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)}{2\varepsilon \int_0^{\infty} K(\xi) d\xi}$$



Rys. 5

Zakłada się, że całka we wzorze (3.1) istnieje i jest bezwzględnie zbieżna. Można wykazać, że tak określona funkcja (3.1) dla  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  posiada wszystkie własności charakterystyczne dla delty Diraca:

$$(3.2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta(\varepsilon, s) = \begin{cases} 0 & \text{dla } s \neq 0, \\ \infty & \text{dla } s = 0; \end{cases}$$

$$(3.3) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\varepsilon, s) ds = 1,$$

$$(3.4) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \delta(\varepsilon, s - \xi) d\xi = f(s),$$

$$(3.5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \delta^{(m)}(\varepsilon, s - \xi) d\xi = f^{(m)}(s),$$

gdzie zakłada się, że  $f(s)$  jest ciągła w punkcie  $s$ , a  $f^{(m)}(s)$  jest pochodną  $m$ -tego rzędu względem zmiennej  $s$ .



Dla przyjętej funkcji

$$(3.6) \quad K(x) = (x^2 + 1)^{-n} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3,$$

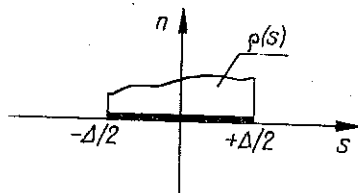
otrzymano następujący ciąg funkcji  $\delta$ -podobnych

$$(3.7) \quad \delta_n(\varepsilon, s) = \frac{2^{n-1} (n-1)!}{(2n-3)!!} \frac{\varepsilon^{2n-1}}{\pi (s^2 + \varepsilon^2)^n}.$$

Założono, że na krzywej  $s$  określona jest ciągła funkcja o gęstości  $\rho(s)$ . Jak wiadomo [5, 9 i 10], można wówczas skonstruować logarytmiczne potencjały warstwy pojedynczej i podwójnej (rys. 6):

$$(3.8) \quad \varphi(s, n) = \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \rho(\xi) \ln \frac{A}{2r} d\xi,$$

$$(3.9) \quad \psi(s, n) = \varphi_{,n} = -n \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \frac{\rho(\xi)}{r^2} d\xi,$$



Rys. 6

gdzie

$$r^2 = n^2 + (s - \xi)^2.$$

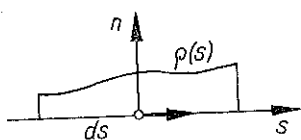
Wykorzystując wzory dotyczące dystrybucji  $\delta$  (3.7) wyznaczono wartości graniczne potencjałów (3.8) i (3.9) lub ich pochodnych przy przejściu przez brzeg  $s$ , na którym potencjały te zostały określone:

$$(3.10) \quad [\varphi] = [\varphi_{,s}] = [\psi_{,n}] = [n\psi_{,sn}] = 0,$$

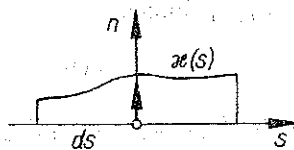
$$(3.11) \quad [\psi] = -2\pi\rho(s), \quad [\psi_{,s}] = -2\pi\rho_{,s}(s), \quad [\psi_{,nn}] = -2\pi\rho_{,ss}(s),$$

gdzie symbol  $[f]$  oznacza wielkość  $[f] = f^+ - f^-$ .

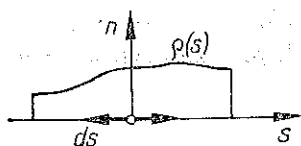
Wykorzystując (3.10) i (3.11) oraz funkcję Greena skonstruowaną z całek szczególnych równania (2.3), otrzymano na krzywej  $s$  — dla różnych typów obciążenia określonych na  $s$  danych w postaci sił stycznych (rys. 7), sił normalnych (rys. 8), dipoli stycznych (rys. 9), dipoli normalnych (rys. 10) oraz pary sił stycznych (rys. 11) — następujące skoki w składowych tensora naprężenia i wektora przemieszczenia, przedstawione w tablicy 1, gdzie  $\mu$  jest stałą Lamé'go:  $\mu = E [2(1-\nu)]^{-1}$ .



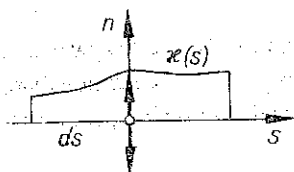
Rys. 7



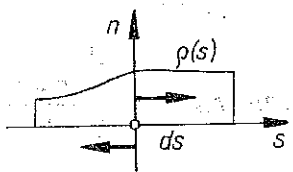
Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11

Tablica 1

Nr wzorów	Typ obciążenia	Schemat	$[u_s]$	$[u_n]$	$[\sigma_{ss}]$	$[\sigma_{sn}]$	$[\sigma_{nn}]$
(3.12)	siła styczna	rys. 7	0	0	0	$-\rho(s)$	0
(3.13)	siła normalna	rys. 8	0	0	$-\nu\kappa(s)$	0	$-\kappa(s)$
(3.14)	dipol styczny	rys. 9	0	0	0	$-\nu_{,s}(s)$	0
(3.15)	dipol normalny	rys. 10	0	$\mu^{-1}\kappa(s)$	0	$\nu\kappa_{,s}(s)$	0
(3.16)	para sił stycznych	rys. 11	$\frac{1-\nu}{2\mu}\rho(s)$	0	$-(2+\nu)\rho_{,s}(s)$	0	$\rho_{,s}(s)$

Określone wyżej różne typy potencjałów posłużyć mogą do określenia modelu rysy, na której brzegu wystąpić mogą nieciągłości wektora przemieszczenia w dwóch kierunkach. Stosując zasadę superpozycji wyznaczyć można rozwiązanie dla rysy, na brzegach, których dopuszczalny będzie skok wektora w dwóch możliwych kierunkach z osobna. Wyróżnia się dwa modele rysy: rysę z nieciągłym przemieszczeniem normalnym i rysę z nieciągłym przemieszczeniem stycznym.

Rozwiązanie opisujące rysę z nieciągłym przemieszczeniem normalnym otrzyma się dla obciążenia ciągłego na  $s$  siłami podwójnymi działającymi w kierunku normalnym  $n$ . Z zależności (3.15) wynika, że rozwiązanie to powoduje oprócz nieciągłości przemieszczenia normalnego  $u_n$  dodatkowo nieciągłości naprężenia  $\sigma_{sn}$ . Takie rozwiązanie nie spełniłoby warunków równowagi. W celu zlikwidowania na brzegach rysy nieciągłości  $\sigma_{sn}$  należy do rozwiązania pochodzącego dla obciążenia ciągłego normalnymi siłami podwójnymi, dodać rozwiązanie dla obciążenia ciągłego na długości  $s$  pochodzące bądź od sił stycznych, bądź od podwójnych sił stycznych działających w kierunku stycznym  $s$ . Wynika stąd, że chcąc otrzymać rozwiązanie tak skonstruowanego modelu rysy konieczne jest, aby działające obciążenie  $P$  dawało w rysie warunek  $\sigma_{sn}=0$ . Związek konstytutywny przedstawiający skok przemieszczenia normalnego do rysy opisuje funkcja  $r(s)$ . Zgodnie z założeniem żąda się, aby na długości  $s$  spełnione były warunki  $[u_s]=0$  i  $[u_n]=r(s)$ . Dodatkowo zakłada się na końcach rysy  $[u_n]=0$ . Jeśli rysa dochodzi do brzegu swobodnego, w którym możliwe jest przemieszczenie  $u_n$ , to warunek ten nie musi być spełniony.

Korzystając z (3.12) i (3.15), otrzymano

$$(3.17) \quad \rho(s) = \mu v r_{,s}(s),$$

$$(3.18) \quad \kappa(s) = \mu r(s).$$

Obciążenie ciągłe o charakterze podwójnych sił normalnych do rysy, proporcjonalne jest do rozwarcia rysy, a obciążenie ciągłe dla sił stycznych do rysy, proporcjonalne jest do pierwszej pochodnej rozwarcia rysy.

W analogiczny sposób dla rysy z nieciągłym przemieszczeniem normalnym formułuje się model rysy z nieciągłym przemieszczeniem stycznym. Przyjmując do rozważań rozkłady (3.13) i (3.16) otrzymano

$$(3.19) \quad \rho(s) = \frac{2\mu}{1-\nu} t(s),$$

$$(3.20) \quad \kappa(s) = \frac{2\mu}{1-\nu} t_{,s}(s).$$

#### 4. ZWIĄZEK KONSTITUTYWNY

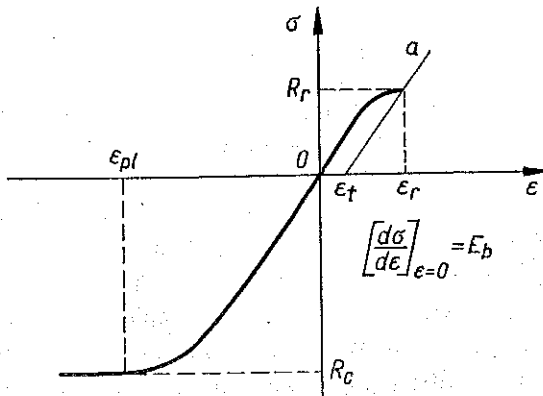
W tarczy zarysowanej oprócz warunków brzegowych spełnić trzeba na brzegach rys pewne dodatkowe warunki, nazywane warunkami granicznymi. Jest to warunek Burgersa (1.1) oraz jego pochodna dotycząca zerowania odpowiednich naprężeń.

Warunek Burgersa, dany związkiem konstytutywnym opisującym rozwieranie się rysy, sformułowany dla żelbetu, umożliwiłby dokładne rozwiązanie postawionego zadania. Złożoność niektórych nie wyjaśnionych do dziś procesów zachodzących w elementach żelbetowych, pozwala na określenie związków konstytutywnych jedynie z pewnym przybliżeniem. Wyidealizowano zatem model rysy czyniąc następujące założenia: 1) rozpatruje się tylko statykę zjawiska zarysowania, 2) rysy krzywoliniowe można na krótkich odcinkach aproksymować rysami prostoliniowymi.

wymi, 3) zbrojenie w rysie jest wiotkie, 4) w przekroju rysy naprężenia betonu normalne i styczne do jej brzegu równe są zeru (brak oddziaływań betonu między sąsiednimi brzegami rysy) oraz 5) przekrój zarysowany nie osiąga fazy III.

Przyjmuje się, że rozmieszczenie rys jest dane. Można również wyznaczyć prawdopodobne kierunki rys wychodząc ze stanu sprężystego. W pracy przyjęto, że rysa powstaje w chwili osiągnięcia w betonie głównych naprężeń rozciągających  $\sigma_{\max} = R_r$  wytrzymałości betonu przy jednoosiowym rozciąganiu. Możliwe jest również przyjęcie innych hipotez wytrzymałościowych. Poza pewnymi komplikacjami typu rachunkowego nie wniesie to jednak nic nowego do przedstawionego tu sposobu rozwiązywania zadania. W dalszych rozważaniach pominięto schemat rys przecinających się w układzie rozciągania-rozciąganie, ponieważ powstają one tylko dla szczególnych typów obciążeń występujących niezmiernie rzadko w konstrukcjach żelbetowych. Założono również, że zbrojenie tarczy nie powoduje zmiany jej izotropii. Sformułowany będzie związek konstytutywny opisujący rozwieranie się rysy jedynie w kierunku normalnym  $n$ .

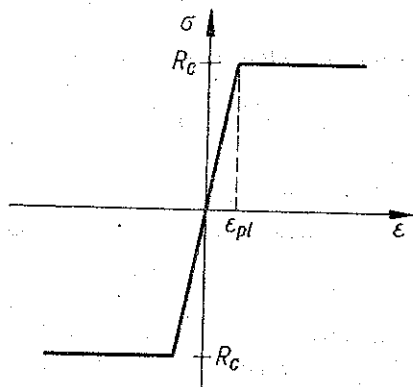
Wyznaczenie naprężeń i przemieszczeń w tarczy wymaga ustalenia zależności między obciążeniem a odkształceniem w każdym jej punkcie. Jeśli uwzględni się założenie, że wszędzie poza rysami tarcza pracuje w fazie I, to zadanie sprowadzi się do ustalenia związku obciążenie-odkształcenie dla przekrojów zarysowanych, wyznaczonego z równań równowagi w rysie. W równania te wchodzi naprężenia lub napięcia i dlatego konieczne jest ustalenie zależności między odkształceniem a naprężeniem dla materiałów, które tworzą konstrukcję tarczy. Rozpatruje się związek naprężenie normalne—wydłużenie względne dla betonu i stali. Związek ten dla betonu nie jest liniowy. Zależy on przy tym od wielu parametrów wytrzymałościowych. Wykres ten zmienia się także w czasie powodując dodatkowe odkształcenia, tzw. odkształcenia opóźnione, takie jak skurcz i pełzanie. Ustalając wszystkie parametry dla betonu otrzyma się funkcję  $\sigma = \sigma(\epsilon)$  przedstawioną na rys. 12. Prosta ta jest charakterystyką pracy przekroju betonowego dla naprężeń mniejszych od  $R_r$ , do których przekrój ten był uprzednio obciążony. Model taki daje odkształcenia trwałe (pozostające)  $\epsilon_t$  już w fazie I. Teoretyczny opis nieliniowego



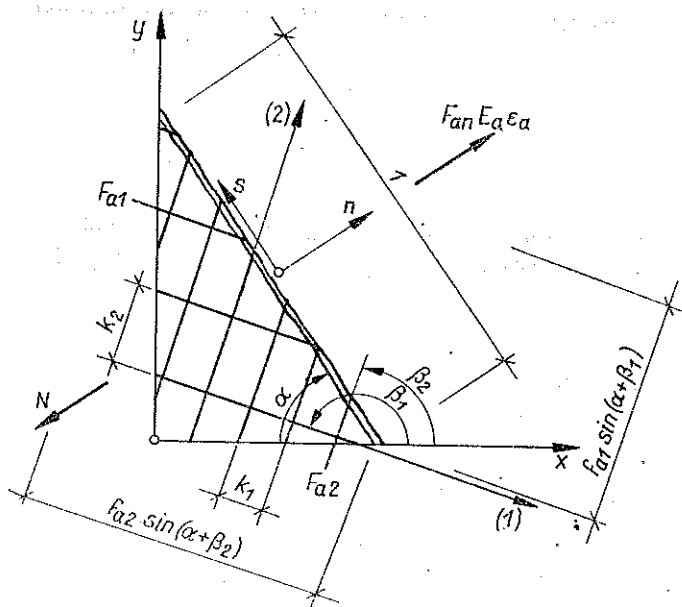
Rys. 12

modelu betonu, przedstawiony m.in. przez J. ŁEMPICKIEGO [26 i 27], B. BUKOWSKIEGO [28], T. SZULCZYŃSKIEGO [29], odbywa się za pomocą aproksymacji krzywymi regularnymi. Uwzględnienie reologii w rozwiązaniu odbywać się może przez zmianę wykresu dla betonu w interesujących konstruktora chwilach czasowych. Przegląd odnośnej problematyki przedstawia monografia A. MITZELA [30]. Możliwe jest również przyjmowanie do obliczeń krzywych otrzymanych doświadczalnie. Wykresy takie dla stałej prędkości odkształcenia podaje C. RASCH [31].

Rzeczywisty wykres naprężenie-odkształcenie względne dla stali zwykłej przedstawia rys. 13. Ponieważ zakłada się pracę konstrukcji daleko od stanów granicznych, przeto w obliczeniach przyjęto, że zbrojenie w rysie nie osiąga granicy plastyczności.



Rys. 13



Rys. 14

Znajomość wydłużenia względnego  $\varepsilon$  w każdym punkcie przekroju zarysowanego pozwala określić szukaną wielkość rozwarcia rysy  $r(s)$ . Rys. 14 przedstawia przekrój zarysowany o jednostkowej długości, nachylony do osi  $x$  pod kątem  $\alpha$ . Przyjęto, że tarcza zbrojona jest siatką ortogonalną. Kierunki zbrojenia odpowiadają osiom  $i=1, 2$ . Pręt  $i$ -ty nachylony jest do osi  $x$  pod kątem  $\beta_i$ . Dla kierunku  $i$ -tego zbrojenie scharakteryzowano parametrem

$$(4.1) \quad f_{ai} = F_{ai} K_i^{-1}, \quad i=1, 2,$$

gdzie  $F_{ai}$  jest polem powierzchni przekroju prętów, a  $K_i$  rozstawem między nimi. Przekroje zbrojenia rzutowane z jednostkowej długości rysy wynoszą

$$(4.2) \quad f_{zi} = f_{ai} \sin(\alpha + \beta_i), \quad i=1, 2.$$

Zastępczy przekrój zbrojenia prostopadły do rysy określony jest wzorem

$$(4.3) \quad F_{an} = \sum_{i=1}^2 f_{ai} \sin^2(\alpha + \beta_i).$$

Oznaczając przez  $f(\varepsilon)$  i  $g(\varepsilon)$  funkcje występujące w równaniach charakterystyk  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  dla betonu i stali otrzymać można wzory na naprężenia:

$$(4.4) \quad \sigma_b = f(\varepsilon), \quad \sigma_a = g(\varepsilon).$$

Wykorzystując warunek równowagi naprężeń i sił wewnętrznych rzutowany na kierunek prostopadły do rysy, otrzymano nieliniowe równania na niewiadomą  $\varepsilon$ :

$$(4.5) \quad F(\varepsilon) = f(\varepsilon) F_b + g(\varepsilon) F_{an} - N = 0,$$

gdzie  $F_b$  jest polem powierzchni przekroju betonu dla jednostkowej długości rysy oraz gdzie

$$N = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{nn} dz.$$

Równanie (4.5) rozwiązać można metodą kolejnych przybliżeń, np. za pomocą jednopunktowego szybkozbieżnego wzoru iteracyjnego Newtona (metoda stycznych):

$$(4.6) \quad \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - F(\varepsilon_k) [F'(\varepsilon_k)]^{-1},$$

gdzie wielkość  $[F'(\varepsilon_k)]^{-1}$  pełni rolę czynnika nadrelaksacji. Warunki, jakie musi spełniać czynnik nadrelaksacji, aby zapewnić zbieżność iteracji, przedstawione są przez J. LEGRASA [32].

Jako pierwsze przybliżenie przyjęto w fazie I zależność liniową

$$(4.7) \quad \varepsilon_1 = nN (E_a F_{spr})^{-1},$$

gdzie

$$(4.8) \quad F_{spr} = F_b + nF_{an}, \quad n = E_a E_b^{-1}.$$

Po uwzględnieniu założenia o braku oddziaływania betonu w rysie, funkcja (4.5) dla fazy II jest zawsze liniowa:

$$(4.9) \quad \varepsilon_{II} = N (E_a F_{an})^{-1}.$$

Wyprowadzone wzory dotyczą tylko przekrojów zarysowanych. Odkształcenia w rysie są większe od odkształceń w przekrojach między rysami, gdzie współpracuje także beton strefy rozciąganej. Zgodnie z zaleceniem CEB [33], średnia szerokość rozwarcia rys  $r$  może być traktowana jako iloczyn ich średniego rozstawu  $l_r$  i różnicy między średnim jednostkowym wydłużeniem zbrojenia  $\varepsilon_a^{sr}$ , a średnim jednostkowym wydłużeniem betonu  $\varepsilon_b^{sr}$ :

$$(4.10) \quad r = (\varepsilon_a^{sr} - \varepsilon_b^{sr}) l_r.$$

Średnie jednostkowe wydłużenie betonu jest na ogół znacznie mniejsze od wydłużeń jednostkowych stali i może być praktycznie pominięte [15 i 33]:

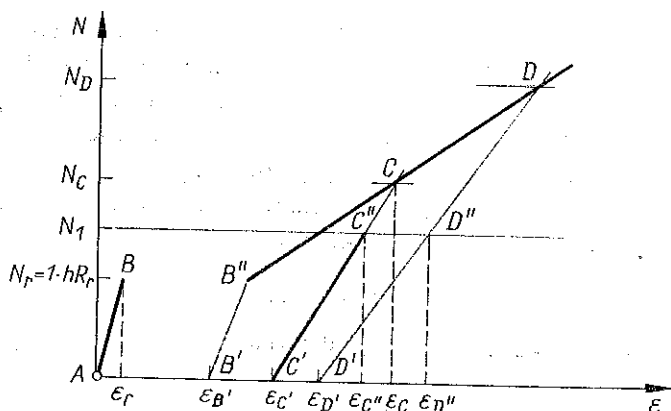
$$(4.11) \quad r \approx \varepsilon_a^{sr} l_r.$$

Wprowadzając za W. MURASZEWEM [34] współczynnik uśredniający  $\psi_a$  otrzymano

$$(4.12) \quad \varepsilon_a^{sr} = \sigma_a \psi_a E_a^{-1}.$$

Jeśli przyjąć sprężysto-plastyczną charakterystykę betonu  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , to równanie (4.5) będzie dla poszczególnych faz równaniem liniowym, którego wykres dla jednostkowej długości rysy przedstawia rys. 15. Wykres ten posłużyć może do obliczenia tarczy w pewnych cyklach obciążeń. W dalszych rozważaniach pominięto wpływy, jakie mogą wynikać z różnicy czasów działania obciążeń oraz wpływ odkształceń opóźnionych. Nie uwzględniono także tworzenia się pętli histerezy sprężystej w schemacie obciążenie-odciążenie.

Obciążenie konstrukcji przebiegało według schematu  $ABB''C$ . W poziomie  $BB''$  powstała rysa.



Rys. 15.

Dla obciążenia  $N_c$  odkształcenie całkowite wynosi  $\varepsilon_c$ . Po zdjęciu obciążenia (odciążenie) odkształcenie trwałe wyniesie  $\varepsilon_c'$ . Jeśli konstrukcja obciążona będzie do wielkości  $N_1$  tak, że  $N_1 < N_c$ , to odciążenie i obciążenie przebiegać będzie jak wykazują doświadczenia po prostej  $C'C$ . Odkształcenie całkowite  $\varepsilon_c''$  składać się będzie z odkształcenia sprężystego ( $\varepsilon_c'' - \varepsilon_c'$ ) i odkształcenia trwałego  $\varepsilon_c'$ . Dla charakterystyki pracy przekroju opisanej prostą  $C'C$  siłą przeciążenia będzie  $N_c$ , powodując powstanie w przekroju jednakowych odkształceń trwałych dla obciążenia w przedziale  $0 \leq N \leq N_c$ .

Jeśli dalej obciążyć konstrukcję według schematu  $C''CD$ , to odciążenie i obciążenie przebiegać będzie teraz po prostej  $D'D$  dla  $0 \leq N \leq N_D$ . Prosta ta nie będzie równoległa do prostej  $C'C$ . Odkształcenia trwałe wzrosną do wartości  $\varepsilon_{D'}$ , a odkształcenia sprężyste wyniosą ( $\varepsilon_{D''} - \varepsilon_{D'}$ ) dla poziomu obciążenia  $N_1$  (punkt  $D''$ ). Jeśli można będzie obliczyć odkształcenia trwałe i znana będzie zależność liniowa dla schematu obciążenie-odciążenie w obszarze  $ABB''DD''$ , uzależniona od maksymalnej siły przeciążenia  $N^P$  opisującej historię obciążenia, to zadanie można uprościć, zamiast drogi  $ABB''CC''$  przyjmując można prostszą zależność  $AC'C''$  składającą się z deformacji trwałych  $\varepsilon_c'$  i deformacji sprężystych ( $\varepsilon_c'' - \varepsilon_c'$ ) o danym prawie liniowym.

Zbrojenie współpracuje z betonem na zasadzie przyczepności. Jest ona naruszona w pobliżu rysy po osiągnięciu przez konstrukcję fazy II. Wynika to z różnicy wydłużeń względnych betonu i stali. Jednocześnie obszar tarczy zawarty między rysami można obliczać jak w fazie I. Jeśli zatem znana jest historia obciążenia ( $N^P$ ), to współczynnik  $\psi_a$  jednoznacznie określa stopień naruszenia przyczepności zbrojenia do betonu. Można w przybliżeniu wyliczyć deformacje trwałe i sprężyste. Zmniejszając w równaniu równowagi (4.5) siłę  $N$  o siłę wtórną  $N_w = N^P (1 - \psi_a)$ , wynikłą z pracy konstrukcji w schemacie obciążenie-odciążenie dla danej siły przeciążenia  $N^P$ , otrzymano

$$(4.13) \quad \varepsilon_a^{sr} = \psi_a N (E_n F_{an})^{-1} + (1 - \psi_a) N^P (E_a F_{an})^{-1},$$

gdzie

$$(4.14) \quad \psi_a = 1 - 0,7 h \cdot R_r (N^P)^{-1}.$$

Współczynnik  $\psi_a$  nie osiągnie praktycznie nigdy jedności, ponieważ zawsze w jakimś stopniu współpracować będzie zbrojenie z betonem na długości między rysami. Po odciążeniu odkształcenie w zbrojeniu nie zniknie, ponieważ przeciwdziała temu przyczepność zbrojenia do betonu. Gdyby przyczepność ta była całkowicie naruszona, to deformacje pozostające byłyby równe zero.

Jeśli dane jest rozmieszczenie rys, to ze wzoru (4.13) wyznaczyć można rozwarście rys w każdym punkcie przekroju zarysowanego:

$$(4.15) \quad r = r^0 + r^1 \sigma_{an},$$

gdzie  $r^0 = (1 - \psi_a) N^P l_r (E_a F_{an})^{-1}$  opisuje deformacje trwałe, a  $r^1 = \psi_a l_r E_a^{-1}$  deformacje sprężyste.

Praktycznie ustalenie funkcji rozwarścia rysy na jej długości odbywa się numerycznie przez obliczanie w odpowiedniej ilości punktów na rysie jej rozwarścia i zastosowanie



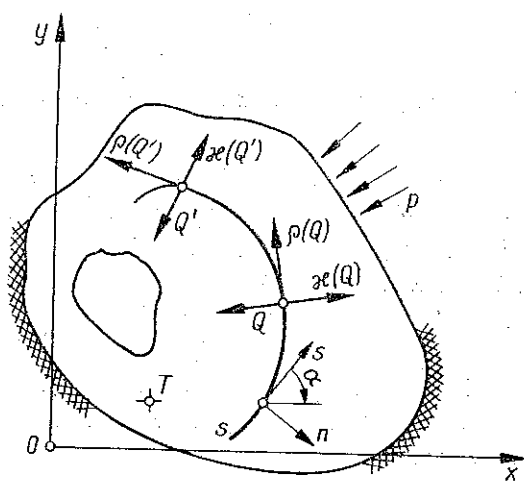
wanie optymalnej względnej aproksymacji jednostajnej funkcji za pomocą wielomianu potęgowego. Zakłada się zatem, że związek konstytutywny opisujący rozwarcie rysy w kierunku normalnym wyprowadzony z równania równowagi, dany jest w postaci:

$$(4.16) \quad r(s) = r^0(s) + r^1(s) \sigma_{nn}.$$

### 5. ROZWIĄZANIE TARCZY Z NIECIĄGLYM PRZEMIESZCZENIEM NORMALNYM W RYSIE

Do wyznaczenia przemieszczeń i naprężeń w tarczy zarysowanej wykrczystano funkcje Greena dla naprężeń i przemieszczeń tarczy sprężystej, otrzymane w punkcie 2. Zgodnie z założeniem funkcje te zbudowane zostały z całek szczególnych równania (2.1) tak, że poprawne są wzory określające skoki naprężeń i przemieszczeń przedstawione w punkcie 3.

Rozpatrzono zarysowaną tarczę, na konturze której dane są dowolne warunki brzegowe (rys. 16). Rysę przedstawia krzywa  $s$ .



Rys. 16

Zadanie sprowadzi się do wyznaczenia rozkładów sił stycznych  $\rho(Q)$  i rozkładów podwójnych sił normalnych do rysy  $\kappa(Q)$  dobranych tak, aby spełnione były warunki graniczne w rysie:

$$(5.1) \quad [u_n] = r(Q), \quad [\sigma_{sn}] = 0.$$

Wielkości  $\rho(Q)$  i  $\kappa(Q)$  określone są za pomocą funkcji Greena, spełniających automatycznie warunki brzegowe. Tak skonstruowane rozwiązanie zapewnia w efekcie końcowym łączne spełnienie warunków brzegowych na konturze tarczy i warunków granicznych w rysie. Jeśli  $r(Q)$  opisuje rozwarcie rysy w tarczy żelbetowej i przyjęte zostanie z warunku (4.16), to tak postawione zadanie modelować będzie żelbetową tarczę zarysowaną.

Jeśli w punkcie  $Q'$  działa jednostkowa siła skupiona styczna do  $s$ , to  $u_\alpha^{(s)}(T, Q')$  przedstawia składowe wektora przemieszczenia, a  $\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}(T, Q')$  składowe tensora naprężenia w punkcie  $T$ . Symbol  $(s)$  oznacza, że wielkości te otrzymywane są dla jednostkowej siły stycznej do rysy. Analogicznie  $u_\alpha^{(D)}(T, Q')$  i  $\sigma_{\alpha\beta}^{(D)}(T, Q')$  oznaczają odpowiednio składowe wektora przemieszczenia i tensora naprężenia wywołane działaniem jednostkowej podwójnej siły skupionej normalnej do rysy w punkcie  $T$  (oznacza to symbol  $(D)$ ).

Otrzymanie wektora przemieszczenia  $u$  i tensora naprężenia  $\sigma_{\alpha\beta}$  dla tarczy z daną wewnątrz jej obszaru rysą, możliwe jest na drodze superpozycji przemieszczeń i naprężeń wywołanych siłami  $\rho(Q')$  i  $\kappa(Q')$  oraz obciążeniem konturu:

$$(5.2) \quad u_\alpha(T) = \int_s \rho(Q') u_\alpha^{(s)}(T, Q') ds(Q') + \int_s \kappa(Q') u_\alpha^{(D)}(T, Q') ds(Q') + u_\alpha^0(T), \quad \alpha=1, 2,$$

$$(5.3) \quad \sigma_{\alpha\beta}(T) = \int_s \rho(Q') \sigma_{\alpha\beta}^{(s)}(T, Q') ds(Q') + \int_s \kappa(Q') \sigma_{\alpha\beta}^{(D)}(T, Q') ds(Q') + \sigma_{\alpha\beta}^0(T), \quad \alpha, \beta=1, 2,$$

gdzie  $u_\alpha^0(T)$  i  $\sigma_{\alpha\beta}^0(T)$  oznaczają przemieszczenie i naprężenia określone dla stanu sprężystego.

Równania (5.2) i (5.3) są osobliwymi równaniami całkowymi Fredholma I rodzaju. W równaniach tych nieznanymi funkcjami są  $\rho(Q')$  i  $\kappa(Q')$ .

Jeśli przyjąć, że jednostkowa siła podwójna działać będzie na różnicowej wielkości  $r(Q)$ , to wtedy obniżyć można rząd funkcji Greena o jeden i operować można dwiema siłami normalnymi do rysy, lecz przeciwnie skierowanymi. Okazuje się, że przy znajomości ciągłych funkcji  $\rho(Q')$  i  $\kappa(Q')$  oraz po wykorzystaniu definicji wartości głównej całki krzywoliniowej w sensie Cauchy'ego istnieje rozwiązanie równań (5.2) i (5.3). Otrzymać zatem można jednoznacznie składowe przemieszczeń i naprężeń w tarczy zarysowanej.

Aby wyznaczyć funkcję  $\rho(Q')$  i  $\kappa(Q')$ , we wzorach (3.17) i (3.18) uwzględniono wzory (4.16):

$$(5.4) \quad -\rho(Q) + \nu \kappa_{,s}(Q) = 0,$$

$$(5.5) \quad \kappa(Q) = \mu r^0(Q) + \mu r^1(Q) \sigma_{nn}(Q).$$

Wykorzystując w równaniu (5.5) wzór na naprężenia normalne do rysy (5.3) oraz wzór (5.4) uzyskano po pewnych elementarnych przekształceniach równanie różniczkowe-całkowe silnie osobliwe na niewiadomą wielkość  $\kappa(Q)$ :

$$(5.6) \quad \frac{1}{\mu} \kappa(Q) - r^1(Q) \left[ \nu \int_s \kappa_{,s}(Q') \sigma_{nn}^{(s)}(Q, Q') ds(Q') \right] + \int_s \kappa(Q') \sigma_{nn}^{(D)}(Q, Q') ds(Q') = r^0(Q) + r^1(Q) \sigma_{nn}^0(Q).$$

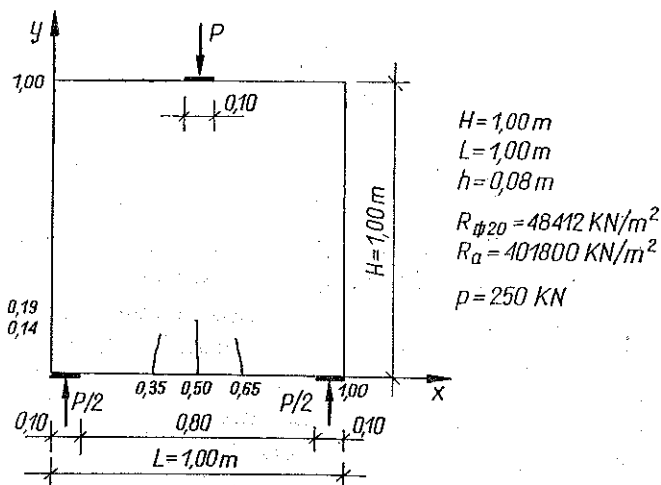
Rozwiązując równanie (5.6) otrzymać można szukany rozkład sił  $\kappa(Q)$ , a w efekcie i  $\rho(Q)$  obliczony z równania (5.4). Określenie przemieszczeń i naprężeń w tarczy z rysą odbywa się przez całkowanie znanych wielkości podcałkowych według wzorów (5.2) i (5.3).

Równanie (5.6) rozwiązano numerycznie metodą kolokacji spełniając warunki graniczne w rysie w skończonej liczbie punktów. Pierwszą pochodną funkcji  $\kappa(Q)$  określono za pomocą różnic centralnych w obliczanym punkcie. Analizując występujące w równaniu (5.6) osobliwości okazuje się, że istnieje jego rozwiązanie w sensie wartości głównej Cauchy'ego, podobnie jak miało to miejsce w przypadku funkcji Greena.

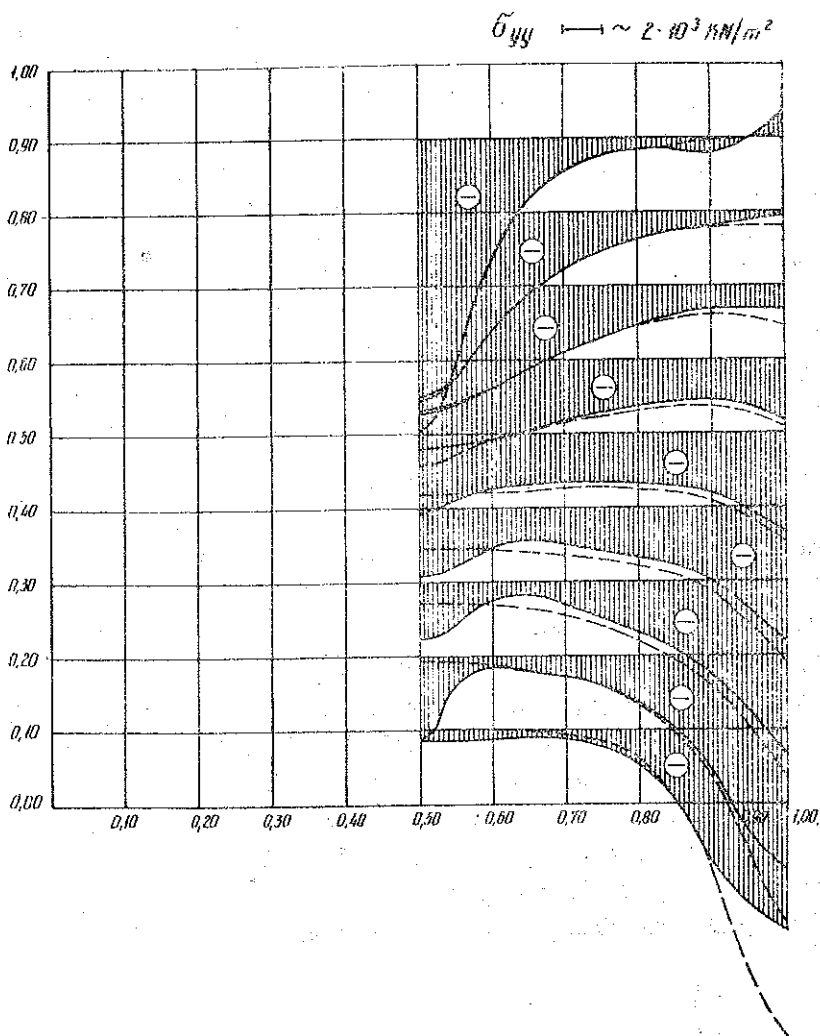
Przedstawiony algorytm posłużył do napisania programu na komputer serii ODRA-1300. Część składową tego programu stanowi program określający potrzebną funkcję Greena rozwiązywanej tarczy oraz procedura obliczania związku konstytutywnego  $r(Q)$ . Dzięki zastosowaniu dalszych procedur uzyskano możliwości wprowadzenia dowolnego kształtu konturu i rysy, dowolnego obciążenia i dowolnych warunków brzegowych. W wyniku rozwiązania drukowane są wielkości przemieszczeń i naprężeń w wybranych punktach tarczy.

Opisany program zastosowano do określenia naprężeń w żelbetowej tarczy kwadratowej swobodnie podpartej z trzema rysami.

Dane do obliczeń przyjęto na podstawie badań zamieszczonych przez N. KARPENKĘ [14], pomijając siły masowe. Tarcza zbrojona była siatką z prętów o średnicy 0,006 m i rozstawie 0,10 × 0,10 m. Kierunki zbrojenia ortogonalnej siatki odpowiadają kierunkom kartezjańskiego układu współrzędnych  $x, y$ . Rys. 17 przedstawia schemat statyczny tarczy i rozmieszczenie rys. Na rys. 18 i rys. 19 przedstawiono składowe tensora naprężenia w tarczy zarysowanej (linia ciągła) i porównano z rozwiązaniem sprężystym (linia przerywana). Pozwala to oszacować przegrupowanie



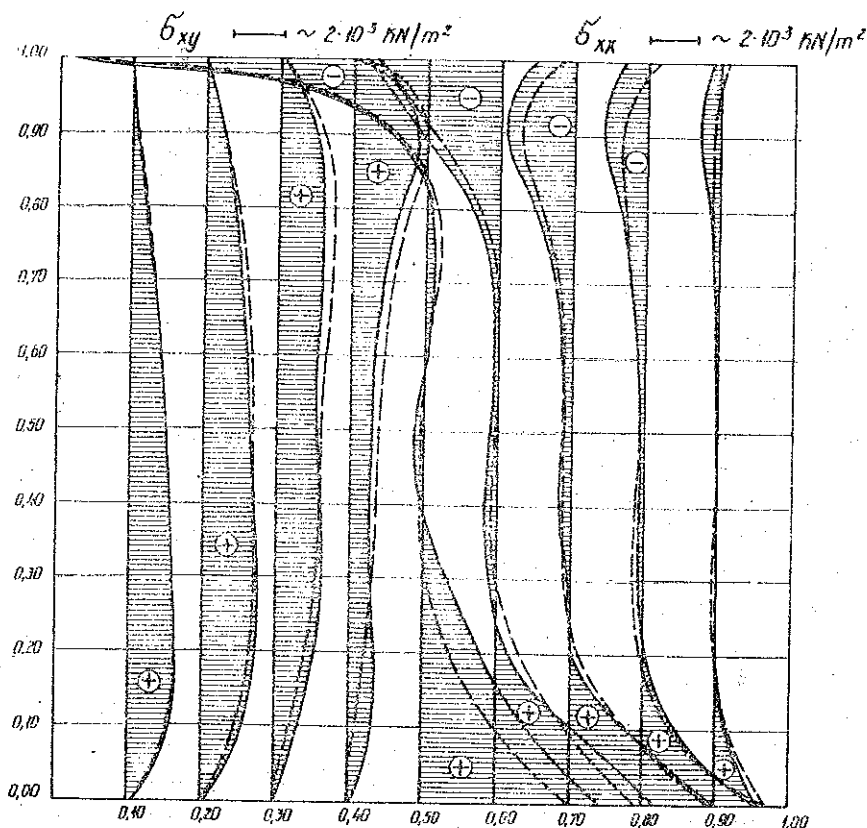
Rys. 17



Rys. 18

poła naprężeń w wybranych przekrojach tarczy zarysowanej w stosunku do rozwiązania bez rys.

Po zarysowaniu nastąpiła istotna redystrybucja pola sił wewnętrznych. Rysy występujące w tarczy mają długość większą niż wynikałoby to ze stanu sprężystego. W przekroju  $x=0,5$  m nastąpiło niewielkie zmniejszenie ramienia sił wewnętrznych. Wynika to ze wzrostu naprężeń ściskających i rozciągających w strefie przykrawędziowej. Wyliczenie sił w zbrojeniu w przekroju przez rysę odbywać się może przez całkowanie wykresu naprężeń tak, aby środek ciężkości odpowiedniego pola naprężeń pokrywał się ze środkiem ciężkości wkładek stalowych. Jeśli tarcza byłaby zbrojona tylko w poziomie krawędzi dolnej, jak miało to miejsce w badaniach E. KLINGROTH'A [19], to ramię sił wewnętrznych w przekroju  $x=0,5$  m ulegałoby



Rys. 19

zwiększeniu. W omawianym przykładzie celowe okazuje się układanie prętów zbrojenia tak, aby ich wypadkowa przechodziła w przybliżeniu przez środek ciężkości wykresu naprężeń rozciągających  $\sigma_m$  w rysie. Takie ułożenie zbrojenia spowodowałoby tylko nieznaczną zmianę ramienia sił wewnętrznych w tarczy zarysowanej, w porównaniu do ramienia sił w tarczy sprężystej. Wielkość przegrupowania naprężeń w tarczy zarysowanej zależy jednak od schematu statycznego i poziomu obciążenia. Dlatego też zalecenie to nie może być traktowane jako reguła, a każdy przypadek wymaga oddzielnej analizy. Czas obliczenia przedstawionego wyżej przykładu liczbowego wyniósł około 75 minut.

## 6. WNIOSKI

1. Otrzymanie naprężeń w żelbetowej tarczy zarysowanej możliwe było dzięki zastosowaniu oryginalnej metody wyznaczania funkcji Greena tarczy sprężystej. Funkcję tę napisano w znany sposób całkowy. Nowym elementem przedstawionego rozwiązania jest zastosowanie, danych w prostej zamkniętej postaci, całek szczególnych równania różniczkowego tarczy obciążonej w swoim obszarze siłą skupioną,

ako jąder omawianych równań całkowych. Pozwala to na uniwersalne napisanie funkcji Greena dla dowolnych konturów oraz łatwe ich numeryczne całkowanie. Opisana metoda znajdowania funkcji Greena za pomocą układów równań całkowych wydawać się może nie gorsza od metody elementów skończonych. Dyskretyzacja dotyczy tylko konturu, stąd mniejsza liczba stopni swobody w zadaniu i mniejsze układy równań na komputery. Ponadto rozwiązanie w obszarze tarczy spełnia dokładnie równanie różniczkowe (żądane osobliwości w miejscu działania siły skupionej), natomiast w elementach skończonych trudno dobrać funkcję kształtu tak, aby warunek ten był spełniony.

Całe rozumowanie dotyczące funkcji Greena pozostaje bez zmian w przypadku, kiedy tarcza stanowi obszar wielospójny, w którym na brzegach określone są odpowiednie warunki statyczne lub kinematyczne. Wtedy  $m$  (2.4), (2.5) oznacza sumę krzywych stanowiących brzeg tego obszaru i skierowanych względem niego dodatnio. Aby otrzymać jednoznaczne rozwiązanie, należy sprawdzić przemieszczenia przez spełnienie równania nierozdzielności odkształceń.

2. Opracowany algorytm zarysowanych tarcz żelbetowych może mieć liczne zastosowania. Można podać następujące przykłady: 1) Analiza przemieszczeń i naprężeń w konstrukcjach poddanych złożonym cyklom obciążeń. 2) Określenie przemieszczeń i naprężeń dla tarczy, w której beton zmienia swoje własności w czasie. Odbywać się to może przez wprowadzenie do związku konstytutywnego odpowiedniej zależności  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  dla ustalonego parametru czasu. 3) Opracowanie wyników badań doświadczalnych dla pomierzonej zależności  $r(s)$  — z możliwością rozdzielenia deformacji trwałych i sprężystych oraz ich wpływu na wynik.

3. Przedstawione metody obliczania funkcji Greena i konstrukcji zarysowanych odznaczają się łatwością uogólnień i dalszych uściśleń. Oto przykłady: 1) Cały algorytm nie ulegnie zmianie, jeżeli tarcza jest anizotropowa. Do obliczeń przyjęć należy odpowiednie prawo sprężystości. 2) Możliwe jest znalezienie naprężeń i przemieszczeń w tarczy z uwzględnieniem dowolnego rozkładu sił masowych w jej płaszczyźnie. 3) Opisany sposób rozwiązania nadaje się do analizy tarcz z defektami wykonanych z innych materiałów, dla których znane są charakterystyki  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ .

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. K. WOLF, *Zur Bruchtheorie von A. Griffith*, Zeitschr. f. angew. Mathem. u. Mech., 3, 107–112, 1923.
2. I. SNEDDON, *Zagadnienie szczelin w matematycznej teorii sprężystości*, PAN, Warszawa 1962.
3. N. MUSCHELIŠVILI, *Niekotoryje osnovanye zadači matematičeskoj teorii uprugosti*, Moskva 1966.
4. J. UFLAND, *Integralnyje preobrazovanija v zadačach teorii uprugosti*, Moskva 1963.
5. H. ZORSKI, *Theory of discrete defects*, Arch. Mech., 18, 3, 301–372, 1966.
6. E. KOSSECKA, *Mathematical theory of defects, Part I, Statics*, Arch. Mech., 26, 6, 995–1010, 1974.
7. E. KOSSECKA, *Defects as surface distributions of double forces*, Arch. Mech., 23, 4, 481–494, 1971.
8. E. KOSSECKA, *Surface distributions of double forces*, Arch. Mech., 23, 3, 313–328, 1971.
9. M. MATCZYŃSKI, *Matematyczny model szczelin w ośrodku sprężystym*, IPPT PAN, Warszawa 1974.

10. M. MATCZYŃSKI, *The static problem of a crack in an elastic medium*, Arch. Mech., 22, 4, 439-478, 1970.
11. J. GRYCZ, *On the compability conditions in the classical theory of elasticity*, Arch. Mech., 19, 6, 883-891, 1967.
12. E. KOSSECKA, H. SCHÖPF, *On the uniqueness problem of a dislocation field*, Arch. Mech., 24, 1, 27-34, 1972.
13. F. LEONHARDT, E. MÖNNING, *Vorlesungen über Massivbau*, 2, Springer, Berlin 1975.
14. N. KARPIENKO, A. GUREVIČ, *O rasčete železobetonných balok — stenok s učetom treščin*, Stroit. Mech. i Rasčet Sooruzh., 1, 22-24, 1974.
15. N. KARPIENKO, *Teoria deformirovanija železobetona s treščinami*, Stroizdat, Moskva 1976.
16. L. CEDOLIN, S. DEI POLI, B. S. KAPUR, *Finite element analysis of reinforced concrete deep beams*, Construzioni in cemento armato, 3-13, Politecnico di Milano, Italcementi 1977.
17. A. BORCZ, *Podstawy teorii narysowanych płyt żelbetowych TNEB*, Warszawa 1963.
18. E. JAGER, *Applications of distributions in mathematical physics*, Matematish Centrum, Amsterdam 1964.
19. H. KLINGROTH, *Versuche an Stahlbetontragwänden und deren Auswertung*, Beton u. Eisen, 91, 91-97, 1942, 108, str. 108-115, 130, 130-136.
20. H. SCHÜTT, *Über das Tragvermögen wandartiger Stahlbetonträger*, Beon u. Stahlbeton, 10, 220-224, 1956.
21. F. LEONHARDT, *Poutres-cloisons structures planes chargées parallelement a leur plan moyen*, Annales de l'Institut Tech. du Batim. et des Travaux Publics, 265, Série Béton, Béton Arme, 109, 113-164 1970.
22. T. GODYCKI-ĆWIRKO, *Żelbetowe belki ściány w świetle dotychczasowych badań na modelach żelbetowych*, Cz. 2, Badania własne, Inż i Bud, 1, 5-13.
23. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, t. 3, PWN, Warszawa 1966.
24. S. ŁUKASIEWICZ, *Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach*, PWN, Warszawa 1976.
25. H. ZORSKI, *Plates with discontinuous supports*, Arch. Mech., 10, 3, 271-313, 1958.
26. J. ŁEMPICKI, *Teoria zginania belki żelbetowej statycznie niewyznaczalnej*, Arch. Inż. Łąd., 2, 3, 205-280, 1956.
27. J. ŁEMPICKI, *Teoria zginania belek żelbetowych statycznie niewyznaczalnych*, PWN, Warszawa 1958.
28. B. BUKOWSKI, *Technologia betonów i zapraw LBB*, Warszawa 1947.
29. T. SZULCZYŃSKI, *Zależność między naprężeniami i odkształceniami betonu*, Arch. Inż. Łąd., 20, 4, 629-633, 1974.
30. A. MITZEL, *Reologia betonu*, Arkady, Warszawa 1972.
31. C. RASCH, *Spannungs-dehnungslinie des Betons und Spannungsverteilung in der Biegedruckzone bei Konstanter Dehngeschwindigkeit*, DAFStb, 153, 1962.
32. J. LEGRAS, *Praktyczne metody analizy numerycznej*, WNT, Warszawa 1974.
33. EUROPEJSKI KOMITET BETONU — CEB, *Międzynarodowe zalecenia obliczania i wykonywania konstrukcji z betonu*, Arkady, Warszawa 1973.
34. V. MURAŠEV, *Treščinoustojčivost, žestkost i pročnost železobetona*, Mašstrojizdat, Moskva 1950.

## Резюме

МЕТОД ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ  
В ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЗАРИСОВАННЫХ БАЛКО-СТЕНКАХ

Представлен способ определения напряжений и перемещений в железобетонных зарисованных балко-стенках. Рассуждения проведены в классе разрывных функций. Получена функция Грина упругой балко-стенки для произвольной геометрии контура, однородных разрывных граничных условий и нагрузки. Эта функция описана при помощи системы сильно сингулярных интегральных уравнений, в которых универсальными ядрами являются, данные

в замкнутом виде, частные интегралы дифференциального уравнения балко-стенки нагруженной в своей области сосредоточенной силой. Используя теорию дистрибуций, теорию потенциалов и функцию Грина, сформулированы граничные условия в риске, заданные как условия Бюргерса для дислокаций. Напряжения и перемещения в зарисованной балко-стенке определены при помощи сингулярных интегральных уравнений, которые решены численным образом. Помещены числовые примеры.

#### SUMMARY

#### METHOD OF THEORETICAL DETERMINATION OF STRESSES IN REINFORCED CONCRETE PLATES WITH CRACKS

The method of determining the stresses and displacements in cracked reinforced concrete plates is given. The solutions are sought for in the class of discontinuous functions. Green functions are derived for an arbitrary contour geometry, discontinuous boundary conditions and uniform loads. The problem is formulated in terms of a system of singular integral equations the kernels of which are closed-form particular integrals of the differential equation of a plate loaded in its plane by a concentrated force. Using the theory of distributions, potential theory and the Green function, the boundary conditions at the crack are formulated as the Burgers conditions for a dislocation. The stresses and displacements in a cracked plate are determined by means of the singular integral equations solved numerically. Numerical examples are given.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 30 stycznia 1979 r.*