

ANALIZA LOSOWYCH DRGAŃ UPROSZCZONEGO MODELU RAMY POJAZDU

MAREK PIETRZAKOWSKI (WARSZAWA)

Praca zawiera analizę stochastycznych drgań układu hybrydowego będącego uproszczonym modelem ramy pojazdu. Badany układ stanowi pręt swobodnie podparty na dwóch dyskretnych elementach sprężysto-lepkich, których pionowe przemieszczenia są stacjonarnymi, normalnymi procesami losowymi o znanej gęstości widmowej. W sposób ścisły wyznaczono przepustowości widmowe układu, a następnie funkcje charakterystyczne losowego pola ugięć i momentów gnących pręta. Wyniki przedstawiono w formie wykresów.

1. WSTĘP

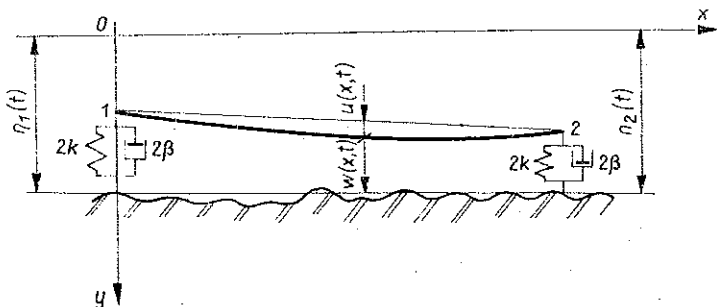
Na ogół w pracach dotyczących drgań pojazdu autorzy przyjmują dyskretny układ zastępczy rzadko uwzględniając wpływ sprężystości ramy pojazdu, a jeśli tak, to pomijając drgania elementów ramy [1, 2 i 3]. W uzasadnieniu podaje się fakt, że częstości własne elementów konstrukcyjnych pojazdu znacznie przewyższają częstości oddziaływania drogi. O ile postępowanie takie wydaje się poprawne odnośnie modeli samochodów osobowych i innych pojazdów o zwartej konstrukcji, o tyle w przypadku pojazdów specjalnych o dużym rozstawie osi i stosunkowo małej sztywności ramy (przyczepy niskopodłogowe, naczepy kontenerowe, smukłe elementy konstrukcji przewożone na zestawach jezdnych) niezbędne jest, dla pełnej analizy dynamicznej układu, stworzenie schematu dynamicznego zawierającego elementy ciągłe. Tylko wówczas można ocenić rzeczywisty stan naprężeń w badanej konstrukcji. W analizie drgań pojazdu poruszającego się po drodze wskazane jest również uwzględnienie losowego charakteru wymuszenia.

Pewną próbą rozwiązania problemu jest praca [4]. W pracy tej przeprowadzono analizę losowych drgań pręta podpartego na dyskretnych elementach sprężysto-lepkich, przy kinematycznym wymuszeniu stacjonarnym, normalnym procesem stochastycznym. W celu uproszczenia analizy zastąpiono warunki brzegowe wynikające z oddziaływania podpór na końce pręta warunkami geometrycznymi, które określono zakładając nieskończoną sztywność pręta i redukując jego masę do środka ciężkości. Ze względu na powyższe uproszczenia pracę [4] należy traktować jako tzw. przybliżenie zerowe rozpatrywanego zagadnienia.

Kolejnym krokiem jest rozwiązanie analogicznego zadania bez tego typu założeń upraszczających.

2. OPIS UKŁADU

Rozpatrujemy drgania poprzeczne jednorodnego, pryzmatycznego pręta o przekroju A , długości l , wykonanego z materiału o gęstości ρ i module sprężystości E . Pręt podparty jest na elementach sprężysto-lepkich będących uproszczonym modelem zawieszenia (rys. 1).



Rys. 1

Dwie jednakowe podpory charakteryzuje sztywność k i współczynnik tłumienia β . Ruch układu wymuszają pionowe przemieszczenia podpór $\eta_1(t)$ i $\eta_2(t)$, które zgodnie ze stosowanym stochastycznym modelem nierówności drogi są stacjonarnymi, normalnymi procesami losowymi o znanej funkcji gęstości widmowej. Oddziaływanie drogi na przednie i tylne zawieszenie jest przesunięte w czasie względem siebie o wielkość T uzależnioną od prędkości jazdy i odległości między osiami pojazdu

3. PRZEPUSTOWOŚĆ WIDMOWA UGIĘĆ PRĘTA

Uwzględniając tłumienie w materiale pręta za pomocą modelu Voigta otrzymujemy równanie drgań poprzecznych w bezwładnościowym układzie odniesienia Oxy

$$(3.1) \quad a^2 \left[\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} \right] + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad x \in [0, l].$$

W równaniu tym wielkość a określona jest wzorem $a^2 = \frac{EJ}{\rho A}$, α jest współczynnikiem tłumienia wewnętrznego.

Rozwiązanie równania (3.1) spełnia zerowe warunki początkowe oraz, w przypadku swobodnego podparcia pręta, następujące warunki brzegowe:

$$(3.2) \quad \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right|_{x=0} = \frac{2}{EJ} \{ [\eta(t) - y(0, t)] k + [\dot{\eta}(t) - \dot{y}(0, t)] \beta \},$$

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right|_{x=l} = -\frac{2}{EJ} \{ [\eta(t-T) - y(l, t)] k + [\dot{\eta}(t-T) - \dot{y}(l, t)] \beta \},$$

gdzie oznaczono $\eta(t) = \eta_1(t)$, $\eta(t-T) = \eta_2(t)$.

Dokonyjemy zmiany układu odniesienia podstawiając

$$(3.3) \quad y(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \eta(t) + \frac{x}{l} \eta(t-T) + w(x, t).$$

Otrzymujemy nową postać równania ruchu (3.1)

$$(3.4) \quad a^2 \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left(\frac{x}{l} - 1 \right) \ddot{\eta}(t) - \frac{x}{l} \ddot{\eta}(t-T)$$

i warunków brzegowych (3.2)

$$(3.5) \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right|_{x=0} = -\frac{2}{EJ} [w(0, t)k + \dot{w}(0, t)\beta],$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right|_{x=l} = \frac{2}{EJ} [w(l, t)k + \dot{w}(l, t)\beta].$$

Wykonajmy transformację Laplace'a równania (3.4) i warunków brzegowych (3.5) przyjmując zerowe warunki początkowe funkcji wymuszającej $\eta(0) = \dot{\eta}(0) = 0$:

$$(3.6) \quad a^2(s) \frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} + s^2 \bar{w} = \left[\frac{x}{l} (1 - e^{-Ts}) - 1 \right] s^2 \bar{\eta}(s),$$

$$(3.7) \quad \left. \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^3 \bar{w}}{dx^3} \right|_{x=0} = -\frac{2}{EJ} \bar{w}(0, s) (k + s\beta),$$

$$\left. \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{d^3 \bar{w}}{dx^3} \right|_{x=l} = \frac{2}{EJ} \bar{w}(l, s) (k + s\beta).$$

Wprowadziliśmy w tych wzorach następujące oznaczenia:

$$\bar{w}(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} w(x, t) dt,$$

$$\bar{\eta}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \eta(t) dt,$$

$$a^2(s) = a^2 (1 + \alpha s).$$

Rozwiązanie równania (3.6) jest sumą rozwiązania równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego. Ponieważ równanie charakterystyczne

$$(3.8) \quad r^4 + 4p^4 = 0,$$

gdzie wielkość p określona jest wzorem

$$(3.9) \quad p^4 = \frac{1}{4} \frac{s^2}{a^2(s)},$$

ma cztery pierwiastki parami sprzężone

$$r_{1,2} = p(1 \pm i), \quad r_{3,4} = -p(1 \pm i),$$

przeto rozwiązanie ogólne rozwiązania jednorodnego przedstawimy w postaci

$$(3.10) \quad \bar{w}_1(x, s) = e^{px} (C_1 \cos px + C_2 \sin px) + e^{-px} (C_3 \sin px + C_4 \cos px).$$

Wielkości C_1, C_2, C_3, C_4 , funkcje parametru s , można wyznaczyć z warunków brzegowych.

Uwzględniając specjalną postać prawej strony równania niejednorodnego (wielomian pierwszego rzędu względem x) łatwo, sposobem algebraicznym, znajdujemy rozwiązanie szczególne

$$(3.11) \quad \bar{w}_2(x, s) = \bar{\eta}(s) \left[(1 - e^{-Ts}) \frac{x}{l} - 1 \right].$$

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania (3.6)

$$(3.12) \quad \bar{w}(x, s) = e^{px} (C_1 \cos px + C_2 \sin px) + e^{-px} (C_3 \sin px + C_4 \cos px) + \left[(1 - e^{-Ts}) \frac{x}{l} - 1 \right] \bar{\eta}(s).$$

Podstawiając rozwiązanie (3.12) do warunków brzegowych (3.7) tworzymy układ równań algebraicznych względem nieznanymi wielkości C_1, C_2, C_3 i C_4 :

$$p^2 C_2 - p^2 C_3 = 0,$$

$$\left[-\frac{1}{EJ} (k + s\beta) + p^3 \right] C_1 - p^3 C_2 - p^3 C_3 + \left[-\frac{1}{EJ} (k + s\beta) - p^3 \right] C_4 = -\frac{k + s\beta}{EJ} \bar{\eta}(s),$$

$$(3.13) \quad -p^2 e^{pl} \sin pl C_1 + p^2 e^{pl} \cos pl C_2 - p^2 e^{-pl} \cos pl C_3 + p^2 e^{-pl} \sin pl C_4 = 0,$$

$$\left[\frac{k + s\beta}{EJ} \cos pl + p^3 (\sin pl + \cos pl) \right] e^{pl} C_1 + \left[\frac{k + s\beta}{EJ} \sin pl - p^3 (\cos pl - \sin pl) \right] e^{pl} C_2 + \left[\frac{k + s\beta}{EJ} \sin pl - p^3 (\cos pl + \sin pl) \right] e^{-pl} C_3 + \left[\frac{k + s\beta}{EJ} \cos pl - p^3 (\cos pl - \sin pl) \right] e^{-pl} C_4 = \frac{k + s\beta}{EJ} e^{-Ts} \bar{\eta}(s).$$

Rozwiązując układ równań (3.13) wyznaczamy następujące funkcje:

$$(3.14) \quad C_1(s) = \frac{\bar{\eta}(s)}{D(s)} \left[-\frac{k + s\beta}{EJ} \left\{ p^3 (1 - \sin 2pl) - \frac{k + s\beta}{EJ} \cos 2pl - \left[p^3 - \frac{k + s\beta}{EJ} \right] e^{-2pl} + 2e^{-Ts} \left[-p^3 e^{-pl} \sin pl + \left(p^3 + \frac{k + s\beta}{EJ} \right) \cos pl \operatorname{sh} pl \right] \right\} \right];$$

$$C_2(s) = C_3(s) = \frac{2\bar{\eta}(s)}{D(s)} p^4 \frac{k + s\beta}{EJ} \sin pl \left[\frac{k + s\beta}{EJ} (\cos pl - e^{-Ts} \operatorname{ch} pl) + p^3 (\sin pl - e^{-Ts} \operatorname{sh} pl) \right],$$

$$(3.14) \quad C_4(s) = \frac{\bar{\eta}(s)}{D(s)} \left[-\frac{k+s\beta}{EJ} \left\{ -p^3(1+\sin 2pl) - \frac{k+s\beta}{EJ} \cos 2pl + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(p^3 + \frac{k+s\beta}{EJ} \right) e^{2pl} + 2e^{-Ts} \left[-p^3 e^{pl} \sin pl + \left(p^3 - \frac{k+s\beta}{EJ} \right) \cos pl \operatorname{sh} pl \right] \right\} \right],$$

gdzie

$$D(s) = -2 \left\{ \left[\left(\frac{k+s\beta}{EJ} \right)^2 + p^6 \right] \operatorname{ch} 2pl + 2p^3 \frac{k+s\beta}{EJ} (\operatorname{sh} 2pl - \sin 2pl) - \right. \\ \left. - \left(\frac{k+s\beta}{EJ} \right)^2 \cos 2pl - p^6 (2 \sin^2 pl + 1) \right\}.$$

Na podstawie rozwiązania (3.12) oraz związków (3.14) podstawiając zamiast s iloczyn $i\omega$ znajdujemy przepustowość widmową $H_w(x, \omega)$:

$$(3.15) \quad H_w(x, \omega) = \frac{w(x, \omega)}{\eta(\omega)} = [e^{px} G_1(\omega) + e^{-px} G_4(\omega)] \cos px + \\ + 2 G_2(\omega) \sin px \operatorname{ch} px + (1 - e^{-i\omega T}) \frac{x}{l} - 1,$$

gdzie $G_1(\omega)$, $G_2(\omega)$ i $G_4(\omega)$ są funkcjami zmiennej zespolonej określonymi następująco:

$$G_1(\omega) = \frac{C_1(\omega)}{\eta(\omega)}, \quad G_2(\omega) = \frac{C_2(\omega)}{\eta(\omega)} = \frac{C_3(\omega)}{\eta(\omega)}, \quad G_4(\omega) = \frac{C_4(\omega)}{\eta(\omega)}.$$

Przepustowość widmowa $H_w(x, \omega)$ określa drgania pręta w układzie odniesienia związanym z powierzchnią drogi. Zbadajmy, jakie są odkształcenia pręta. Ugięcie dowolnego przekroju pręta w chwili t uzależnione jest od przemieszczenia $w(x, t)$ w następujący sposób:

$$(3.16) \quad u(x, t) = w(x, t) - \left(1 - \frac{x}{l} \right) w(0, t) - \frac{x}{l} w(l, t).$$

A więc, przepustowość widmowa ugięć $H_u(x, \omega)$ ma postać

$$(3.17) \quad H_u(x, \omega) = \frac{u(x, \omega)}{\eta(\omega)} = H_w(x, \omega) - \left(1 - \frac{x}{l} \right) H_{w1}(\omega) - \frac{x}{l} H_{w2}(\omega),$$

gdzie oznaczono

$$H_{w1}(\omega) = H_w(0, \omega), \quad H_{w2}(\omega) = H_w(l, \omega).$$

4. PRZEPUSTOWOŚĆ WIDMOWA MOMENTÓW GNĄCYCH

Odształceniu pręta towarzyszą siły wewnętrzne. Decydujący wpływ na wytrzymałość badanej konstrukcji ma moment gnący $M(x, t)$. Korzystając ze wzoru

$$M(x, t) = -EJ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

oraz związku (3.16) wyznaczamy przepustowość widmową $H_M(x, \omega)$:

$$(4.1) \quad H_M(x, \omega) = -EJ \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_w(x, \omega).$$

Po podstawieniu funkcji (3.15) i wykonaniu różniczkowania otrzymujemy postać obliczeniową przepustowości widmowej momentów gnących:

$$(4.2) \quad H_M(x, \omega) = 2EJp^2 [(G_1(\omega) e^{px} - G_4(\omega) e^{-px}] \sin px - 2G_2(\omega) \cos px \operatorname{sh} px),$$

5. FUNKCJE CHARAKTERYZUJĄCE REAKCJĘ UKŁADU

Na wstępie przyjęliśmy, że wymuszenie $\eta(t)$ jest stacjonarnym, normalnym procesem stochastycznym o zerowej wartości średniej. Załóżmy następującą postać gęstości widmowej tego procesu:

$$(5.1) \quad S_\eta(\omega) = \frac{\sigma_2^2 \lambda}{\pi} \frac{b^2 + \omega^2}{\omega^4 + 2A\omega^2 + b^4},$$

w której oznaczono $A = \lambda^2 - \delta^2$, $b^2 = \lambda^2 + \delta^2$, λ , δ są współczynnikami uwzględniającymi charakter nierówności drogi i prędkości ruchu pojazdu v :

$$\lambda = \lambda_1 v, \quad \delta = \delta_1 v$$

oraz σ_2^2 jest wariancją wzdłużnego profilu drogi.

Odpowiedź układu, będącą losowym polem ugięć i momentów gnących pręta, charakteryzują funkcje gęstości widmowej lub funkcje korelacji, które mogą być napisane w następującej ogólnej postaci:

$$(5.2) \quad S_r(x_1, x_2, \omega) = H_r^*(x_1, \omega) H_r(x_2, \omega) S_\eta(\omega), \quad r = w, u, M,$$

$$(5.3) \quad K_r(x_1, x_2, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_r(x_1, x_2, \omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad r = w, u, M,$$

gdzie $H^*(x, \omega)$ oznacza funkcję zespoloną sprzężoną z $H(x, \omega)$. Analityczne przedstawienie charakterystyk badanych procesów, ze względu na skomplikowaną postać wyrażen określających przepustowości widmowe układu, a tym samym dużą pracochłonność, nie jest wskazane. Wygodnie jest dla wybranych przykładów liczbowych wykonać obliczenia na komputerze przedstawiając wyniki w formie wykresów.

6. PRZYKŁAD LICZBOWY

Do obliczeń przyjęto następujące wartości parametrów charakteryzujących układ:
parametry stałe

$$l = 12 \text{ [m]},$$

$$J = 5 \cdot 10^{-5} \text{ [m}^4\text{]},$$

$$A = 5 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^2\text{]},$$

$$k = 5 \cdot 10^5 \text{ [N/m]},$$

$$\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{]},$$

$$\beta = 1,5 \cdot 10^3 \text{ Ns/m},$$

$$E = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ [h/m}^2\text{]};$$

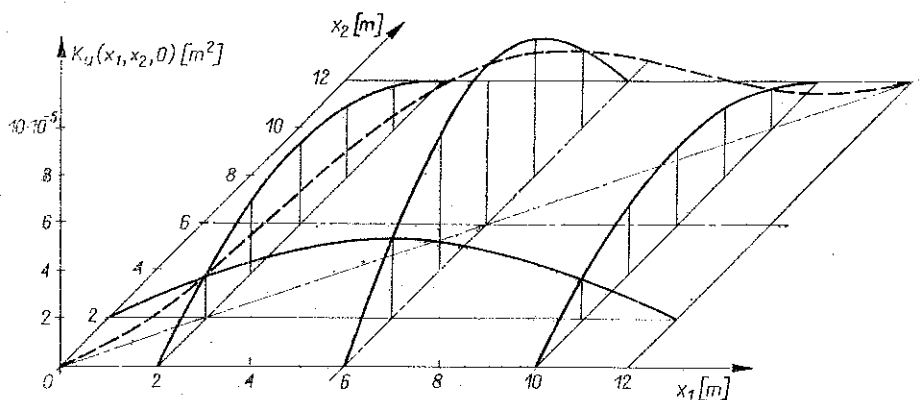
parametry zmienne

$$\alpha = 0,005; 0,01; 0,015; 0,02 \text{ [s];}$$

$$v = 3; 5; 8 \text{ [m/s].}$$

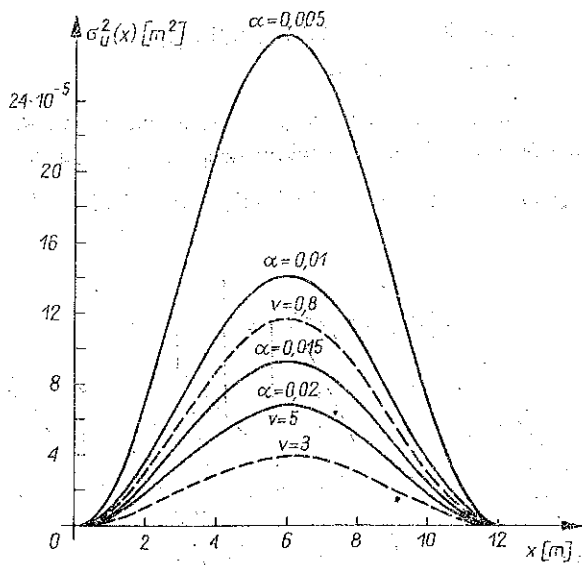
Dane dotyczące procesu nierówności drogi ustalono na podstawie pracy [5]. Dla drogi gruntowej współczynniki gęstości widmowej $S_n(\omega)$ mają wartości

$$\sigma_n = 0,05 \text{ [m]; } \lambda_1 = 0,21 \text{ [1/s]; } \delta_1 = 0,78 \text{ [1/s].}$$

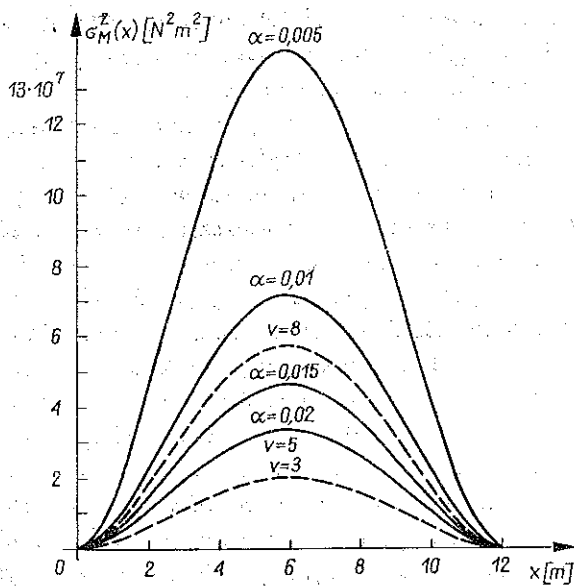


Rys. 2

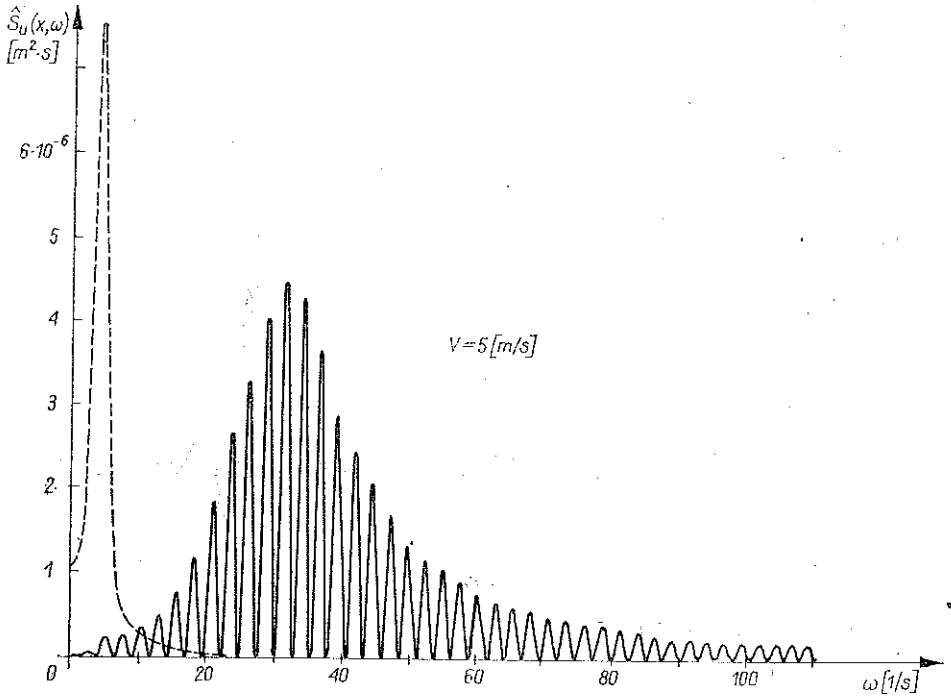
Wyniki obliczeń zilustrowano wykresami. Rys. 2 przedstawia wykres współczynnika korelacji losowego pola ugięć $K_u(x_1, x_2, 0)$. Przekrój wykresu płaszczyzną $x_1 = x_2$ daje obraz wariancji $\sigma_u^2(x)$ w zależności od współrzędnej x długości pręta i. Wpływ współczynnika tłumienia wewnętrznego α oraz prędkości jazdy v na wariancję ugięć $\sigma_u^2(x)$ i momentów gnących $\sigma_M^2(x)$ pokazują wykresy na rys. 3 i rys. 4. Na rysunkach tych linią ciągłą zbudowano wykresy odpowiadające prędkości jazdy równej $v = 5 \text{ [m/s]}$ i tłumieniu określone współczynnikiem α o następujących wartościach: $\alpha = 0,005; 0,01; 0,015; 0,02 \text{ [s]}$, a linią przerywaną — wykresy dla tłumienia wewnętrznego — $\alpha = 0,02 \text{ [s]}$ i prędkości jazdy — $v = 3, 8 \text{ [m/s]}$. Zgodnie z przewidywaniem wzrost współczynnika tłumienia wewnętrznego powoduje zmniejszenie wartości wariancji, natomiast przy większej prędkości jazdy obserwujemy zjawisko odwrotne. Zmiany wariancji są bardziej widoczne dla środkowego przekroju pręta. Interesujące są wykresy jednostronnej gęstości widmowej ugięć $S_u(x, \omega)$ (rys. 5 i rys. 6) zbudowane dla środkowego przekroju pręta dla dwóch prędkości jazdy $v = 5 \text{ [m/s]}$ i $v = 8 \text{ [m/s]}$. Na rysunkach tych pokazano również wykresy funkcji gęstości widmowej wymuszenia $S_n(\omega)$ (linia przerywana). Gęstość widmowa procesu ugięć wybranego przekroju pręta ma charakter pulsujący o okresie pulsacji równym częstotliwości opóźnień $\nu = 2\pi/T = 2\pi v/l$ oraz maksymalnych wartościach amplitud przy częstotliwości ω zbliżonej do pierwszej częstotliwości drgań własnych pręta równej $35,2 \text{ [1/s]}$. Wnioski te potwierdzają analogiczne wykresy funkcji korelacyjnej (rys. 7 i rys. 8). Wykresy te mają wyraźnie oscylacyjny charakter, przy czym skorelowanie między wartościami procesu zdecydowanie wzrasta po czasie τ równym opóźnieniu T procesów wymuszających.



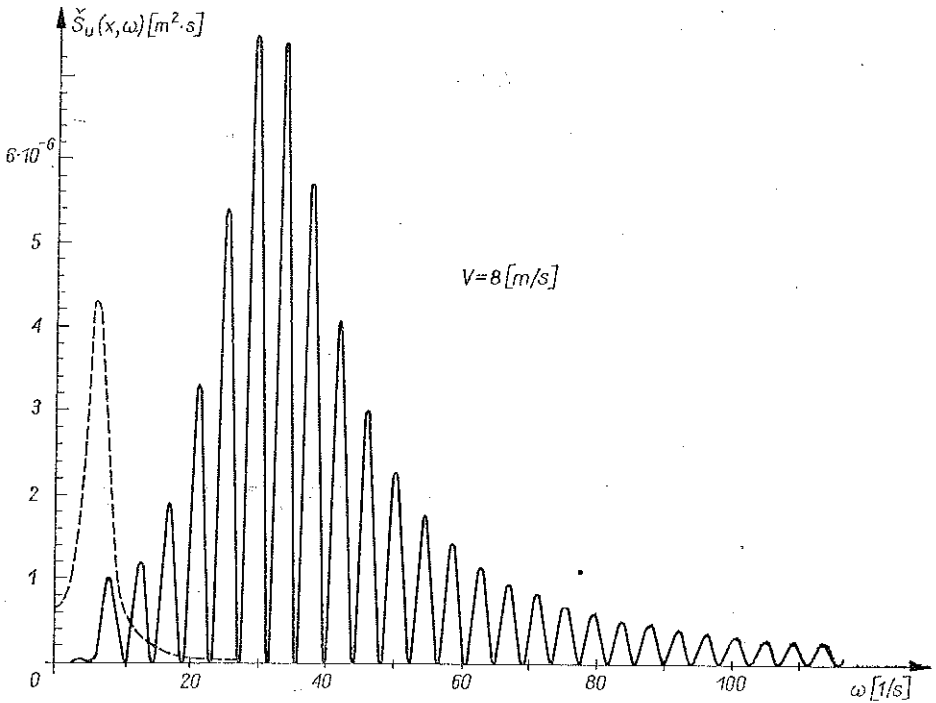
Rys. 3



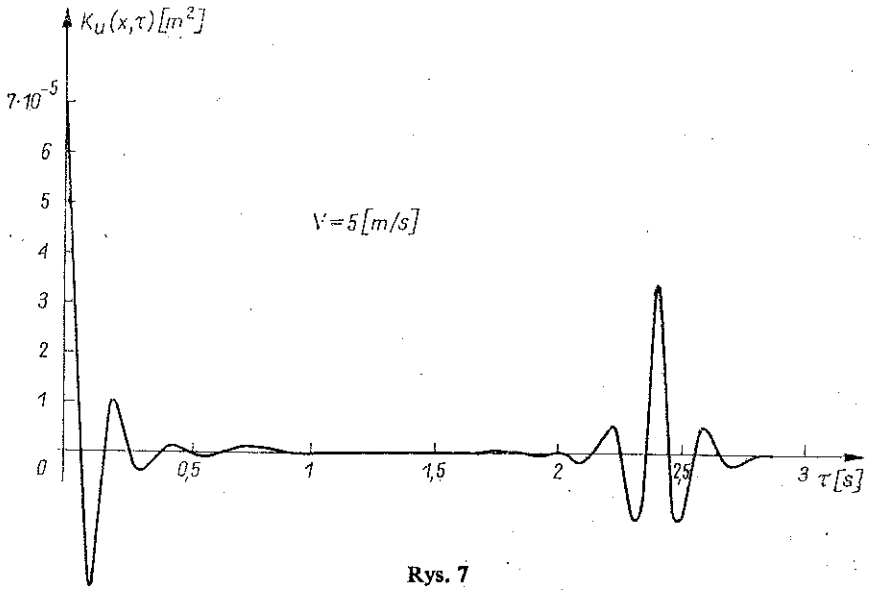
Rys. 4



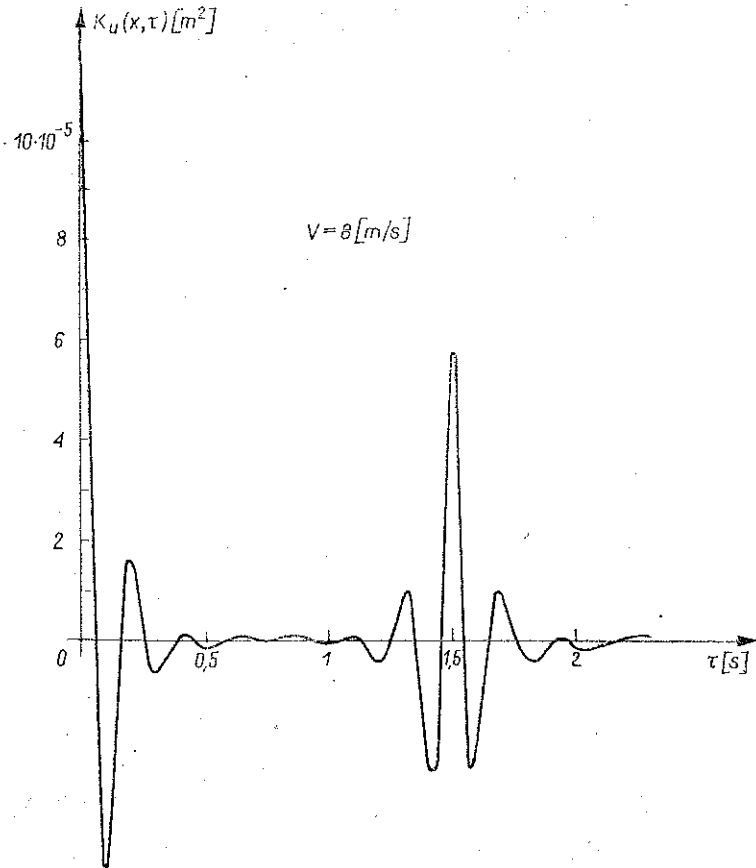
Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Uzyskane rezultaty dają wyczerpujący obraz badanego zjawiska. Należy podkreślić, że w efekcie zastosowanej metody poza pewnymi błędami związanymi z wykorzystaniem komputerów (dotyczy to przede wszystkim całkowania numerycznego) otrzymano wyniki ścisłe.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. R. W. ROYENBERG, *Zawieszenie samochodu*. Wyd. Komunikacji i Łączności, Warszawa 1974.
2. M. MITSCHKE, *Dynamika samochodu*, Wyd. Komunikacji i Łączności, Warszawa 1977.
3. R. BĄK, T. BURCZYŃSKI, *Analityczno-eksperymentalny sposób badania trwałości ram samochodowych*, *Mech.*, 53, 1975.
4. M. PIETRZAKOWSKI, *Drgania losowe pręta będącego elementem pewnego układu hybrydowego*, *Rozpr. Inż.*, 3, 1978.
5. Z. BURDZIŃSKI, M. GÓRSKI, *Charakterystyki probabilistyczne i klasyfikacja nierówności terenu i dróg*. Prace Inst. Transportu PW, 8, 1974.

Резюме

АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ РАМЫ АВТОМОБИЛЯ

Работа содержит анализ стохастических колебаний гибридной системы, будущей упрощенной моделью рамы автомобиля. Исследуемую систему составляет стержень, свободно подпертый на двух дискретных упруго-вязких элементах, которых вертикальные перемещения являются стационарными, нормальными случайными процессами с известной спектральной плотностью. Точным образом определены спектральные способности системы, а затем характеристические функции случайного поля прогибов и изгибных моментов стержня. Результаты представлены в виде графиков.

SUMMARY

ANALYSIS OF RANDOM VIBRATIONS OF A SIMPLIFIED MODEL OF A VEHICLE FRAME

The paper contains an analysis of stochastic vibrations of a hybrid system representing a simplified model of a vehicle frame. The system considered consists of a rod simply supported on two discrete visco-elastic elements, their vertical displacements being stationary, normal random processes of known spectral concentrations. Spectral capacities of the system are determined accurately, and then the characteristic functions of the random fields of deflection and bending moments of the rod are found. The results are illustrated by graphs.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA INSTYTUT PODSTAW BUDOWY MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 grudnia 1978 r.