

## NOWA METODA BADANIA PRAW PŁYNIĘCIA OŚRODKÓW SYPKICH

WIESŁAW TRĄMPCZYŃSKI (WARSZAWA)\*

Mimo iż rozwiązania statyczne, oparte na teorii plastyczności i sztywno idealnie plastycznym modelu ośrodka, w mechanice gruntów są już zagadnieniami klasycznymi, problem właściwego wyboru związków fizycznych między prędkościami odkształceń a naprężeniami pozostaje otwarty. W przeważającej liczbie badań doświadczalnych, wyboru, dla danego ośrodka, właściwego prawa płynięcia dokonywano porównując rozwiązania teoretyczne z wynikami doświadczeń w płaskim stanie odkształcenia. Tarcie ośrodka o szyby pojemnika, którego nie uwzględnia się w rozwiązaniu, sprawia, że uzyskiwane wyniki obciążone są pewnym błędem. W pracy przedstawiono nową metodę badania praw płynięcia ośrodków sypkich, w której nie występuje w/w efekt. Opiera się ona na rozwiązaniu teoretycznym zagadnienia naporu idealnie gładkiej ściany wzdłuż pochylej skarpy. Mimo że zagadnienie jest trójwymiarowe proponowane rozwiązanie jest statycznie wyznaczalne i może być uzyskane analitycznie. Badania doświadczalne przeprowadzone dla suchego piasku potwierdzają przydatność proponowanej metody.

### 1. WSTĘP

Rozwiązania statyczne oparte na teorii plastyczności i sztywno idealnie plastycznym modelu ośrodka, w mechanice gruntów są już zagadnieniami klasycznymi, posiadającymi szeroką literaturę [1, 2 i 3]. Natomiast problem właściwego wyboru związków fizycznych między prędkościami odkształceń a naprężeniami pozostaje do dziś otwarty. Znanych jest szereg propozycji opisu plastycznego pola prędkości [4, 5, 6 i 7], z których każda budzi wątpliwości spowodowane niewystarczającą liczbą danych doświadczalnych.

Możliwość szerokiego zastosowania metod teorii plastyczności (dzięki rozwojowi techniki obliczeniowej jak i samej teorii plastyczności) w mechanice procesów urabiania gruntów sprawia, iż prawidłowy dobór prawa płynięcia ma dość istotne znaczenie. Może on prowadzić do ulepszenia opisu tych procesów oraz właściwszego ukształtowania narzędzi.

Do najczęściej stosowanych praw płynięcia możemy zaliczyć propozycję DRUCKERA i PRAGERA [4], JENIKE i SHIELDA [5] oraz niestowarzyszone prawo płynięcia w postaci stosowanej przez RADENKOVIČA [8].

Jak dotąd, wyboru właściwego dla danego ośrodka prawa dokonano na podstawie rozwiązań w płaskim stanie odkształcenia ośrodka. Wymagało to urządzeń pozwalających na realizację płaskiego stanu odkształcenia [9], a w wielu przypad-

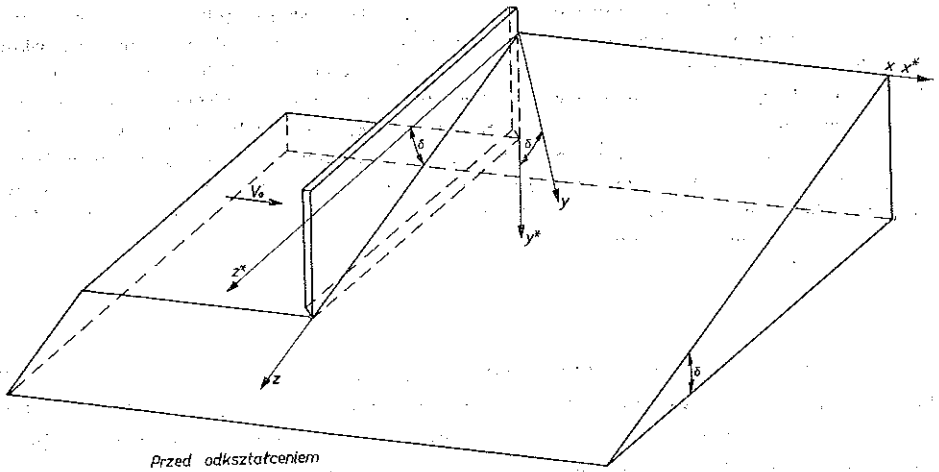
(\*) Praca wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12. „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych”, koordynowanego przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN.

kach korzystania z obliczeń numerycznych. Poza tym obserwacje doświadczalne obarczone były błędem wynikającym z niemożności uwzględnienia tarcia ośrodka o ściany pojemnika w czasie realizacji wspomnianego stanu odkształcenia.

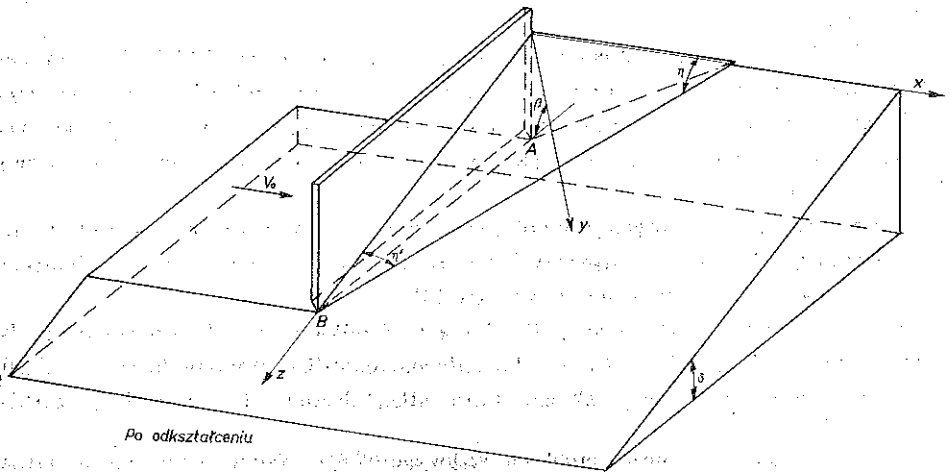
W pracy przedstawiono prostą metodę wyboru właściwego prawa płynięcia dla ośrodka idealnie sypkiego oraz jej weryfikację doświadczalną.

## 2. STATYKA I KINEMATYKA PROCESU

Wyznamy stan naprężenia oraz kinematykę ośrodka wywołane przesuwaniami płaskiej ściany na pochyłej skarpcie (rys. 1 i 2). Masyw ośrodka ograniczony jest nieobciążoną płaszczyzną  $xz$  tworzącą z poziomem (płaszczyzna  $xz^*$ ) kąt  $\delta$ , natomiast płaszczyzn  $zy$  oraz płaszczyzn ściany napierającej są pionowe.



Rys. 1



Rys. 2

Jak wiadomo, w ogólnym przestrzennym zagadnieniu ruchu gruntu należy wyznaczyć dziewięć niewiadomych: sześć składowych tensora naprężenia  $\sigma_{ij}$  i trzy składowe wektora prędkości  $v_i$ . Układ równań składa się z trzech równań równowagi

$$(2.1) \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = F_i,$$

z warunku stanu granicznego

$$(2.2) \quad F(\sigma_{ij}) = 0$$

oraz sześciu zależności między składowymi wektora prędkości  $v_i$  i tensora naprężenia  $\sigma_{ij}$ :

$$(2.3) \quad -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}.$$

W celu rozwiązania zagadnienia przyjmujemy następujące założenia: a) spełniony jest postulat pełnej plastyczności Haara i Kármána w postaci  $\sigma_1 = \sigma_2 \geq \sigma_3$ ; b) nie ma tarcia pomiędzy ośrodkiem a ścianą ( $\mu = 0$ , co w efekcie daje  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$ ); c) stan naprężenia jest niezależny od współrzędnej  $z$  (założenie to ma takie same uzasadnienie jak w klasycznym przypadku ruchu równoległego po skarpcie [2]). Te założenia pozwalają na rozdzielenie przedstawionego układu i rozwiązanie najpierw zagadnienia statycznego a potem zagadnienia kinematyki rozpatrywanego procesu.

### 2.1. Zagadnienia statyczne

Równania równowagi

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} &= 0, \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} &= \gamma \cos \delta, \\ \tau_{yz,y} + \tau_{yz,y} + \sigma_z &= \gamma_z \sin \delta \end{aligned}$$

po uwzględnieniu założeń upraszczających przyjmują postać

$$(2.5) \quad \sigma_{x,x} = 0, \quad \sigma_{y,y} = \gamma \cos \delta, \quad \tau_{yz,y} = \gamma \sin \delta,$$

skąd po scałkowaniu otrzymujemy

$$(2.6) \quad \sigma_y = \gamma y \cos \delta, \quad \tau_{yz} = \gamma y \sin \delta.$$

Pozostałe składowe stanu naprężenia  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  wyznaczamy z warunku stanu granicznego Coulomba-Mohra dla ośrodka bez kohezji oraz z postulatu pełnej plastyczności. Układ równań przyjmuje postać

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_3 &= (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \rho, \\ \sigma_1 &= \sigma_2 = \sigma_x. \end{aligned}$$

Podstawiając funkcje (rys. 3)

$$(2.8) \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2},$$

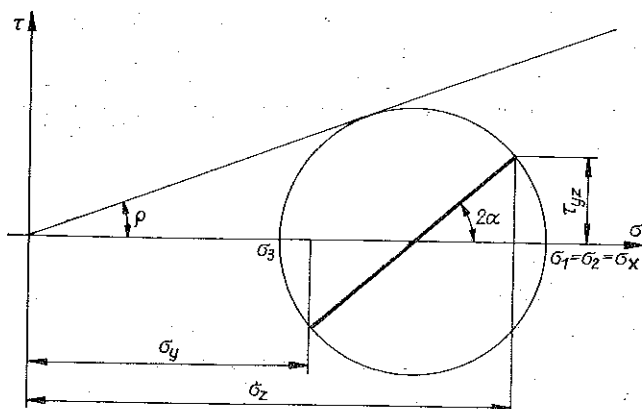
$$\sigma_3 = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2},$$

do warunku plastyczności, uzyskujemy

$$(2.9) \quad 2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} = (\sigma_y + \sigma_z) \sin \rho,$$

a stąd

$$(2.10) \quad \sigma_z = \gamma y \left( \frac{\cos \delta (1 + \sin^2 \rho) + 2 \sqrt{\cos^2 \delta \sin^2 \rho - \sin^2 \delta \cos^2 \rho}}{\cos^2 \rho} \right),$$



Rys. 3

Wstawiając do równań (2.8) uzyskaną wartość  $\sigma_z$  i wiedząc że  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_x$ , znajdujemy

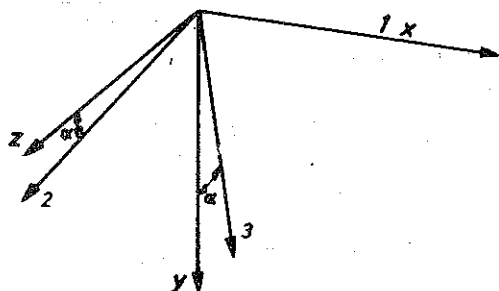
$$(2.11) \quad \sigma_x = \gamma y \left( \cos \delta + \frac{\sqrt{\cos^2 \delta \sin^2 \rho - \sin^2 \delta \cos^2 \rho}}{\cos^2 \rho} + \right. \\ \left. + \sqrt{\left( \frac{\cos \delta \sin^2 \rho + \sqrt{\cos^2 \delta \sin^2 \delta - \sin^2 \delta \cos^2 \rho}}{\cos^2 \rho} \right)^2 + \sin^2 \gamma} \right)$$

Kierunki główne 2 i 3 tensora naprężenia

$$T = \begin{vmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

tworzą z osiami  $y$  oraz  $z$  (rys. 4) kąt  $\alpha$ , który możemy wyznaczyć posługując się konstrukcją kół Mohra (rys. 3):

$$(2.12) \quad \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau_{yz}}{\sigma_z - \sigma_y} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sin \delta \cos^2 \rho}{\cos \delta \sin^2 \rho + \sqrt{\cos^2 \delta \sin^2 \rho - \sin^2 \delta \cos^2 \rho}}$$



Rys. 4

Postępując w analogiczny sposób można wyznaczyć stan naprężenia dla ośrodka opisanego warunkiem plastyczności Coulomba-Mohra ze spójnością i warunkiem Treski.

## 2.2. Zagadnienia kinematyczne

W pracy rozpatrzono kinematykę ruchu ośrodka na pochyłej skarpie dla trzech praw fizycznych: Druckera i Pragera, Jenike i Shilda oraz niestowarzyszonego prawa płynięcia w postaci stosowanej przez D. Radenkoviča.

Pierwsze z nich jest uogólnieniem na ośrodki rozdrobnione potencjalnego prawa płynięcia dla metali stowarzyszonego z warunkiem plastyczności w postaci:

$$(2.13) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$$

Odpowiada to założeniu współosiowości kierunków głównych tensorów  $\dot{\epsilon}_{ij}$  i  $\sigma_{ij}$  oraz ortogonalności wektora prędkości odkształcenia plastycznego (odłożonego odpowiednio w przestrzeni naprężeń) do powierzchni plastyczności. Własność ta pozwala na sformułowanie twierdzeń ekstremałnych (por. np. [10]).

Prawo Jenike i Shilda jest niestowarzyszonym z warunkiem plastyczności potencjalnym prawem płynięcia. Za potencjał przyjęto warunek plastyczności Treski, co jest równoznaczne z założeniem współosiowości kierunków głównych tensorów  $\dot{\epsilon}_{ij}$  i  $\sigma_{ij}$  oraz z założeniem nieściśliwości materiału. D. Radenkovič stosował niestowarzyszone prawo płynięcia, w którym potencjał dla prędkości odkształceń jest związany z warunkiem plastyczności Coulomba-Mohra o innych stałych materiałowych niż w przypadku rozwiązania statycznego:

$$(2.14) \quad G(\sigma_{ij}) = \sigma_i - \sigma_j - (\sigma_i + \sigma_j) \sin \rho^* - 2c \cos \rho^*.$$

Odpowiada to założeniu współosiowości kierunków głównych tensorów  $\dot{\epsilon}_{ij}$  i  $\sigma_{ij}$  oraz ortogonalności wektora prędkości odkształcenia plastycznego do nowej powierzchni plastyczności.

Jak wiadomo, mimo wprowadzenia dodatkowego równania, którym jest postulat pełnej plastyczności, układ równań (2.1)–(2.3) nie jest nadokreślony, ponieważ stanom naprężenia odpowiadającym punktom położonym na krawędziach powierzchni stanów granicznych towarzyszy pewna swoboda orientacji wektora reprezentującego prędkość odkształcenia. Dla takich stanów naprężenia formułujemy w rozpatrywanym zagadnieniu trzy równania.

Pierwsze z nich odnosi się do każdego ze wspomnianych praw płynięcia i wynika z warunku pokrywania się kierunków głównych tensorów naprężenia i prędkości odkształcenia:

$$(2.15) \quad \frac{\dot{\epsilon}_{yz}}{\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z} = \frac{\tau_{yz}}{\sigma_y - \sigma_z}.$$

Drugie równanie jest konsekwencją przyjęcia warunku Haara i Kármána i ma postać

$$(2.16) \quad \dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_x.$$

Postać trzeciego równania dla prędkości jest zależna od przyjęcia prawa płynięcia.

W przypadku propozycji Druckera i Pragera wektor przyrostu odkształcenia w punkcie, którego stan naprężenia określono w p. 2.1, może przyjmować dowolne kierunki (w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni plastyczności) zawarte pomiędzy kierunkiem normalnym do ściany o równaniu

$$(2.17) \quad \sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \rho$$

a normalnym do ściany o równaniu

$$(2.18) \quad \sigma_2 - \sigma_3 = (\sigma_2 + \sigma_3) \sin \rho.$$

Wektor ten może więc zmieniać położenie: od położenia

$$(2.19) \quad \dot{\epsilon}_1 = \lambda(1 - \sin \rho), \quad \dot{\epsilon}_2 = 0, \quad \dot{\epsilon}_3 = -\lambda(1 + \sin \rho)$$

do położenia

$$(2.20) \quad \dot{\epsilon}_1 = 0, \quad \dot{\epsilon}_2 = \lambda(1 - \sin \rho), \quad \dot{\epsilon}_3 = -\lambda(1 + \sin \rho).$$

Wprowadzając parametr  $\chi$  zależny od czasu i miejsca, wzorom (2.19) i (2.20) możemy nadać postać

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \lambda \chi (1 - \sin \rho), \\ \dot{\epsilon}_2 &= \lambda (1 - \chi) (1 - \sin \rho), \\ \dot{\epsilon}_3 &= -\lambda (1 + \sin \rho), \end{aligned}$$

skąd po eliminacji  $\lambda$  i  $\chi$  otrzymujemy:

$$(2.22) \quad (\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2) (1 + \sin \rho) + \dot{\epsilon}_3 (1 - \sin \rho) = 0.$$

Równania (2.15), (2.16) i (2.22) tworzą układ równań dla prędkości.

Wyrażając główne prędkości odkształcenia w składowym tensora prędkości odkształcenia

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_x &= \frac{\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_y}{2}\right)^2 + \dot{\epsilon}_{zy}^2}, \\ \dot{\epsilon}_3 &= \frac{\dot{\epsilon}_z + \dot{\epsilon}_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_y}{2}\right)^2 + \dot{\epsilon}_{zy}^2}. \end{aligned}$$

oraz korzystając ze wzorów

$$(2.24) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

dla tensora małych odkształceń, układowi temu możemy nadać postać

$$(2.25) \quad \begin{aligned} 2(1 - \sin^2 \rho) \left( \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{\partial V_y}{\partial y} (5 + 6 \sin \rho + 5 \sin^2 \rho) + \\ + \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)^2 (1 + 3 \sin \rho)^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} = \operatorname{tg} 2\alpha \left( \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_z}{\partial z} \right),$$

$$\left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial V_x}{\partial x} \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{\partial V_y}{\partial y} - \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)^2 = 0.$$

W przypadku prawa płynięcia stosowanego przez D. Radenkoviča, postępując podobnie jak poprzednio, uzyskamy układ równań dla prędkości różniący się od (2.25) jedynie tym, że zamiast  $\rho$  występuje  $\rho^*$  ( $0 < \rho^* < \rho$ ).

Dla prawa płynięcia Jenike i Shilda trzecim równaniem dla prędkości jest warunek nieściśliwości ośrodka w postaci

$$(2.26) \quad \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 = 0.$$

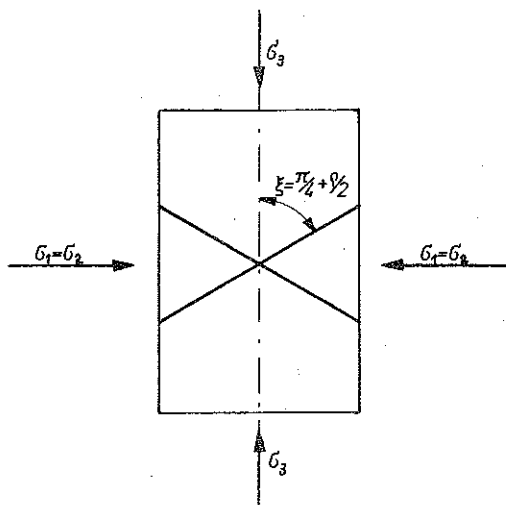
Dokonując przekształcenia analogicznego jak poprzednio, uzyskujemy układ równań dla prędkości w postaci

$$(2.27) \quad \begin{aligned} 2 \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + 5 \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) + 2 \left( \frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)^2 = 0, \\ \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} = \operatorname{tg} 2\alpha \left( \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

$$\left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial V_x}{\partial x} \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{\partial V_y}{\partial y} - \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)^2 = 0.$$

Rozpatrzmy element ośrodka obciążonego naprężeniami głównymi  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , przy czym  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ . Przez każdy jego punkt przechodzi nieskończenie wiele

płaszczyzn ścięcia nachylonych do kierunku najmniejszego naprężenia głównego  $\sigma_3$  pod kątem  $\zeta = \pi/4 + \rho^*/2$  (rys. 5), gdzie  $\rho^* = \rho$  dla stowarzyszonego prawa płynięcia,  $\rho^* = 0$  dla niestowarzyszonego prawa i  $0 < \rho^* < \rho$  dla warunku Radenkoviča.



Rys. 5

Funkcja określająca elementarny typ ruchu ośrodka jako sztywnego bloku ( $V_x = \text{const}$ ,  $V_y = \text{const}$ ,  $V_z = \text{const}$ ) wzdłuż tej z płaszczyzn nachylonych pod kątem  $\zeta$  do kierunku głównego 3, która jednocześnie przechodzi przez krawędź  $AB$  ściany napierającej (rys. 2), jest jednym z kinematycznie dopuszczalnych rozwiązań, spełniających równania (2.25) i (2.27) oraz kinematyczne warunki brzegowe.

## 5. DOŚWIADCZENIA

Badania doświadczalne przeprowadzono dla ośrodka idealnie sypkiego, którym był suchy piasek, przy czym  $\rho = 37^\circ$  i  $\gamma = 0,00157$  [ $\text{kG/cm}^3$ ]. W tablicy 1 podano skróconą analizę sitową tego materiału.

Drogą prostych przekształceń geometrycznych (rys. 6 i 7), znając położenie krawędzi  $AB$  (rys. 2), kąt  $\delta$  oraz dla  $\zeta = \pi/4 + \rho^*/2$ , znajdujemy z rozwiązania teoretycznego kąt  $\eta$ :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Omega' &= \arctg \frac{\text{tg } \zeta}{\sin \vartheta}, & \beta' &= \arctg \frac{\text{tg } \zeta}{\cos \vartheta}, \\ \Omega &= \arctg \frac{\sin \beta' \text{tg } \zeta}{\sin \beta' \sin \vartheta}, & \beta &= \alpha + \beta' = \alpha + \arctg \frac{\text{tg } \zeta}{\cos \vartheta}, \\ \eta &= \arctg \frac{\sin \beta' \sin \vartheta}{\cos \beta' \text{tg } \zeta}. \end{aligned}$$

Określiwszy doświadczalnie kąt  $\eta$ , możemy wyznaczyć dla danego ośrodka kąt  $\rho^*$ , a tym samym znaleźć właściwe prawo płynięcia.

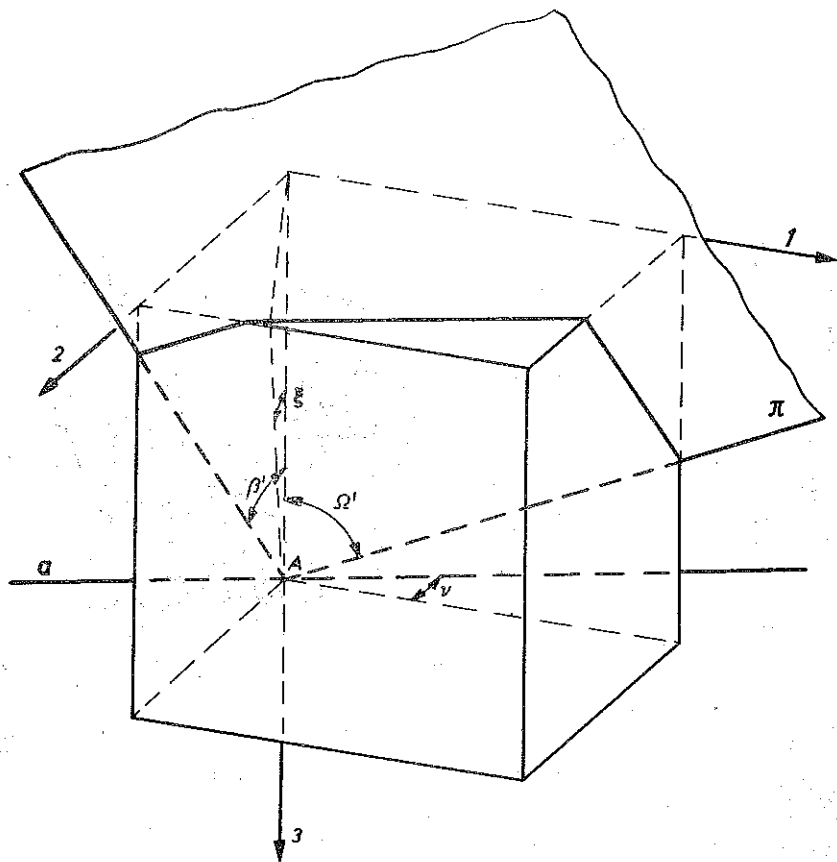


Stanowisko badawcze zostało skonstruowane zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 2. Płaską ścianę zagłębiano w ośrodku usypanym w kształcie pochyłej skarpy, a następnie przesuwano ją obserwując jednocześnie powierzchnię swobodną materiału. Założenie, że nie ma tarcia pomiędzy ośrodkiem a ścianą napierającą, zrealizowano umieszczając ją na swobodnych kulkach (rys. 8), które umożliwiły dowolny ruch ściany w płaszczyźnie  $zy$  (rys. 2). Pomiar kąta  $\eta$  odbywał się przez fotografowanie z góry powierzchni  $xz$  ośrodka w czasie procesu przy długim czasie ekspozycji (rys. 9). W doświadczeniu zastosowano ruch odwrócony, tzn. przesuwano się ośrodek, natomiast ściana miała swobodę ruchu jedynie w płaszczyźnie  $zy$ . Wyraźnie widoczna na rys. 9 linia, wzdłuż której cząsteczki ośrodka zmieniają kierunek ruchu, jest śladem płaszczyzny ścięcia na płaszczyźnie  $xz$  (rys. 2).

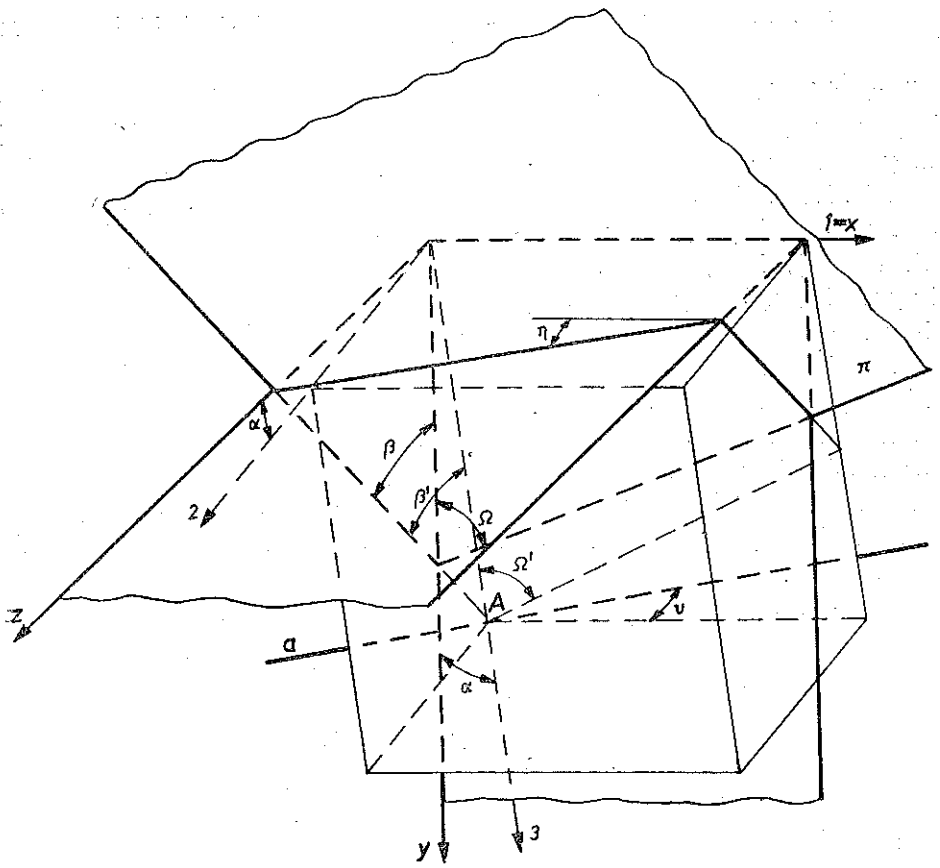
Badania doświadczalne wykonano dla poziomej krawędzi  $AB$  oraz sześciu wielkości kąta  $\delta$  ( $10^\circ$ ,  $12,5^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $17,5^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $22,5^\circ$ ).

Tablica 1

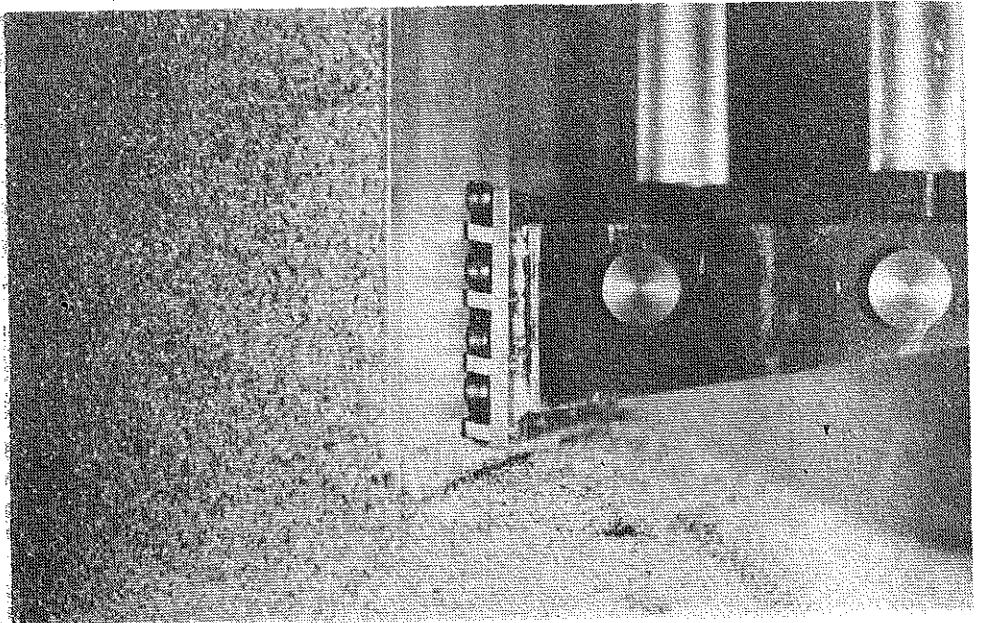
Średnica ziaren [mm]	Udział [%]
od 1,8 do 1,2	12,3
od 1,2 do 0,6	82,1
od 0,6 do 0	5,6



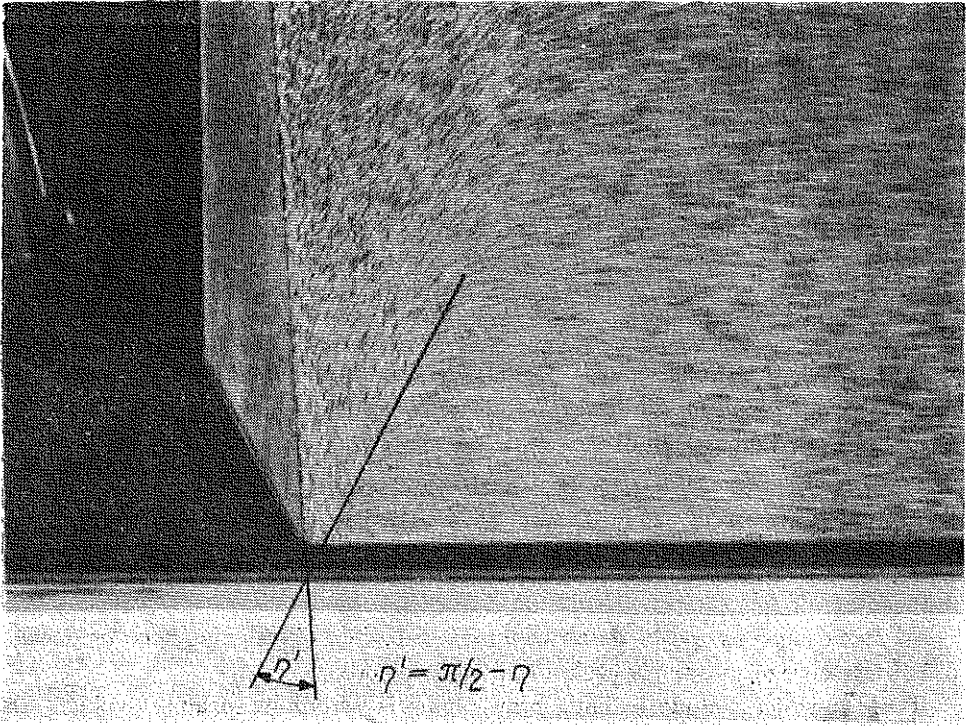
Rys. 6



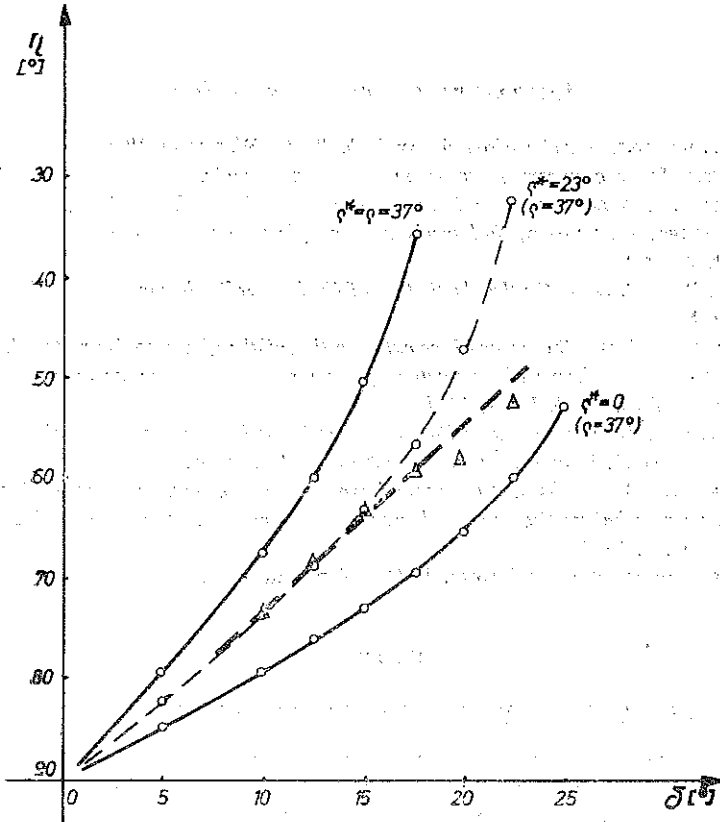
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

Ny rys. 10 linią grubą przerywaną zaznaczono wyniki eksperymentalne, linią ciągłą pokazano wyniki uzyskane z rozwiązania teoretycznego przy zastosowaniu stowarzyszonego ( $\rho^* = 37^\circ$ ) i niestowarzyszonego ( $\rho^* = 0$ ) prawa płynięcia, natomiast linią przerywaną cienką przedstawiono rezultaty przy zastosowaniu warunku Radenkoviča dla  $\rho^* = 23^\circ$ .

#### 4. WNIOSKI

Jak widać, w zakresie kątów nachylenia skarpy  $\delta = 10^\circ - 17^\circ$  kinematykę badanego ośrodka opisuje niestowarzyszone prawo płynięcia, w którym za potencjał plastyczny przyjmuje się funkcję

$$G(\sigma_{ij}) = \sigma_i - \sigma_j - (\sigma_i + \sigma_j) \sin \rho^*,$$

gdzie  $\rho^* = 23^\circ$ . Rozbieżność dla większych kątów  $\delta$  może wynikać ze zbliżenia się do kąta naturalnego usypu ośrodka, co powoduje zaburzenia w przeprowadzanym doświadczeniu.

Przedstawiony sposób deformacji może służyć do określania  $\rho^*$ , co umożliwiłby dobór właściwego prawa płynięcia dla danego ośrodka.

Przedstawiona metoda badania praw płynięcia ośrodków idealnie sypkich jest jednocześnie bardzo prosta i nie wymaga skomplikowanych urządzeń ani też trudnych obliczeń.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. W. SOKOŁOWSKI, *Statyka ośrodków sypkich*, PWN, Warszawa 1958.
2. E. DEMBICKI, *Stany graniczne gruntów, teoria i zastosowanie*, GTN, Gdańsk 1970.
3. W. SZCZEPIŃSKI, *Stany graniczne i kinematyka ośrodków sypkich*, PWN, Warszawa 1974.
4. D. C. DRUCKER, W. PRAGER, *Soil mechanics and plastic analysis of limit design*, Q. Appl. Math., **10**, 2, 1952.
5. A. JENIKE, R. T. SHIELD, *On the plastic flow of Coulomb solids beyond original failure*, J. Appl. Mech., 1959.
6. G. DE JOSSELI DE JONG, *Statics and kinematics in the failure of a granular material*, Delft 1959.
7. A. J. M. SPENCER, *A theory of kinematics of ideal soil under plane strain conditions*, Journ. Mech. Phys. Solids, **12**, 337-351; 1964.
8. D. RADENKOVIČ, *Theorie de charge limitées, extension a la mecanique des sols*, Sommaire de Plasticité, Ed. par J. Mandel, École Polytechnique, Paris 1961.
9. W. BOJANOWSKI, B. ROSIŃSKI, *Wpływ współczynnika tarcia gruntu sypkiego o ściankę oporową na kształt powierzchni poślizgu przy odporze gruntu*, Zesz. Nauk. Politechniki Łódzkiej, **90**, Budownictwo, 2, 1967.
10. *Teoria plastyczności*, Praca zbiorowa, PWN, Warszawa 1965.

#### Резюме

#### НОВЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАКОНОВ ТЕЧЕНИЯ СЫПУЧИХ СРЕД

Несмотря на то, что статические решения, опирающиеся на теорию пластичности и на жестко идеально пластическую модель среды, в механике грунтов являются уже классическими задачами вопрос надлежащего выбора физических соотношений между скоростями деформаций и напряжениями остается открытым. В преимущественном количестве экспери-

ментальных исследований выбор, для данной среды, надлежащего закона течения производится сравнивая теоретические решения с результатами экспериментов в плоском деформационном состоянии. Трение среды о стекла контейнера, которое не учитывается в решении, приводит к тому, что получаемые результаты обременены некоторой ошибкой. В работе представлен новый метод исследования законов течения сыпучих сред, в котором не выступает вышеупомянутый эффект. Опирается он на теоретическом решении задачи напора идеально гладкой стенки вдоль наклонного откоса. Несмотря на то, что задача является трехмерной предложенное решение статически определимое и может быть получено аналитически. Экспериментальные исследования проведенные для сухого песка подтверждают пригодность предложенного метода.

## SUMMARY

## A NEW METHOD OF VERIFICATION OF FLOW RULES FOR GRANULAR MEDIA

In the experimental verification of the perfectly plastic flow rules for granular materials, plane-strain boundary value problems are often realised. The friction occurring along the side-walls of the containers influences, however, the kinematics, and thus makes the conclusions on the validity of a flow rule questionable. In the paper a new method is suggested in which friction effects are disregarded. The method is based on a theoretical solution of a frictionless retaining wall problem for plane slope, when the wall is pushed perpendiculary to the slope. Although the problem is three-dimensional, proposed solution is statically determinate and can be solved analytically. The experiments carried out on sand confirmed the applicability of the method suggested.

POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 16 lutego 1976 r.*

---