

DRGANIA STOCHASTYCZNE PŁYT O ZŁOŻONYM KSZTAŁCIE, SZTYWNO UTWIERDZONYCH NA BRZEGU

ALEKSANDER W A B E R S K I (GLIWICE)

W pracy przedstawiono nową matematyczną metodę wyznaczania charakterystyk probabilistycznych płyt drgających o złożonym kształcie, sztywno utwierdzonych na brzegu. U podstaw tej metody leży zastosowanie pewnych funkcji specjalnych, zwanych *R*-funkcjami. W celu przedstawienia metody wyznaczono drogą obliczeń numerycznych rozkłady czasowo-przestrzenne wariacji przemieszczenia płyty trapezowej z wyciętym w środku otworem kołowym dla dwu typów obciążeń wymuszających o charakterze niestacjonarnych pól losowych.

1. WSTĘP

W ostatnich latach obserwuje się gwałtowny rozwój zastosowań teorii prawdopodobieństwa w różnych dziedzinach techniki. Wskutek realnych potrzeb metody teorii prawdopodobieństwa znalazły także zastosowanie w mechanice, a w szczególności w teorii drgań układów dyskretnych i ciągłych. Spośród tych metod ważną grupę stanowią metody korelacyjne i spektralne. W przypadku ciągłych układów dynamicznych badają one związki między charakterystykami probabilistycznymi (wartością przeciętną, funkcją korelacyjną) wymuszających pól losowych zwanych umownie «wejściem» (np. obciążeń) oraz pól losowych opisujących stan układu zwanych «wyjściem» (np. przemieszczeń).

Metody korelacyjne do badania drgań liniowych układów sprężystych, w tym także płyt, zastosowali pierwsi VAN LEAR, UHLENBECK i ERINGEN [9, 14 i 15]. Ogólną teorię dotyczącą reakcji takich układów na wymuszenia losowe podał DYER [4 i 5]. Drgania stochastyczne płyt i powłok pod wpływem stacjonarnych pól losowych badane były między innymi przez DYERA [8], PALMOWA [11], CZOGAŁĘ [6], DIMENTBERGA [7], NIKOŁAJENKĘ [10], BOLOTINA [1]. Drgania stochastyczne płyt pod wpływem niestacjonarnych pól losowych badane były przez A. TYLIKOWSKIEGO [14 i 16]. We wszystkich tych przypadkach rozważane były płyty drgające, o prostych kształtach (prostokątne, kołowe), dla których funkcja Greena, czyli impulsowa funkcja przejścia, była znana.

W niniejszej pracy przedstawiona została nowa metoda matematyczna wyznaczania charakterystyk probabilistycznych dla płyt o złożonym kształcie, sztywno utwierdzonych na całym brzegu i poddanych obciążeniom wymuszającym o charakterze stacjonarnych i niestacjonarnych pól losowych.

Metoda ta, dzięki zastosowaniu pewnych funkcji specjalnych wprowadzonych przez W. L. RWACZEWA [12], a zwanych R -funkcjami, pozwoliła uzyskać rozwiązanie problemu w postaci wzorów zamkniętych. Metodę przedstawiono na przykładzie płyty o takim kształcie, dla przypadku którego uzyskanie rozwiązania inną metodą byłoby trudne lub wręcz niemożliwe. W tym przypadku była to płyta trapezowa z wyciętym w środku otworem kołowym, sztywno utwierdzona na wszystkich brzegach.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozważymy drgania cienkiej płyty sprężystej o stałej grubości, poddanej obciążeniu o charakterze czasowo-przestrzennego pola losowego, opisane przez równanie

$$(2.1) \quad D\Delta\Delta u + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\rho h n_c \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, t, \gamma), \quad t \in R_+^1, \quad (x, y) \in \Omega \subset R^2$$

i warunki brzegowe wyrażające sztywne utwierdzenie na brzegu

$$(2.2) \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0$$

oraz zerowe warunki początkowe

$$(2.3) \quad u(x, y, 0) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, 0) = 0.$$

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$	operator biharmoniczny,
R_+^1	dodatnia część prostej liczbowej,
R^2	dwuwymiarowa przestrzeń euklidesowa,
$\Omega \subset R^2$	obszar zajmowany przez płytę,
$\partial\Omega$	brzeg obszaru,
ν	jednostkowy wektor normalny do brzegu,
ρ	gęstość materiału płyty,
h	grubość płyty,
n_c	współczynnik tłumienia,
$\gamma \in \Gamma, \Gamma$	zbiór zdarzeń elementarnych,
$\mathcal{F}\sigma$	algebra,
P	miara probabilistyczna w przestrzeni probabilistycznej (Γ, \mathcal{F}, P) ,
$f(x, y, t, \gamma)$	czasowo-przestrzenne pole losowe, mierzalne, indukowane przez przestrzeń (Γ, \mathcal{F}, P) ,
E	moduł Younga,
ν_0	współczynnik Poissona,
$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$	sztywność cylindryczna płyty.

Wyznaczenie reakcji układu na niestacjonarny proces stochastyczny lub pole losowe wymaga znajomości jego charakterystyk probabilistycznych. Charakterystyki te można otrzymać na drodze teoretycznej analizując doświadczalnie stronę fizyczną procesu. Metody doświadczalne wyznaczania funkcji korelacyjnej dla procesów stochastycznych i pól losowych niestacjonarnych są, jak dotąd, bardzo ubogie. Do klasy procesów niestacjonarnych II-go rzędu, dla których funkcję korelacyjną łatwo wyznaczyć, zaliczają się procesy lokalnie stacjonarne o funkcji korelacyjnej

$$(2.4) \quad K_f(t_1, t_2) = \sum_{q=1}^N \sigma_q^2 e^{-\alpha_q(t_1^2 + t_2^2)},$$

$$\bigwedge_{1 \leq q \leq N} \sigma_q > 0, \quad \alpha_q > 0.$$

Są to procesy, których funkcja korelacyjna $K(t_1, t_2)$ jest iloczynem nieujemnej funkcji czasu $K_1[(t_1 + t_2)/2]$ i stacjonarnej funkcji korelacyjnej $K_2(t_1 - t_2)$. Procesy tego typu występują często w zagadnieniach techniki raketowej.

Innymi niestacjonarnymi procesami losowymi, mogącymi występować w momencie rozruchu układów mechanicznych, są procesy dające się przedstawić w postaci sumy harmonik o losowych, nieskorelowanych fazach i amplitudach oraz jednostajnie zmiennej częstotliwości.

Funkcja korelacyjna tych procesów daje się przedstawić w formie

$$(2.5) \quad K_f(t_1, t_2) = \sum_{q=1}^N \sigma_q^2 \cos \beta_q(t_1^2 - t_2^2),$$

$$\bigwedge_{1 \leq q \leq N} \sigma_q > 0, \quad \beta_q > 0.$$

W niniejszej pracy założymy, że funkcja korelacyjna wymuszającego niestacjonarnego obciążenia losowego $f(x, y, t, \gamma)$ przyjmować będzie postać (2.4) i (2.5).

3. METODA WYZNACZANIA CHARAKTERYSTYK PROBABILISTYCZNYCH PŁYT O ZŁOŻONYM KSZTAŁCIE, SZTYWNO UTWIERDZONYCH NA BRZEGU

Stosując metodę Galerkin-Ritza rozwiązanie równania (2.1) przedstawimy w postaci

$$(3.1) \quad u_n(x, y, t, \gamma) = \sum_{l+m=0}^n c_{lm}(t, \gamma) V_{lm}(x, y).$$

Funkcje bazowe $V_{lm}(x, y)$ są generowane przez warunki brzegowe i w przypadku sztywnego utwierdzenia mają postać [12]

$$(3.2) \quad V_{lm}(x, y) = \omega_1^2(x, y) \psi_{lm}(x, y),$$

gdzie

$$1) \quad \sum_{l+m=0}^n = \sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^{n-l},$$

2) $\omega_1(x, y)$ jest równaniem konturu płyty, znormalizowanym do pierwszego rzędu, napisanym za pomocą R -funkcji;

$$3) \quad \psi_{lm}(x, y) = T_l(\alpha x) T_m(\beta y),$$

przy czym T_l, T_m są wielomianami Czebyszewa pierwszego rodzaju, a α i β współczynnikami normującymi uzależnionymi od położenia początku układu współrzędnych x, y .

Funkcje losowe $c_{lm}(t, \gamma)$ wyznacza się z następującego skończonego układu równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(3.3) \quad \sum_{l+m=0}^n \left\{ c_{lm} \int_{\Omega} \int_{\Omega} D \Delta V_{lm} \Delta V_{kj} dx dy + \left[2\rho h n_c \frac{dc_{lm}}{dt} + \rho h \frac{d^2 c_{lm}}{dt^2} \right] \times \right. \\ \left. \times \int_{\Omega} \int_{\Omega} V_{lm} V_{kj} dx dy \right\} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} f(x, y, t, \gamma) \tilde{V}_{kj} dx dy.$$

Wartości własne rozważanego zagadnienia brzegowego można wyznaczyć z wyznacznika następującej macierzy symetrycznej:

$$(3.4) \quad \det [[V_{lm}, V_{kj}] - \lambda \langle V_{lm}, V_{kj} \rangle] = 0,$$

gdzie

$$(3.5) \quad [V_{lm}, V_{kj}] = \frac{D}{\rho h} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \Delta V_{lm} \Delta V_{kj} dx dy, \\ \langle V_{lm}, V_{kj} \rangle = \int_{\Omega} \int_{\Omega} V_{lm} V_{kj} dx dy.$$

Znając wartości własne λ_{lm} można funkcje bazowe $V_{lm}(x, y)$ zortogonalizować wg iloczynu skalarnego

$$(3.6) \quad [V_{lm}, V_{kj}] \stackrel{\text{df}}{=} [V_{lm}, V_{kj}] - \lambda_{lm} \langle V_{lm}, V_{kj} \rangle$$

i unormować wg normy $\|V_{lm}\| = \sqrt{\langle V_{lm}, V_{lm} \rangle}$.

W przypadku wielokrotnych wartości własnych λ_{lm} należy dokonać wtórnej ortogonalizacji funkcji V_{lm} wg iloczynu skalarnego $\langle \cdot \rangle$.

Uzyskane tą drogą nowe funkcje bazowe $\tilde{V}_{kj}(x, y)$ mają tę własność, że układ równań różniczkowych zwyczajnych (3.3) ma postać kanoniczną:

$$(3.7) \quad \ddot{c}_{kj} + 2n_c \dot{c}_{kj} + \tilde{\omega}_{kj}^2 c_{kj} = f_{kj}(t, \gamma),$$

gdzie

$$\ddot{c}_{kj} = \frac{d^2 c_{kj}}{dt^2}, \quad \dot{c}_{kj} = \frac{dc_{kj}}{dt}, \\ \tilde{\omega}_{kj}^2 = \lambda_{kj} = [\tilde{V}_{kj}, \tilde{V}_{kj}], \\ f_{kj}(t, \gamma) = \frac{1}{\rho h} \int_{\Omega} \int_{\Omega} f(x, y, t, \gamma) \tilde{V}_{kj}(x, y) dx dy,$$

a $\tilde{V}_{kj}(x, y)$ powstają z funkcji $V_{kj}(x, y)$ przez dokonanie ortogonalizacji. W przypadku słabego tłumienia, gdy $\tilde{\omega}_{lm} \gg n_c$, a taki będzie tylko dalej analizowany, końcowe rozwiązanie określone jest wzorem

$$(3.8) \quad u_n(x, y, t, \gamma) = \sum_{l+m=0}^n \int_0^t \iint_{\Omega} \frac{e^{-n_c(t-\tau)}}{\rho h p_{lm}} \sin p_{lm}(t-\tau) f(\xi, \zeta, \tau, \gamma) \times \\ \times \tilde{V}_{lm}(\xi, \zeta) d\xi d\zeta d\tau \tilde{V}_{lm}(x, y),$$

gdzie

$$p_{lm} = \sqrt{\tilde{\omega}_{lm}^2 - n_c^2}.$$

Funkcja Greena, czyli impulsowa funkcja przejścia, dla powyższego rozwiązania, ma postać

$$(3.9) \quad G(x, \xi, y, \zeta, t-\tau) = \sum_{l+m=0}^n \frac{1}{\rho h} \frac{e^{-n_c(t-\tau)}}{p_{lm}} \sin p_{lm}(t-\tau) \tilde{V}_{lm}(x, y) \tilde{V}_{lm}(\xi, \zeta).$$

Wariancja ugięcia płyty wyraża się wzorem

$$(3.10) \quad \sigma_u^2(x, y, t) = v_u(x, y, t) = \sum_{l+m=0}^n \sum_{k+j=0}^n \int_0^t \int_0^t \iint_{\Omega} \iint_{\Omega} K_f(\xi_1, \zeta_1, \tau_1, \xi_2, \zeta_2, \tau_2) \times \\ \times \tilde{V}_{lm}(\xi_1, \zeta_1) \tilde{V}_{kj}(\xi_2, \zeta_2) G_{lm}(t-\tau_1) G_{kj}(t-\tau_2) d\xi_1 d\zeta_1 d\tau_1 d\xi_2 d\zeta_2 d\tau_2 \times \\ \times \tilde{V}_{lm}(x, y) \tilde{V}_{kj}(x, y),$$

gdzie

$$(3.11) \quad G_{lm,kj}(t-\tau) = \frac{e^{-n_c(t-\tau)}}{\rho h p_{lm,kj}} \sin p_{lm,kj}(t-\tau).$$

W przypadku, gdy obciążenie jest polem losowym o funkcji korelacyjnej

$$K_f(t_1, t_2) = \sum_{q=1}^N \sigma_q^2 e^{-\alpha_q(t_1^2+t_2^2)},$$

wariancja ugięcia płyty wyraża się wzorem

$$(3.12) \quad \sigma_u^2(x, y, t) = v_u(x, y, t) = \sum_{k+j=0}^n \sum_{l+m=0}^n \sum_{q=0}^N \frac{\sigma_q^2}{\rho^2 h^2 \alpha_q p_{lm} p_{kj}} \times \\ \times \{U(\tilde{\rho}_{0lm}, \theta_{1lm}) e^{-\alpha_q t^2} + e^{-n_c t} [V(\tilde{\rho}_{0lm}, \theta_{2lm}) \sin p_{lm} t - U(\tilde{\rho}_{0lm}, \theta_{2lm}) \cos p_{lm} t]\} \times \\ \times \{U(\tilde{\rho}_{kj}, \theta_{1kj}) e^{-\alpha_q t^2} - e^{-n_c t} [V(\tilde{\rho}_{0kj}, \theta_{2kj}) \sin p_{kj} t - U(\tilde{\rho}_{0kj}, \theta_{2kj}) \cos p_{kj} t]\} \times \\ \times \int_{\Omega} \int_{\Omega} \tilde{V}_{lm}(x, y) dx dy \int_{\Omega} \int_{\Omega} \tilde{V}_{kj}(x, y) dx dy \tilde{V}_{lm}(x, y) \tilde{V}_{kj}(x, y),$$

gdzie dla $\tilde{\rho} \leq 2$

$$(3.13) \quad U(\tilde{\rho}, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k \tilde{\rho}^{2k+1}}{(2k+1)!!} \cos(2k+1)\theta,$$

$$V(\tilde{\rho}, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k \tilde{\rho}^{2k+1}}{(2k+1)!!} \sin(2k+1)\theta;$$

dla $\tilde{\rho} > 2$

$$(3.14) \quad U(\tilde{\rho}, \theta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\tilde{\rho}^2 \cos 2\theta} \sin(\tilde{\rho}^2 \sin 2\theta) + \frac{1}{2\tilde{\rho}} \cos \theta +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{2^k \tilde{\rho}^{2k-1}} \cos(2k-1)\theta,$$

$$V(\tilde{\rho}, \theta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\tilde{\rho}^2 \cos 2\theta} \cos(\tilde{\rho}^2 \sin 2\theta) - \frac{1}{2\tilde{\rho}} \sin \theta -$$

$$- \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{2^k \tilde{\rho}^{2k-1}} \sin(2k-1)\theta,$$

$$\tilde{\rho}_{lm, kj} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2\alpha_0 t - n_c)^2 + p_{lm, kj}^2}{\alpha_q}},$$

$$\tilde{\rho}_{0\, lm, kj} = \frac{\tilde{\omega}_{lm, kj}}{2\sqrt{\alpha_q}}, \quad \theta_{1\, lm, kj} = \arctg \frac{n_c - 2\alpha_q t}{p_{lm, kj}},$$

$$\theta_{2\, lm, kj} = \arctg \frac{n_c}{p_{lm, kj}}.$$

Jeżeli obciążenie losowe wyrażone jest funkcją korelacyjną

$$K_f(t_1, t_2) = \sum_{q=1}^N \sigma_q^2 \cos \beta_q (t_1 - t_2),$$

to wariancja ugięcia płyty wyraża się wzorem

$$(3.15) \quad \sigma_u^2(x, y, t) = v_u(x, y, t) = \sum_{k+j=0}^n \sum_{l+m=0}^n \sum_{q=1}^N \frac{\delta_q^2}{4\rho^2 h^2 p_{lm} p_{kj} \beta_q} \times$$

$$\times [(S_{(1)\, lm}^+ + S_{(2)\, lm}^-) (S_{(1)\, kj}^+ - S_{(2)\, kj}^-) + (Q_{(1)\, lm}^+ - Q_{(2)\, lm}^-) (Q_{(1)\, kj}^+ - Q_{(2)\, kj}^-)] \times$$

$$\times \int_{\Omega} \int \tilde{V}_{lm}(x, y) dx dy \int_{\Omega} \int \tilde{V}_{kj}(x, y) dx dy \tilde{V}_{lm}(x, y) \tilde{V}_{kj}(x, y), \quad \alpha = 1, 2,$$

$$S_{(\alpha),\, lm, kj}^{\pm} = U(\rho_{(\alpha),\, lm, kj}, \theta_{(\alpha),\, lm, kj}) - e^{-n_c t} [U(\tilde{\rho}_{0,\, lm, kj}, \theta_{(\alpha),\, lm, kj}) \times$$

$$(3.15) \quad \times \cos(\beta_a t^2 \pm p_{lm,kj} t) + V(\tilde{\rho}_{0,lm,kj}, \theta_{(\alpha),lm,kj}) \sin(\beta_a t^2 \pm p_{lm,kj} t)],$$

[cd.]

$$Q_{(\alpha),lm,kj}^{\pm} = V(\tilde{\rho}_{(\alpha),lm,kj}, \theta_{(\alpha),lm,kj}) - e^{-n_c t} [U(\tilde{\rho}_{0,lm,kj}, \theta_{(\alpha),lm,kj}) \times \\ \times \sin(\beta_a t^2 \pm p_{lm,kj} t)] - V(\tilde{\rho}_{0,lm,kj}, \theta_{(\alpha),0,lm,kj}) \cos(\beta_a t^2 \pm p_{lm,kj} t)],$$

$$\tilde{\rho}_{(1),lm,kj} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2\beta_a t + p_{lm,kj})^2 + n_c^2}{\beta_a}},$$

$$\tilde{\rho}_{(2),lm,kj} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2\beta_a t - p_{lm,kj})^2 - n_c^2}{\beta_a}},$$

$$\tilde{\rho}_{(1),lm,kj} = \tilde{\rho}_{(2),0,lm,kj} = \frac{\tilde{\omega}_{lm,kj}}{2\sqrt{\beta_a}},$$

$$\theta_{(1),lm,kj} = \arctg \frac{2\beta_a t + p_{lm,kj}}{n_c} - \frac{\pi}{4},$$

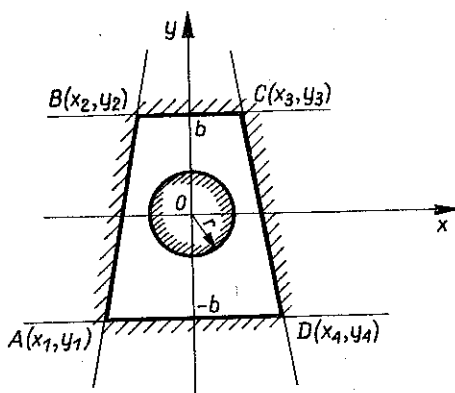
$$\theta_{(1)0,lm,kj} = \arctg \frac{(p_{lm,kj})}{n_c} - \frac{\pi}{4},$$

$$\theta_{(2)lm,kj} = \arctg \frac{2\beta_a t - p_{lm,kj}}{n_c} - \frac{\pi}{4},$$

$$\theta_{(2)0,lm,kj} = \arctg \left(-\frac{p_{lm,kj}}{n_c} \right) - \frac{\pi}{4}.$$

4. ANALIZA NUMERYCZNA

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla płyty trapezowej z wyciętym w środku otworem kołowym (rys. 1).



Rys. I

Równanie konturu płyty napisane za pomocą R -funkcji ma postać

$$(4.1) \quad \omega_1(x, y) = f_1 A_0 f_2 A_0 f_3 A_0 f_4,$$

gdzie

$$f_1 = \frac{-x(y_2 - y_1) + y(x_2 - x_1) - y_1 x_2 + y_2 x_1}{\sqrt{(y_3 - y_4)^2 + (x_1 - x_2)^2}} \geq 0,$$

$$f_2 = \frac{-x(y_4 - y_3) + y(x_4 - x_3) - y_3 y_4 + x_3 y_4}{\sqrt{(y_3 - y_4)^2 + (x_3 - x_4)^2}} \geq 0,$$

$$f_3 = \frac{1}{2b} (b^2 - y^2) \geq 0,$$

$$f_4 = \frac{1}{2r} (r^2 - x^2 - y^2) \geq 0,$$

a A_0 jest operacją R -koniunkcji wyrażoną wzorem [12]

$$XA_0 Y = X + Y - \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Współrzędne naroży płyty określono następująco:

$$(x_2, y_2) = B(-0,5, 1), \quad (x_3, y_3) = C(0,5, 1),$$

$$(x_4, y_4) = D(1, -1), \quad (x_1, y_1) = A(-1, -1).$$

Przyjęto następujące parametry fizyczne i geometryczne:

$$E = 2 \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right], \quad h = 0,02 \text{ [m]}, \quad \rho = 7800 \left[\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right],$$

$$n_c = 5 \left[\frac{1}{\text{s}} \right], \quad b = 1 \text{ [m]} \quad r = 0,25 \text{ m}.$$

Założymy, że

$$(4.2) \quad K_f(t_1, t_2) = \sigma_1^2 e^{-\alpha_1(t_1^2 + t_2^2)},$$

$$K_f(t_1, t_2) = \sigma_1^2 \cos \beta_1 (t_1^2 + t_2^2),$$

przy czym $\sigma_1 = 1$, dla (4.2)₁ i $\sigma_1 = 2$ dla (4.2)₂; $\alpha_1 = 0,1 \left[\frac{1}{\text{s}^2} \right]$, $\beta_1 = 1 \left[\frac{1}{\text{s}^2} \right]$.

Algorytm obliczeń na komputerze można podzielić na trzy etapy:

1. Obliczanie numeryczne całek podwójnych, które występują w układzie równań różniczkowych Galerkin-Ritza.

2. Wyznaczanie częstości drgań własnych i ortogonalizacja funkcji bazowych rozwiązania.

3. Tablicowanie wariancji wg wyprowadzonych wzorów.

Obliczanie całek prowadzi się według wygodnego wzoru kubaturowego podanego przez W. L. RWACZEWA [13]. Obszar całkowania $\Omega \subset R^2$ rozбивa się na elementarne trójkąty, na których całki oblicza się według wzoru

$$(4.3) \quad \iint_A f(x, y) dx dy \frac{\Omega_A}{3} (P_{12} + P_{13} + P_{23}),$$

gdzie

$$P(x, y) = \sum_{i+j=0}^2 a_{ij} x^i y^j$$

oraz gdzie A oznacza trójkątny obszar całkowania, Ω_A pole tego obszaru, P_{12} , P_{13} , P_{23} wartości wielomianu $P(x, y)$ w punktach położonych w środku boków trójkąta A .

W rozważanym przypadku obliczane całki mają postać

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \iint_{\Omega} V_{lm} V_{kj} dx dy &= \iint_{\Omega} \omega^2 T_l(\tilde{X}) T_m(\tilde{Y}) [\omega^2 T_k(\tilde{X}) T_j(\tilde{Y})] dx dy, \\ \iint_{\Omega} \Delta V_{lm} \Delta V_{kj} dx dy &= 4 \iint_{\Omega} \left\{ T_m(\tilde{Y}) \left[(\omega_x'^2 + \omega \omega_{xx}'') T_m(\tilde{X}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\omega \omega_x' \theta T_l'(\tilde{Y}) + \frac{1}{2} \theta^2 \omega^2 T_l''(\tilde{X}) \right] + T_l(\tilde{X}) \left[(\omega_y'^2 + \omega \omega_{yy}'') T_m(\tilde{Y}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\omega \omega_y' \kappa T_m'(\tilde{Y}) + \frac{1}{2} \kappa^2 \omega^2 T_m''(\tilde{Y}) \right] \right\} \left\{ T_j(\tilde{Y}) \left[(\omega_x'^2 + \omega \omega_{xx}'') T_k(\tilde{X}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\omega \omega_x' \theta T_k'(\tilde{X}) + \frac{1}{2} \theta^2 \omega^2 T_k''(\tilde{X}) \right] + T_k(\tilde{X}) \left[(\omega_y'^2 + \omega \omega_{yy}'') T_j(\tilde{Y}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\omega \omega_y' \kappa T_j'(\tilde{Y}) + \frac{1}{2} \kappa^2 \omega^2 T_j''(\tilde{Y}) \right] \right\} dx dy, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \theta x + \theta_1, & \tilde{Y} &= \kappa y + \kappa_1, \\ \omega_x' &= \frac{\partial \omega}{\partial x}, & \omega_{xx}'' &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \\ \omega_y' &= \frac{\partial \omega}{\partial y}, & \omega_{yy}'' &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

a współczynniki normujące

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{2}{b_x - a_x}, & \kappa &= \frac{2}{d_y - c_y}, \\ \theta_1 &= \frac{a_x + b_x}{a_x - b_x}, & \kappa_1 &= \frac{c_y + d_y}{c_y - d_y}. \end{aligned}$$

Parametry a_x , b_x , c_y , d_y określają punkty przecięcia się boków prostokąta, w który wpisany jest kontur obszaru całkowania Ω z osiami układu współrzędnych. Przy obliczaniu całek konieczna jest znajomość w funkcjach podcałkowych dwu pierwszych pochodnych funkcji $\omega(x, y)$ względem zmiennych x i y . Potrzebne są

w tym celu procedury do obliczania tych pochodnych ze wzorów na R -koniunkcje. Pochodne te wyrażają się wzorami

$$(4.5) \quad \begin{aligned} (XA_0 Y)' &= X' + Y' - \frac{XX' + YY'}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \\ (XA_0 Y)'' &= X'' + Y'' - \frac{1}{\sqrt{X^2 - Y^2}} \left[(X')^2 + XX'' + (Y')^2 + YY'' - \frac{(XX' + YY')^2}{X^2 + Y^2} \right]. \end{aligned}$$

Pochodne wielomianów Czebyszewa, które także występują w funkcjach podcałkowych, można wyznaczyć według następujących wzorów rekurencyjnych:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} T_n'(x) &= 2n \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} T_{n-1-2j}(x), \\ T_{n+1}''(x) &= 4(n+1) \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} (j+1)(n-j) T_{n-1-2j}(x), \end{aligned}$$

gdzie górny wskaźnik $[\cdot]$ w sumach określających pochodne oznacza największą część całkowitą liczby w nawiasie nie przekraczającą tej liczby.

W drugim etapie należy obliczać wartości własne symetrycznej macierzy (3.4). Najwygodniej jest w tym celu zastosować zmodyfikowaną metodę iteracyjną QR [2 i 3]. Wyniki uzyskiwane są wtedy szybko i z dużą dokładnością. Następnie należy przeprowadzić metodą Grama-Schmidta ortogonalizację funkcji bazowych $V_{kj}(x, y)$. W trzecim etapie zestawia się w tablice wariancje ugięcia płyty wg wzorów (3.12) i (3.15).

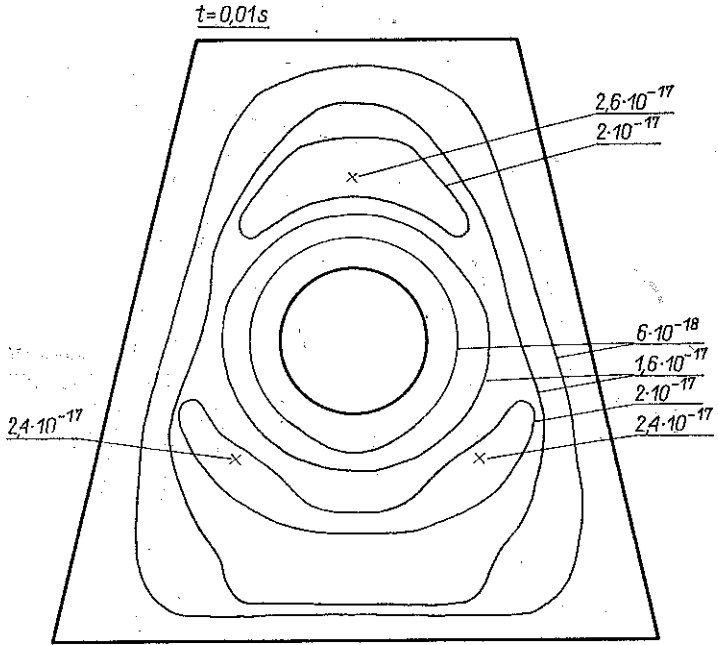
Według przedstawionego algorytmu napisano program na komputer i przeprowadzono obliczenia dla wymienionej uprzednio płyty trapezowej z wyciętym otworem kołowym, sztywno utwierdzonej na całym brzegu.

Obliczenia numeryczne przeprowadzono głównie pod kątem zbadania rozkładów przestrzennych wariancji przemieszczenia płyty — celem lokalizacji jej maksymalnych wartości i zbadano, czy lokalizacja ta nie jest zmienna w czasie. Głębsze badania zmienności wariancji w czasie zostały w tej pracy pominięte jako mniej interesujące. Przyczyną tego był fakt, że analiza taka za pomocą metody prezentowanej w niniejszej pracy w sensie jakościowym nie dałaby wiele nowego, gdyż sprowadziłaby problem do badania reakcji oscylatora harmonicznego na wymuszenia niestacjonarnymi procesami losowymi, a badania tego typu były już przeprowadzone w pracach [6, 14 i 16].

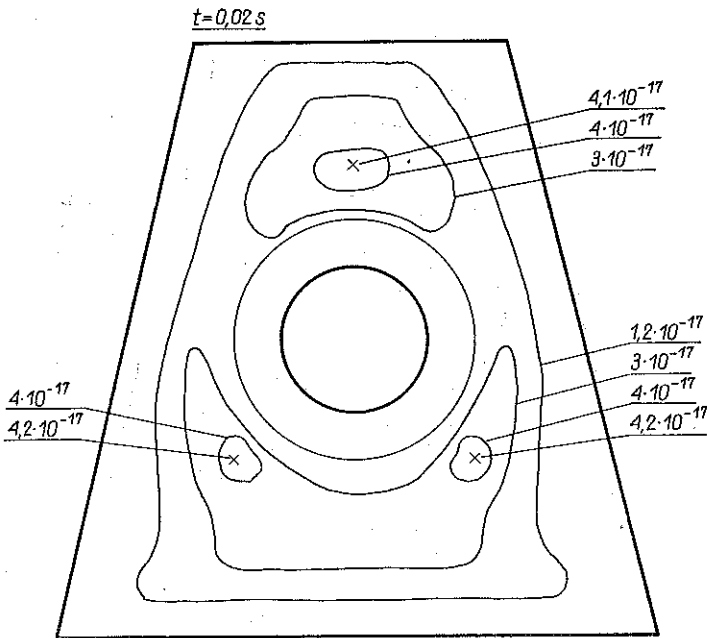
Wariancję ugięcia płyty przedstawiono w postaci warstwicy dla czasów $t_1=0,01$ s, $t_2=0,02$ s, $t_3=9,03$ s i $t_4=5$ s na rysunkach 2, 3, 4 i 5 dla obciążenia losowego o funkcji korelacyjnej $(4.2)_1$, a na rysunkach 6, 7, 8 i 9 dla obciążenia losowego o funkcji korelacyjnej $(4.2)_2$. Maksymalne wartości wariancji w przypadku obu wymuszeń pojawiają się w środkowej górnej części płyty oraz w dolnej części płyty, symetryczne względem pionowej osi układu współrzędnych.

Warstwie wariancji ugięcia płyty przy wymuszeniu polem losowym lokalnie stacjonarnym o funkcji

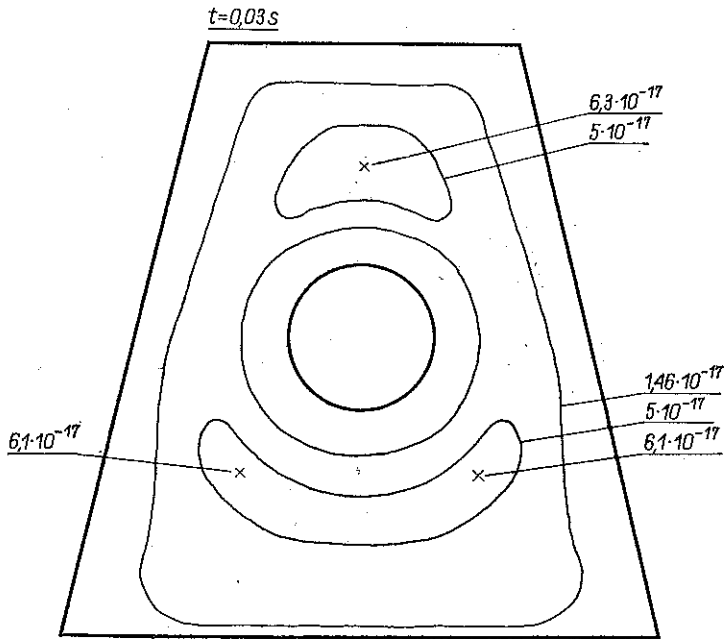
$$\text{korelacyjnej } K_f(t_1, t_2) = \sum_{q=1}^N \sigma_q^2 e^{-\alpha q (t_1^2 + t_2^2)} \quad (\text{rys. 2, 3, 4, 5})$$



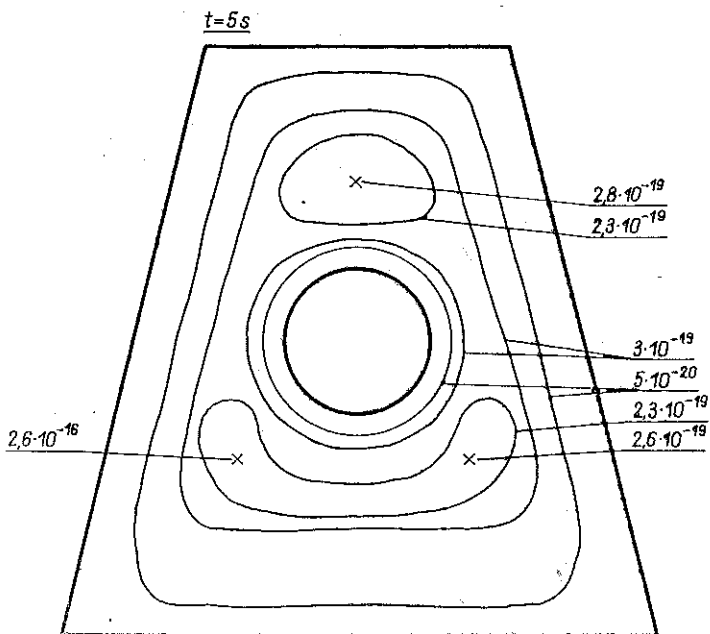
Rys. 2.



Rys. 3



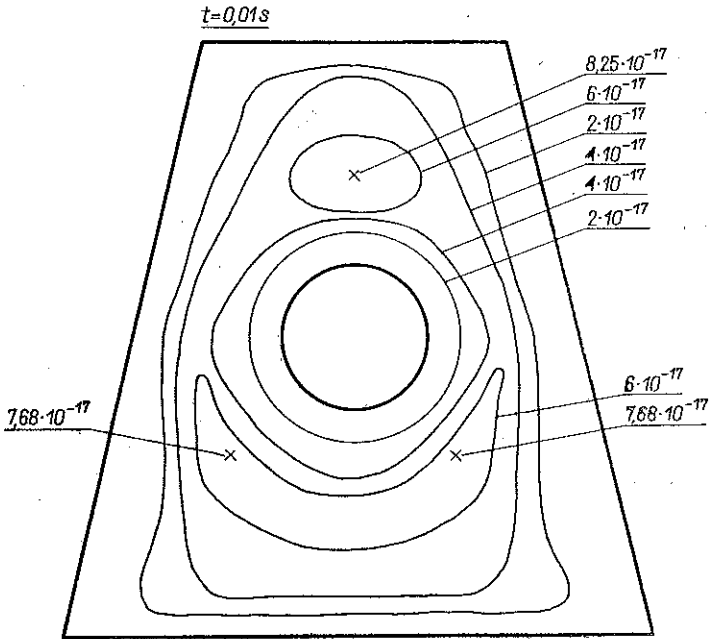
Rys. 4



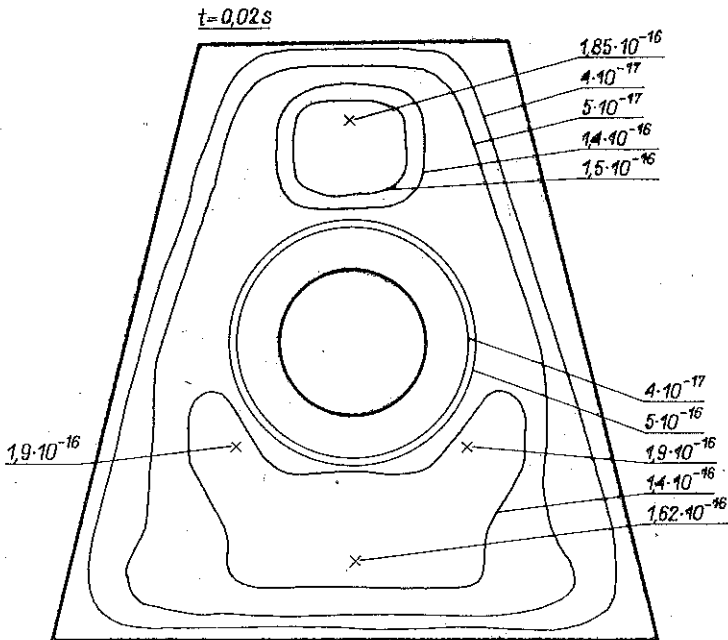
Rys. 5

Warstwice wariancji ugięcia płyty przy wymuszeniu polem losowym niestacjonarnym o funkcji

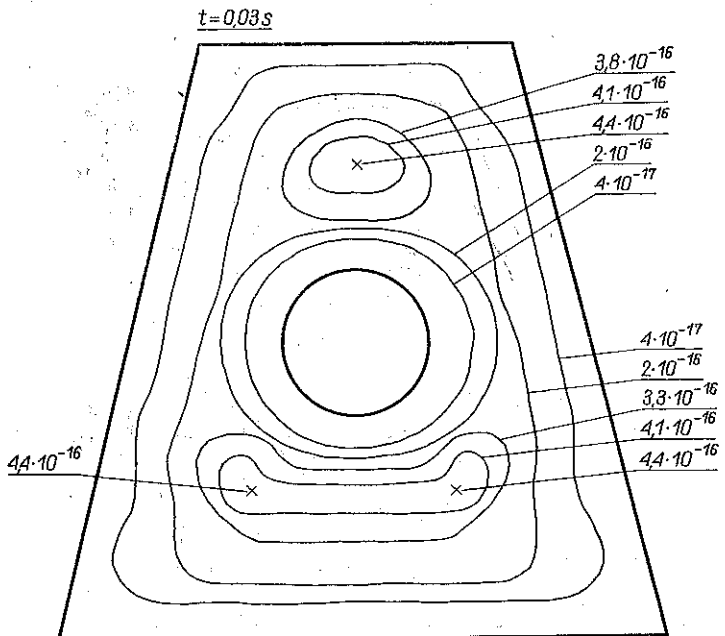
$$\text{korelacyjnej } K_f(t_1, t_2) = \sum_{q=1}^N \sigma_q^2 \cos \beta_q (t_1^2 - t_2^2) \quad (\text{rys. 6, 7, 8, 9})$$



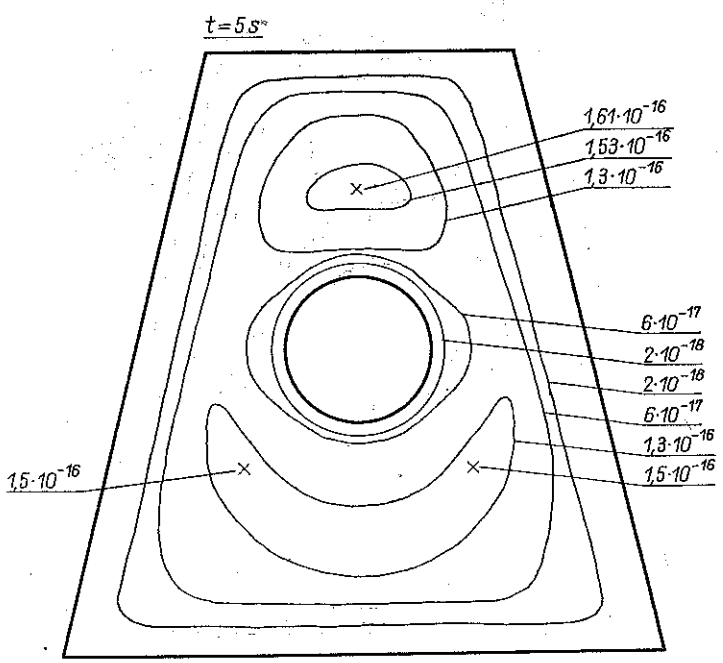
Rys. 6.



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

Tak więc prezentowana w niniejszej pracy metoda pozwala drogą obliczeń numerycznych określić obszary płyty, w których wariancja ugięcia osiąga maksymalne wartości i prawdopodobieństwo przekroczenia dopuszczalnego ugięcia jest największe. Wariancja ta jest punktem wyjścia do dalszych badań nad zagadnieniami dotyczącymi bezpieczeństwa pracy płyt i innych elementów konstrukcyjnych podanych losowym obciążeniom.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. V. V. BOLOTIN, *Statističeskie metody v stroitelnoj mechanike*, I. L. S., Moskva 1965.
2. J. BOTHROYD, *Eigenvalues and eigenvectors of the symmetric systems (A-λB) X=0*, Communication of the ACM, **10**, 3, 181-182, March 1967.
3. P. A. BUSINGER, *Eigenvalues of a real symmetric matrix by the QR method*, Communication of the ACM, **8**, 4, 217-219, April 1965.
4. S. H. CRANDALL cd., *Random vibration*, 1, MIT Press, Cambridge Mass, 1959.
5. S. H. CRANDALL cd., *Random vibration*, 2, MIT Press, Cambridge Mass., 1963.
6. E. CZOGAŁA, *O reakcjach pewnych układów mechanicznych o stałych rozłożonych na wymuszenia przypadkowe*, Praca doktorska, Gliwice 1969.
7. M. F. DIMENTBERG, *Wynużdiennyje kolebanja plastin pri nagruzke predstavljajuščej prostranstvenno-vremennej slučajnyj proces*, I. Ž., 1, 2, 1961.
8. J. DYER, *Response of plates to a decaying and convecting random pressure field*, J. Acoust. Soc. America, **31**, 7, 1959.
9. A. C. ERINGEN, A. LAFAYETTE, *Response of beams and plates to random loads*, J. Appl. Mech., 4, March 1957.
10. N. A. NIKOLAJENKO, *Vierojatnostnyje metody dynamičesko- rasčeta mašinostroitel'nych konstrukcij*, Mašinostroenie, Moskva 1967.
11. V. A. PALMOV, *Tonkaja plastina pod vozdejstviem slučajnoj nagruzki*, PMM, 25, 3, 1962.
12. V. L. RVAČEW i in., *Metod R-funkcij v zadačach ob izgibe i kolebanijach plastin složnoj formy*, Naukova Dumka, Kiev 1973.
13. L. V. RAKOVA, N. G. SKLEPUS, E. E. BEZLUDNYI, *Približennoe vyčislenie dvojných integralov po metodu V. L. Rvačeva*, Izvestia, AN BSSR, ser. FMN, 1, 129-132, 1969.
14. B. SKALMIERSKI, A. TYLIKOWSKI, *Procesy stochastyczne w dynamice*, PWN, Warszawa 1972.
15. K. SOB CZYK, *Metody dynamiki statystycznej*, PWN, Warszawa 1973.
16. A. TYLIKOWSKI, *Niestacjonarne procesy w układach mechanicznych wywołane pewnymi zaburzeniami losowymi*, Praca doktorska, Gliwice 1969.
17. A. WABERSKI, *Reaction of continuous dynamic systems with complex form under time-space random fields*, 8-th IFIP Conference, Wurzburg 1977.

Резюме

СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛИТ СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ, ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННЫХ ПО КРАЯМ

В работе представлен новый математический метод определения пробабилистических характеристик колеблющихся плит со сложной формой, жестко закрепленных по краям. В основах этого метода лежит применение некоторых специальных функций, называемых R-функциями. С целью представления метода определены, путем численных расчетов, временно-пространственные распределения вариации перемещения трапецеидальной плиты, с вырезанным в центре круговым отверстием, для двух типов вынуждающих нагрузок о характере нестационарных случайных полей.

SUMMARY

STOCHASTIC VIBRATIONS OF PLATE HAVING COMPLEX FORM AND CLAMPED ON THE BOUNDARY

A new mathematical approach for evaluation of probabilistic characteristics of vibrating plates, having complex form and are clamped on the boundary, is presented. The method bases on application of certain special functions called R -functions. For illustration of the method the time-space distributions of the variance of displacement of a trapezoidal plate with a circular hole a center for two kinds of forced loadings, which have character of nonstationary random fields, are evaluated numerically.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
INSTYTUT MECHANIKI TEORETYCZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 kwietnia 1977 r.