

FAŁA PRZYSPIESZENIA W OŚRODKU KONSOLIDUJĄCYM

RYSZARD DZIĘCIELAK (POZNAŃ)

W pracy rozpatrzono propagację fali przyspieszenia w ośrodku porowatym o sprężystym szkielecie nasyconym cieczą. Dla ogólnego przypadku równań ruchu ośrodka dwufazowego napisano warunki propagacji tej fali. Podano nierówność będącą odpowiednikiem warunku silnej eliptryczności dla ośrodka jednofazowego. Wyprowadzono równanie amplitudy fali przyspieszenia. Jako przykład rozpatrzono propagację fali walcowej w ośrodku konsolidującym o modelu Biota. W ośrodku propagują się dwie fale podłużne i fala poprzeczna. Dysypacja energii wywołana względ-
nym ruchem cieczy i szkieletu nie wpływa na prędkości propagacji fal, powoduje natomiast tłumienie amplitudy w miarę oddalania się od źródeł zaburzenia. Zmiana amplitudy związana jest również z geometrią fali.

1. WSTĘP

Celem pracy jest zbadanie fali przyspieszenia w ośrodku konsolidującym. Podstawę rozważań stanowią sformułowane przez BIOTA [2] równania ruchu ośrodka porowatego o sprężystym szkielecie, którego pory wypełnione są cieczą. Otrzymane przez Biota równania ruchu zostały wykorzystane przez wielu autorów do rozwiązania szeregu zagadnień szczegółowych propagacji fal w tego rodzaju ośrodkach. Należy tutaj przykładowo wymienić prace DERESIEWICZA i współautorów [4–8], prace JONES'A [9 i 10] oraz prace Instytutu Sejsmologii Uzbekkiej Akademii Nauk [1 i 11–14].

Wymienione wyżej równania ruchu były również przedmiotem weryfikacji doświadczalnej. Badano propagację fal w skałach (wapień, kreda, dolomit, piaskowiec, granit) nasyconych wodą i w piaskowcu roponośnym [15 i 18]. Wyniki doświadczeń przedstawione w pracy [15] pozwoliły jej autorom na stwierdzenie, że podane przez Biota równania ruchu ośrodka porowatego nasyconego cieczą dobrze opisują propagację fal w skałach o małej porowatości. Do takiego wniosku prowadzą też wyniki pracy [18].

2. RÓWNANIA RUCHU OŚRODKA KONSOLIDUJĄCEGO

Podane przez BIOTA [2] równania ruchu ośrodka konsolidującego mają postać

$$(2.1) \quad \begin{aligned} N\nabla^2 u_i + [(A+N)u_k + QU_k]_{,ki} &= \rho_{11} \ddot{u}_i + \rho_{12} \ddot{U}_i + b(\dot{u}_i - \dot{U}_i), \\ (QU_k + RU_k)_{,ki} &= \rho_{12} \ddot{u}_i + \rho_{22} \ddot{U}_i - b(\dot{u}_i - \dot{U}_i), \end{aligned}$$

przy czym u_i i U_2 są współrzędnymi wektorów przemieszczenia odpowiednio szkie-

letu i cieczy; A, N, Q, R są stałymi ośrodka [3]; b związane jest ze współczynnikiem przepuszczalności k i porowatością f ośrodka — zależnością

$$(2.2) \quad b = \frac{\mu f^2}{k},$$

w której μ jest lepkością cieczy; $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$ są współczynnikami dynamicznymi wyrażonymi przez gęstości $\rho_{(s)}$ szkieletu i $\rho_{(c)}$ cieczy (odniesionymi do jednostki objętości ośrodka dwufazowego) następująco:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \rho_{(s)} &= \rho_{11} + \rho_{12} = (1-f) \rho_s, \\ \rho_{(c)} &= \rho_{12} + \rho_{22} = f \rho_c; \end{aligned}$$

przez ρ_s i ρ_c oznaczono odpowiednio gęstości szkieletu i cieczy. Współczynniki dynamiczne spełniają nierówności [2]

$$(2.4) \quad \rho_{11} > 0, \quad \rho_{12} \leq 0, \quad \rho_{22} > 0, \quad \rho_{11} \rho_{22} - \rho_{12}^2 > 0.$$

Równania ruchu (2.1) są szczególnym przypadkiem równań

$$(2.5) \quad \begin{aligned} A_i^{\alpha\beta} u^j \|_{\alpha\beta} + B_i^{\alpha\beta} U^j \|_{\alpha\beta} &= \rho_{11} \ddot{u}_i + \rho_{12} \ddot{U}_i + b(\dot{u}_i - \dot{U}_i), \\ B_i^{\alpha\beta} u^j \|_{\alpha\beta} + C_i^{\alpha\beta} U^j \|_{\alpha\beta} &= \rho_{12} \ddot{u}_i + \rho_{22} \ddot{U}_i - b(\dot{u}_i - \dot{U}_i), \end{aligned}$$

w których funkcje materiałowe są następujące:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} A_i^{\alpha\beta} &= N g_{ij} g^{\alpha\beta} + (A + N) \delta_i^\alpha \delta_j^\beta, \\ B_i^{\alpha\beta} &= Q \delta_i^\alpha \delta_j^\beta, \quad C_i^{\alpha\beta} = R \delta_i^\alpha \delta_j^\beta, \end{aligned}$$

przy czym

$$A_i^{\alpha\beta} = A_j^{\beta\alpha}, \quad B_i^{\alpha\beta} = B_j^{\beta\alpha}, \quad C_i^{\alpha\beta} = C_j^{\beta\alpha}.$$

3. WARUNKI PROPAGACJI FALI PRZYSPIESZENIA

Rozpatrzmy ruchomą powierzchnię \mathcal{S} określoną równaniem

$$(3.1) \quad t = \Psi(X^\alpha).$$

Jeśli przez N_α oznaczymy wektor jednostkowy, normalny do \mathcal{S} , to zachodzą związki [17]

$$(3.2) \quad N_\alpha = \frac{\Psi_{,\alpha}}{\sqrt{\Psi_{,\rho} \Psi_{,\rho}}}, \quad u = \frac{1}{\sqrt{\Psi_{,\rho} \Psi_{,\rho}}}, \quad N_\alpha = u \Psi_{,\alpha},$$

gdzie u jest prędkością propagacji powierzchni \mathcal{S} .

Rozpatrujemy przypadek propagacji w ośrodku konsolidującym powierzchni nieciągłości \mathcal{S} , na której funkcje

$$\begin{aligned} u^i(X^\alpha, t), & \quad \frac{\partial u^i(X^\alpha, t)}{\partial X^\alpha}, & \quad \frac{\partial u^i(X^\alpha, t)}{\partial t}, \\ U_i(X^\alpha, t), & \quad \frac{\partial U^i(X^\alpha, t)}{\partial X^\alpha}, & \quad \frac{\partial U^i(X^\alpha, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

są ciągłe, a nieciągłe są drugie i wyższe pochodne funkcji $u^i(X^\alpha, t)$ i $U^i(X^\alpha, t)$. Mamy zatem do czynienia z falą przyspieszenia. Ze względu na wygodę rozważania prowadzić będziemy w kartezjańskim układzie współrzędnych. Z równań zgodności [17] mamy następujące skoki pochodnych:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \llbracket u^j_{,\alpha\beta} \rrbracket &= a^j N_\alpha N_\beta, & \llbracket u^j_{,tt} \rrbracket &= u^2 a^j, \\ \llbracket U^j_{,\alpha\beta} \rrbracket &= A^j N_\alpha N_\beta, & \llbracket U^j_{,tt} \rrbracket &= u^2 A^j, \end{aligned}$$

gdzie a^j i A^j są odpowiednio amplitudami fal przyspieszenia w szkielecie i cieczy, u jest prędkością propagacji powierzchni \mathcal{S} .

Przejdziemy do analizy równań ruchu (2.5). Równania te spełnione są po obu stronach powierzchni nieciągłości \mathcal{S} , zatem spełnione są tożsamości

$$(3.4) \quad \llbracket A_i^{\alpha\beta} u^j_{,\alpha\beta} \rrbracket + \llbracket B_i^{\alpha\beta} U^j_{,\alpha\beta} \rrbracket = \llbracket \rho_{11} u_{i,tt} \rrbracket + \llbracket \rho_{12} U_{i,tt} \rrbracket + \llbracket b(u_{i,t} - U_{i,t}) \rrbracket$$

oraz

$$(3.5) \quad \llbracket B_i^{\alpha\beta} u^j_{,\alpha\beta} \rrbracket + \llbracket C_i^{\alpha\beta} U^j_{,\alpha\beta} \rrbracket = \llbracket \rho_{12} u_{i,tt} \rrbracket + \llbracket \rho_{22} U_{i,tt} \rrbracket - \llbracket b(u_{i,t} - U_{i,t}) \rrbracket.$$

Funkcje materiałowe $A_{ij}^{\alpha\beta}$, $B_{ij}^{\alpha\beta}$, $C_{ij}^{\alpha\beta}$, współczynniki dynamiczne ρ_{11} , ρ_{12} , ρ_{22} i współczynnik b są ciągłe. Skoki drugich pochodnych funkcji $u^j(X^\alpha, t)$ i $U^j(X^\alpha, t)$ określone są wzorami (3.3). Podstawiając je do równań (3.4) i (3.5), otrzymujemy

$$(3.6) \quad \begin{aligned} (A_i^{\alpha\beta} N_\alpha N_\beta - \rho_{11} u^2 \delta_{ij}) a^j + (B_i^{\alpha\beta} N_\alpha N_\beta - \rho_{12} u^2 \delta_{ij}) A^j &= 0, \\ (B_i^{\alpha\beta} N_\alpha N_\beta - \rho_{12} u^2 \delta_{ij}) a^j + (C_i^{\alpha\beta} N_\alpha N_\beta - \rho_{22} u^2 \delta_{ij}) A^j &= 0 \end{aligned}$$

albo (w dowolnym układzie współrzędnych)

$$(3.7) \quad \left(\begin{bmatrix} A_i^{\alpha\beta} & B_i^{\alpha\beta} \\ B_i^{\alpha\beta} & C_i^{\alpha\beta} \end{bmatrix} N_\alpha N_\beta - \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{bmatrix} u^2 g_{ij} \right) \begin{bmatrix} a_j \\ A_j \end{bmatrix} = 0.$$

Tensor

$$(3.8) \quad \begin{bmatrix} A_i^{\alpha\beta} & B_i^{\alpha\beta} \\ B_i^{\alpha\beta} & C_i^{\alpha\beta} \end{bmatrix} N_\alpha N_\beta$$

jest tensorem akustycznym. Ze względu na symetrię względem głównej przekątnej macierzy jest on tensorem symetrycznym.

Warunek (3.7) jest warunkiem propagacji powierzchni \mathcal{S} . Wynika z niego, że amplitudy a^j i A^j są wektorami własnymi tensora akustycznego. Odpowiada im sześć rzeczywistych kwadratów prędkości propagacji, które są wartościami własnymi tensora akustycznego. Jeżeli te wartości własne są dodatnie, to istnieją rzeczywiste u i powierzchnia może się propagować. Warunek istnienia niezerowych amplitud ma postać

$$(3.9) \quad \det \left(\begin{bmatrix} A_i^{\alpha\beta} & B_i^{\alpha\beta} \\ B_i^{\alpha\beta} & C_i^{\alpha\beta} \end{bmatrix} N_\alpha N_\beta - \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{bmatrix} u^2 g_{ij} \right) = 0.$$

Z warunku tego wyznaczymy prędkości propagacji. Rozwiązania układu równań (3.7) określają wektory a^j i A^j z dokładnością do kierunku, a nie długości. Nie okre-

śląją one zatem rzeczywistej amplitudy. Równanie określające zmiany rzeczywistych amplitud przedstawiono w dalszej części pracy.

Jeżeli znane są amplitudy a^i i A^i , to odpowiadający im kwadrat prędkości propagacji można wyliczyć z układu równań (3.6); skąd otrzymujemy

$$(3.10) \quad u^2 = \frac{(A_i^{\alpha\beta} a^i a^j + 2B_i^{\alpha\beta} a^i A^j + C_i^{\alpha\beta} A^i A^j) N_\alpha N_\beta}{\rho_{11} a^k a^k + 2\rho_{12} a^k A^k + \rho_{22} A^k A^k},$$

przy czym $\rho_{11} a^k a^k + 2\rho_{12} a^k A^k + \rho_{22} A^k A^k > 0$. Z (3.10) wynika, że aby dla każdego kierunku propagacji N_α i dla rzeczywistych amplitud a^i i A^i było $u^2 > 0$, musi być spełniona nierówność

$$(3.11) \quad \bigwedge_{a^i, A^i, N_\alpha} (A_i^{\alpha\beta} a^i a^j + 2B_i^{\alpha\beta} a^i A^j + C_i^{\alpha\beta} A^i A^j) N_\alpha N_\beta > 0.$$

Nierówność (3.11) jest odpowiednikiem warunku silnej eliptyczności (warunek S-E [16]) dla ośrodka jednofazowego.

Jeżeli uwzględnimy wzór (3.2), to warunki propagacji możemy inaczej napisać w postaci

$$(3.12) \quad \begin{aligned} (A_i^{\alpha\beta} \Psi_{,\alpha} \Psi_{,\beta} - \rho_{11} \delta_{ij}) a^j + (B_i^{\alpha\beta} \Psi_{,\alpha} \Psi_{,\beta} - \rho_{12} \delta_{ij}) A^j &= 0, \\ (B_i^{\alpha\beta} \Psi_{,\alpha} \Psi_{,\beta} - \rho_{12} \delta_{ij}) a^j + (C_i^{\alpha\beta} \Psi_{,\alpha} \Psi_{,\beta} - \rho_{22} \delta_{ij}) A^j &= 0. \end{aligned}$$

4. PROMIEŃ AKUSTYCZNY. RÓWNANIE AMPLITUDY

Oznaczamy

$$(4.1) \quad \Phi(X^\alpha, t) = t - \Psi(X^\alpha),$$

stad na froncie fali $\Phi = 0$, przy czym $\Phi_{,\alpha} = \Phi_\alpha$, $\Psi_{,\alpha} = \Psi_\alpha$, $\Phi_{,t} = \dot{\Phi}_t$. Przemieszczenia $u^j(X^\alpha, t)$ i $U^j(X^\alpha, t)$ można z kolei przedstawić jako funkcje X^α i Φ :

$$u^j = m^j(X^\alpha, \Phi), \quad U^j = M^j(X^\alpha, \Phi),$$

które po podstawieniu do (2.4) i (2.5) prowadzą do równań

$$(4.2) \quad \begin{aligned} (A_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha \Phi_\beta - \rho_{11} \delta_{ij}) m^j_{,\Phi\Phi} + (B_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha \Phi_\beta - \rho_{12} \delta_{ij}) M^j_{,\Phi\Phi} + \\ + A_i^{\alpha\beta} (m^j_{,\alpha\beta} + m^j_{,\alpha\Phi} \Phi_\beta + m^j_{,\beta\Phi} \Phi_\alpha + m^j_{,\Phi} \Phi_{\alpha\beta}) + \\ + B_i^{\alpha\beta} (M^j_{,\alpha\beta} + M^j_{,\alpha\Phi} \Phi_\beta + M^j_{,\beta\Phi} \Phi_\alpha + M^j_{,\Phi} \Phi_{\alpha\beta}) + b(m^j_{,\Phi} - M^j_{,\Phi}) = 0, \end{aligned}$$

$$(4.3) \quad \begin{aligned} (B_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha \Phi_\beta - \rho_{12} \delta_{ij}) m^j_{,\Phi\Phi} + (C_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha \Phi_\beta - \rho_{22} \delta_{ij}) M^j_{,\Phi\Phi} + \\ + B_i^{\alpha\beta} (m^j_{,\alpha\beta} + m^j_{,\alpha\Phi} \Phi_\beta + m^j_{,\beta\Phi} \Phi_\alpha + m^j_{,\Phi} \Phi_{\alpha\beta}) + \\ + C_i^{\alpha\beta} (M^j_{,\alpha\beta} + M^j_{,\alpha\Phi} \Phi_\beta + M^j_{,\beta\Phi} \Phi_\alpha + M^j_{,\Phi} \Phi_{\alpha\beta}) - b(m^j_{,\Phi} - M^j_{,\Phi}) = 0. \end{aligned}$$

Zgodnie z (3.9) i (3.2) tensor utworzony ze współczynników przy $m^j_{,\Phi\Phi}$ i $M^j_{,\Phi\Phi}$ jest tensorem osobliwym. Pochodne $m^j_{,\Phi\Phi}$ i $M^j_{,\Phi\Phi}$ mogą więc być nieciągłe na powierzchni $\Phi = 0$. W związku z tym przedstawimy u^j i U^j w następującej postaci [17]:

$$(4.4) \quad u^i(X^\alpha, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} S_{\nu+2}(\Phi) g^i_{\nu}(X^\alpha, t),$$

$$(4.5) \quad U^i(X^\alpha, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} S_{\nu+2}(\Phi) G^i_{\nu}(X^\alpha, t),$$

gdzie

$$S_{\nu} = \frac{1}{\nu!} \left[\frac{1}{2} (|\Phi| + \Phi) \right]^{\nu},$$

$\Phi = \Phi(X^\alpha, t)$ a g^i i G^i są funkcjami klasy C^2 . Łatwo sprawdzić, że

$$(4.6) \quad \frac{dS_{\nu}}{d\Phi} = S_{\nu-1}, \quad \frac{dS_1}{d\Phi} = S_0 = \eta(\Phi) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \Phi > 0, \\ 0 & \text{dla } \Phi < 0, \end{cases}$$

$$S_0 S_0 = S_0, \quad S_{\nu} S_0 = S_{\nu}, \quad S_{\mu} S_{\nu} = \frac{(\mu+\nu)!}{\mu! \nu!} S_{\mu+\nu},$$

gdzie $\eta(\Phi)$ jest funkcją Heavyside'a. Rozpoczęcie sumowania w (4.4) i (4.5) od S_2 ma na celu zapewnienie ciągłości przemieszczeń i ich pierwszych pochodnych na powierzchni $\Phi=0$. Zakładamy, że funkcje S_{ν} są liniowo niezależne [19]. Nieciągłe są tylko wyższe pochodne przemieszczeń u^i i U^i . Po obliczeniu odpowiednich pochodnych przemieszczeń przedstawionych wzorami (4.4) i (4.5). Po podstawieniu ich do równań ruchu (2.5) otrzymamy

$$(4.7) \quad \mathcal{L}_{ir}^{(1)}(u^r, U^r) = S_0 f_1(g_0^j; G_0^j) + S_1 f_2(g_1^j; G_1^j; g_{0,\alpha}^j; G_{0,\alpha}^j; g_{0,t}^j; G_{0,t}^j; g_0^j; G_0^j) +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} S_{\nu+2} [f_{\nu+2}(g_{\nu+2}^j; G_{\nu+2}^j; g_{\nu+1,\alpha}^j; G_{\nu+1,\alpha}^j; g_{\nu+1,t}^j; G_{\nu+1,t}^j; g_{\nu+1}^j; G_{\nu+1}^j) + \mathcal{L}_{ir}^{(1)}(g_{\nu}^r; G_{\nu}^r)] = 0,$$

$$(4.8) \quad \mathcal{L}_{ir}^{(2)}(u^r, U^r) = S_0 f_1(g_0^j; G_0^j) + S_1 f_2(g_1^j; G_1^j; g_{0,\alpha}^j; G_{0,\alpha}^j; g_{0,t}^j; G_{0,t}^j; g_0^j; G_0^j) +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} S_{\nu+2} [f_{\nu+2}(g_{\nu+2}^j; G_{\nu+2}^j; g_{\nu+1,\alpha}^j; G_{\nu+1,\alpha}^j; g_{\nu+1,t}^j; G_{\nu+1,t}^j; g_{\nu+1}^j; G_{\nu+1}^j) + \mathcal{L}_{ir}^{(2)}(g_{\nu}^r; G_{\nu}^r)] = 0,$$

gdzie

$$\mathcal{L}_{ir}^{(1)}(g_{\nu}^r, G_{\nu}^r) = A_i^{\alpha} g_{\nu,\alpha\beta}^j + B_i^{\alpha} g_{\nu,\alpha\beta}^j - \rho_{11} g_{\nu,tt}^j - \rho_{12} G_{\nu,tt}^j - b(g_{\nu,t}^j - G_{\nu,t}^j),$$

$$\mathcal{L}_{ir}^{(2)}(g_{\nu}^r, G_{\nu}^r) = B_i^{\alpha} g_{\nu,\alpha\beta}^j + C_i^{\alpha} g_{\nu,\alpha\beta}^j - \rho_{12} g_{\nu,tt}^j - \rho_{22} G_{\nu,tt}^j + b(g_{\nu,t}^j - G_{\nu,t}^j).$$

Równania (4.7) i (4.8) muszą być spełnione dla każdego X^α i dla każdego t . Ponieważ funkcje S_{ν} , $\nu=0, 1, 2, \dots$ są liniowo niezależne, przeto każdy ze współczynników przy $S_0, S_1, S_{\nu+2}$ możemy przyrównać do zera. Zamiast układu równań (2.5) otrzymujemy więc następujące układy równań:

$$(4.9) \quad (A_i^{\alpha} g_{\nu,\alpha\beta}^j - \rho_{11} \delta_{ij}) g_0^j + (B_i^{\alpha} g_{\nu,\alpha\beta}^j - \rho_{12} \delta_{ij}) G_0^j = 0,$$

$$(B_i^{\alpha} g_{\nu,\alpha\beta}^j - \rho_{12} \delta_{ij}) g_0^j + (C_i^{\alpha} g_{\nu,\alpha\beta}^j - \rho_{22} \delta_{ij}) G_0^j = 0;$$

$$(4.10) \quad \begin{aligned} & (A_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha \Phi_\beta - \rho_{11} \delta_{ij}) g_1^j + (B_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha \Phi_\beta - \rho_{12} \delta_{ij}) G_1^j + \\ & \quad + (A_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha g_{0,\beta}^j + A_i^{\alpha\beta} \Phi_\beta g_{0,\alpha}^j - 2\rho_{11} g_{0,\tau}^i + A_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} g_0^j) + \\ & \quad + (B_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha G_{0,\beta}^j + B_i^{\alpha\beta} \Phi_\beta G_{0,\alpha}^j - 2\rho_{12} G_{0,\tau}^i + B_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} G_0^j) - b(g_0^i - G_0^i) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (B_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha \Phi_\beta - \rho_{12} \delta_{ij}) g_1^j + (C_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha \Phi_\beta - \rho_{12} \delta_{ij}) G_1^j + \\ & \quad + (B_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha g_{0,\beta}^j + B_i^{\alpha\beta} \Phi_\beta g_{0,\alpha}^j - 2\rho_{12} g_{0,\tau}^i + B_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} g_0^j) + \\ & \quad + (C_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha G_{0,\beta}^j + C_i^{\alpha\beta} \Phi_\beta G_{0,\alpha}^j - 2\rho_{22} G_{0,\tau}^i + C_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} G_0^j) + b(g_0^i - G_0^i) = 0; \end{aligned}$$

$$(4.11) \quad \begin{aligned} & (A_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha \Phi_\beta - \rho_{11} \delta_{ij}) g_{v+2}^j + (B_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha \Phi_\beta - \rho_{12} \delta_{ij}) G_{v+2}^j + \\ & \quad + [A_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha g_{v+1,\beta}^j + A_i^{\alpha\beta} \Phi_\beta g_{v+1,\alpha}^j - 2\rho_{11} g_{v+1,\tau}^i + (A_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} - b\delta_{ij}) g_{v+1}^j] + \\ & \quad + [B_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha G_{v+1,\beta}^j + B_i^{\alpha\beta} \Phi_\beta G_{v+1,\alpha}^j - 2\rho_{12} G_{v+1,\tau}^i + (B_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} + b\delta_{ij}) G_{v+1}^j] + \\ & \quad \quad \quad + \mathcal{L}_{ir}^{(1)}(g_v^r, G_v^r) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (B_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha \Phi_\beta - \rho_{12} \delta_{ij}) g_{v+2}^j + (C_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha \Phi_\beta - \rho_{22} \delta_{ij}) G_{v+2}^j + \\ & \quad + [B_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha g_{v+1,\beta}^j + B_i^{\alpha\beta} \Phi_\beta g_{v+1,\alpha}^j - 2\rho_{12} g_{v+1,\tau}^i + (B_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} + b\delta_{ij}) g_{v+1}^j] + \\ & \quad + [C_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha G_{v+1,\beta}^j + C_i^{\alpha\beta} \Phi_\beta G_{v+1,\alpha}^j - 2\rho_{22} G_{v+1,\tau}^i + (C_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} - b\delta_{ij}) G_{v+1}^j] + \\ & \quad \quad \quad + \mathcal{L}_{ir}^{(2)}(g_v^r, G_v^r) = 0. \end{aligned}$$

Zacznijmy analizę od układu równań (4.9), przy czym założymy, że wszystkie sześć prędkości propagacji są różne i rzeczywiste. Porównując go z układem równań (3.12) widzimy, że g_0^j i G_0^j muszą być proporcjonalne do odpowiadających im amplitud, tzn.

$$(4.12) \quad g_0^j = \kappa_0 a^j$$

oraz

$$(4.13) \quad G_0^j = \kappa_0 A^j.$$

Przez κ_0 oznaczono skalarowy parametr, przy czym na ogół $\kappa_0 = \kappa_0(X^\alpha, t)$. W celu wyznaczenia tego parametru pomnożmy pierwsze z równań (4.10) przez a^i , drugie przez A^i . Po dodaniu stronami, wykorzystaniu równań (3.12) i wzorów (4.12), (4.13), otrzymamy równanie różniczkowe cząstkowe na κ_0 :

$$(4.14) \quad \begin{aligned} & a^i (A_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha \kappa_{0,\beta} + A_i^{\alpha\beta} \Phi_\beta \kappa_{0,\alpha} - 2\rho_{11} \delta_{ij} \kappa_{0,\tau}) a^j + A^i (C_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha \kappa_{0,\beta} + \\ & \quad + C_i^{\alpha\beta} \Phi_\beta \kappa_{0,\alpha} - 2\rho_{22} \delta_{ij} \kappa_{0,\tau}) A^j + (A^i a^j + A^j a^i) (B_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha \kappa_{0,\beta} + \\ & \quad + B_i^{\alpha\beta} \Phi_\beta \kappa_{0,\alpha} - 2\rho_{12} \delta_{ij} \kappa_{0,\tau}) + \kappa_0 a^i (A_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha a_{,\beta}^j + A_i^{\alpha\beta} \Phi_\beta a_{,\alpha}^j - 2\rho_{11} \delta_{ij} a_{,\tau}^j + \\ & \quad + A_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} a^j + B_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha A_{,\beta}^j + B_i^{\alpha\beta} \Phi_\beta A_{,\alpha}^j - 2\rho_{12} \delta_{ij} A_{,\tau}^j + B_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} A^j) + \\ & \quad + \kappa_0 A^i (B_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha a_{,\beta}^j + B_i^{\alpha\beta} \Phi_\beta a_{,\alpha}^j - 2\rho_{12} \delta_{ij} a_{,\tau}^j + B_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} a^j + C_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha A_{,\beta}^j + \\ & \quad + C_i^{\alpha\beta} \Phi_\beta A_{,\alpha}^j - 2\rho_{22} \delta_{ij} A_{,\tau}^j + C_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} A^j) - b\kappa_0 (a^i - A^i) (a^i - A^i) = 0. \end{aligned}$$

Niech $X^\alpha(\lambda)$, $t(\lambda)$ będzie daną parametrycznie krzywą określoną równaniami różniczkowymi:

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \frac{dX^\alpha}{d\lambda} &= [(A_i^{\alpha\beta} + A_i^{\beta\alpha}) a^i a^j + (B_i^{\alpha\beta} + B_i^{\beta\alpha}) (A^i a^j + A^j a^i) + \\ &+ (C_i^{\alpha\beta} + C_i^{\beta\alpha}) A^i A^j], \\ \frac{dt}{d\lambda} &= -2 [\rho_{11} a^i a^j + \rho_{12} (A^i a^j + A^j a^i) + \rho_{22} A^i A^j] \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Zakładamy, że parametr λ wybrany jest w ten sposób, że dla $t=0$ mamy $\lambda=0$. Krzywa (4.15) jest bicharakterystyką układu równań (2.5). Krzywa ta leży na trójwymiarowej powierzchni $\Phi=0$ [17].

Przyjęliśmy uprzednio, że a^i i A^i są wektorami własnymi tensora akustycznego Q_{ij} . Rzeczywista amplituda różni się od tych wektorów mnożnikiem κ_0 . Równanie na skalar κ_0 jest więc równaniem określającym rzeczywistą amplitudę. Różniczkując funkcję złożoną $\kappa_0(X^\alpha(\lambda), t(\lambda))$, otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_0}{d\lambda} &= \frac{\partial\kappa_0}{\partial X^\alpha} \frac{dX^\alpha}{d\lambda} + \frac{\partial\kappa_0}{\partial t} \frac{dt}{d\lambda} = [(A_i^{\alpha\beta} + A_i^{\beta\alpha}) a^i a^j + \\ &+ (B_i^{\alpha\beta} + B_i^{\beta\alpha}) (A^i a^j + A^j a^i) + (C_i^{\alpha\beta} + C_i^{\beta\alpha}) A^i A^j] \Phi_{\beta\kappa_0, \alpha} - \\ &- 2 [\rho_{11} a^i a^j + \rho_{12} (A^i a^j + A^j a^i) + \rho_{22} A^i A^j] \delta_{ij} \kappa_{0, t}. \end{aligned}$$

Suma pierwszych trzech wierszy w równaniu (4.14) jest więc równa $d\kappa_0/d\lambda$; sumę pozostałych wierszy, zgodnie z (4.15), oznaczmy przez $\kappa_0 P(\lambda)$. Możemy zatem cząstkowe równanie różniczkowe (4.14) napisać w postaci równania zwyczajnego

$$(4.16) \quad \frac{d\kappa_0}{d\lambda} + \kappa_0 P(\lambda) = 0,$$

w którym

$$(4.17) \quad \begin{aligned} P(\lambda) &= a^i (A_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha a^j, \beta} + A_i^{\alpha\beta} \Phi_{\beta a^j, \alpha} - 2\rho_{11} \delta_{ij} a^j_{, i} + A_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} a^j + \\ &+ B_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha A^j, \beta} + B_i^{\alpha\beta} \Phi_{\beta A^j, \alpha} - 2\rho_{12} \delta_{ij} A^j_{, i} + B_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} A^j) + \\ &+ A^i (B_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha a^j, \beta} + B_i^{\alpha\beta} \Phi_{\beta a^j, \alpha} - 2\rho_{12} \delta_{ij} a^j_{, i} + B_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} a^j + \\ &+ C_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha A^j, \beta} + C_i^{\alpha\beta} \Phi_{\beta A^j, \alpha} - 2\rho_{22} \delta_{ij} A^j_{, i} + C_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} A^j) - \\ &- b(a^i - A^i)(a^i - A^i). \end{aligned}$$

Równanie (4.16) otrzymano przy założeniu, że wszystkie prędkości propagacji są różne i rzeczywiste. Opisuje ono zmianę amplitudy wzdłuż promienia akustycznego. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$(4.18) \quad \kappa_0 = C \exp\left(-\int_0^\lambda P(\lambda) d\lambda\right),$$

gdzie parametr C jest stały na całej krzywej $\{\lambda\}$. Z rozwiązania (4.18) wynika, że jeżeli w jednym punkcie promienia jest $\kappa_0 \neq 0$, ($\kappa_0 = 0$), to w każdym innym punkcie tego promienia $\kappa_0 \neq 0$, ($\kappa_0 = 0$).

Z kolei wyznaczmy g_1^k i G_1^k traktując g_0^k i G_0^k jako znane. Układ równań (4.10) ze względu na niewiadome g_1^k i G_1^k jest układem równań algebraicznych, którego wyznacznik jest równy zeru. Funkcje g_1^k i G_1^k możemy więc otrzymać z dokładnością do wektorów kolinearnych z a^k i A^k . Przedstawimy je w postaci

$$(4.19) \quad g_1^k = \kappa_1 a^k + k_1^k, \quad G_1^k = \kappa_1 A^k + \bar{k}_1^k.$$

Do układu równań (4.10) wchodzi jedynie wielkości k_1^k i \bar{k}_1^k , które można wyznaczyć.

Przechodzimy teraz do znalezienia równania określającego parametr κ_1 . Rozważamy układ równań (4.11) dla $\nu=0$; mnożymy (4.11)₁ przez a^j , a (4.12)₂ przez A^j . Po dodaniu stronami, podstawieniu wielkości (4.19) i porównaniu z (4.16) otrzymujemy równanie różniczkowe

$$(4.20) \quad \frac{d\kappa_1}{d\lambda} + \kappa_1 P(\lambda) = K_1(\lambda),$$

w którym

$$(4.21) \quad K_1(\lambda) = -a^t [A_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha k_{1,\beta}^j + A_i^{\alpha\beta} \Phi_\beta k_{1,\alpha}^j - 2\rho_{11} k_{1,t}^j \delta_{ij} + \\ + B_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha \bar{k}_{1,\beta}^j + B_i^{\alpha\beta} \Phi_\beta \bar{k}_{1,\alpha}^j - 2\rho_{12} \bar{k}_{1,t}^j \delta_{ij} + (A_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} - b\delta_{ij}) k_{1,t}^j + \\ + (B_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} + b\delta_{ij}) \bar{k}_{1,t}^j] - A^t [B_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha k_{1,\beta}^j + B_i^{\alpha\beta} \Phi_\beta k_{1,\alpha}^j - 2\rho_{12} \delta_{ij} k_{1,t}^j + \\ + C_i^{\alpha\beta} \Phi_\alpha \bar{k}_{1,\beta}^j + C_i^{\alpha\beta} \Phi_\beta \bar{k}_{1,\alpha}^j - 2\rho_{22} \delta_{ij} \bar{k}_{1,t}^j + (B_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} + b\delta_{ij}) k_{1,t}^j + \\ + (C_i^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} - b\delta_{ij}) \bar{k}_{1,t}^j] - [a^t \mathcal{L}_{ir}^{(1)}(g_0^r, G_0^r) + A^t \mathcal{L}_{ir}^{(2)}(g_0^r, G_0^r)].$$

Znając κ_1 można z kolei wyznaczyć g_2^k i G_2^k , korzystając z układu równań (4.11). Postępując analogicznie mamy ogólnie

$$g_{\nu+2}^k = \kappa_{\nu+2} a^k + k_{\nu+2}^k, \\ G_{\nu+2}^k = \kappa_{\nu+2} A^k + \bar{k}_{\nu+2}^k, \\ \frac{d\kappa_\nu}{d\lambda} + \kappa_\nu P(\lambda) = K_\nu(\lambda), \quad \nu=0, 1, 2, \dots$$

5. FAŁA WALCOWA

Załóżmy, że w ośrodku propaguje się fala walcowa. Układy odniesienia $\{x^t\}$ i $\{X^\alpha\}$ są walcowymi układami współrzędnych $x^1 = X^1 = r$, $x^2 = X^2 = \vartheta$, $x^3 = X^3 = z$. Tensory metryczne i symbole Christoffela są następujące:

$$(5.1) \quad g_{ik} = g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{ik} = g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \text{pozostałe} = 0.$$

Zgodnie ze wzorami (2.6) funkcje materiałowe mają wartości

$$(5.2) \quad \begin{aligned} A_{11}^{11} &= A_{22}^{22} = A_{33}^{33} = P, & A_{11}^{22} &= N/r^2, & A_{11}^{33} &= N, \\ A_{22}^{11} &= Nr^2, & A_{33}^{11} &= N, & A_{12}^{12} &= A_{21}^{21} = A_{13}^{13} = A_{31}^{31} = A + N, \\ B_{11}^{11} &= B_{22}^{22} = B_{33}^{33} = B_{12}^{12} = B_{21}^{21} = B_{13}^{13} = B_{31}^{31} = Q, \\ C_{11}^{11} &= C_{22}^{22} = C_{33}^{33} = C_{12}^{12} = C_{21}^{21} = C_{13}^{13} = C_{31}^{31} = R. \end{aligned}$$

Ponieważ front fali jest powierzchnią walca, więc mamy

$$(5.3) \quad N_\alpha = (1, 0, 0).$$

Zgodnie z (3.8) i (5.3) tensor akustyczny w rozważanym przypadku jest następujący:

$$(5.4) \quad \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & Nr^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 \\ Q & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a warunki propagacji (3.7) mają postać

$$(5.5) \quad \left(\begin{bmatrix} P & 0 & 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & Nr^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 \\ Q & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - u^2 \begin{bmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{11} r^2 & 0 & 0 & \rho_{12} r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 0 & 0 & \rho_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{12} r^2 & 0 & 0 & \rho_{22} r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{12} & 0 & 0 & \rho_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix} = 0.$$

Z warunków propagacji (5.5) otrzymujemy trzy układy równań:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} (P - \rho_{11} u^2) a^1 + (Q - \rho_{12} u^2) A^1 &= 0, \\ (Q - \rho_{12} u^2) a^1 + (R - \rho_{22} u^2) A^1 &= 0; \end{aligned}$$

$$(5.7) \quad \begin{aligned} (N - \rho_{11} u^2) a^2 - \rho_{12} u^2 A^2 &= 0, \\ \rho_{12} a^2 + \rho_{22} A^2 &= 0; \end{aligned}$$

$$(5.8) \quad \begin{aligned} (N - \rho_{11} u^2) a^3 - \rho_{12} u^2 A^3 &= 0, \\ \rho_{12} a^3 + \rho_{22} A^3 &= 0. \end{aligned}$$

Warunki propagacji (5.7) i (5.8) są identyczne i dotyczą propagacji fal poprzecznych. Warunek istnienia niezerowych amplitud tych fal jest następujący:

$$(5.9) \quad \begin{vmatrix} N - \rho_{11} u^2 & -\rho_{12} u^2 \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

skąd otrzymujemy rzeczywiste prędkości (por. (2.4)):

$$(5.10) \quad u_2 = u_3 = \left[\frac{N}{\rho_{11} \left(1 - \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{11} \rho_{22}} \right)} \right]^{1/2}.$$

Z warunków propagacji (5.7) i (5.8) wynika, że istnieją amplitudy fal poprzecznych:

$$(5.11) \quad \begin{aligned} & a^k(0, 1, 0) \quad \text{i} \quad A^k \left(0, -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}, 0 \right); \\ & a^k(0, 0, 1) \quad \text{i} \quad A^k \left(0, 0, -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}} \right). \end{aligned}$$

Ponieważ zawsze $\rho_{12} < 0$, $\rho_{22} > 0$, przeto amplitudy cieczy i szkieletu mają te same znaki. Amplitudy a^k i A^k fali poprzecznej w ogólności mogą być przedstawione w postaci

$$a_{\perp}^k = \alpha a^k + \beta A^k, \quad A_{\perp}^k = \alpha A^k + \beta a^k,$$

gdzie α i β są dowolnymi skalarami.

Spełnienie układu równań (5.6) jest warunkiem propagacji fali podłużnej. Niezerowe amplitudy istnieją, jeżeli

$$(5.12) \quad \begin{vmatrix} P - \rho_{11} u_1^2 & Q - \rho_{12} u_1^2 \\ Q - \rho_{12} u_1^2 & R - \rho_{22} u_1^2 \end{vmatrix} = 0,$$

co prowadzi do równania [2]

$$(5.13) \quad (\rho_{11} \rho_{22} - \rho_{12}^2) u_1^4 - (R \rho_{11} + P \rho_{22} - 2Q \rho_{12}) u_1^2 + (PR - Q^2) = 0,$$

w którym [2]

$$(5.14) \quad \rho_{11} \rho_{22} - \rho_{12}^2 > 0, \quad R \rho_{11} + P \rho_{22} - 2Q \rho_{12} > 0, \quad PR - Q^2 > 0.$$

Z równania (5.13) i nierówności (5.14) wynika, że istnieją dwa dodatnie kwadraty prędkości propagacji $u_1^2 \neq u_2^2$. W ośrodku propagują się zatem dwie fale podłużne z prędkościami u_1 i u_2 . Odpowiadają im amplitudy

$$(5.15) \quad a_i^k(1, 0, 0), \quad A_i^k \left(-\frac{P + Q - \rho_{11} u_i^2}{Q + R - \rho_{22} u_i^2}, 0, 0 \right), \quad k = 1, 2.$$

Dyskusję relacji między prędkościami propagacji a amplitudami znaleźć można w pracy BIOTA [2].

W dalszych rozważaniach pominiemy indeks k nad amplitudą i prędkością fali podłużnej, dla której mamy:

$$(5.16) \quad \begin{aligned} a^i &= (1, 0, 0), & A^i &= \left(-\frac{P+Q-\rho_1 u^2}{Q+R-\rho_2 u^2}, 0, 0 \right), \\ u &= \text{const}, & t &= \Psi(x^i) = \frac{r}{u}, \\ \Phi &= t - \frac{r}{u}. \end{aligned}$$

Równania różniczkowe bicharakterystyki układów równań (2.5) mają postać (4.15), która w tym przypadku daje

$$(5.17) \quad \begin{aligned} \frac{dr}{d\lambda} &= -\frac{2}{u} [P(a^1)^2 + 2Q(a^1)(A^1) + R(A^1)^2] = -C_r, \\ \frac{dt}{d\lambda} &= -2[\rho_{11}(a^1)^2 + 2\rho_{12}(a^1)(A^1) + \rho_{22}(A^1)^2], & \frac{d\mathcal{G}}{d\lambda} &= \frac{dz}{d\lambda} = 0. \end{aligned}$$

W celu określenia amplitudy wyznaczamy ze wzoru (4.17)

$$(5.18) \quad P(r) = -\frac{C_r}{2r} - b(a^1 - A^1)^2.$$

Równanie amplitudy (4.16) ma zatem postać

$$(5.19) \quad \frac{d\kappa_0}{dr} + \left[\frac{1}{2r} + \frac{b(a^1 - A^1)^2}{C_r} \right] \kappa_0 = 0,$$

a jego rozwiązaniem jest funkcja

$$(5.20) \quad \kappa_0 = \frac{C_0}{\sqrt{r}} e^{-b(a^1 - A^1)^2 r/C_r};$$

mamy więc

$$(5.21) \quad g_0^1 = \kappa_0 a^1, \quad G_0^1 = \kappa_0 A^1.$$

Podstawiamy g_0^1 i G_0^1 do układu równań (4.10) i otrzymujemy układ dwóch równań algebraicznych, liniowych na wyznaczenie g_1^1 i G_1^1 :

$$(5.22) \quad \begin{aligned} (P - \rho_{11} u^2) g_1^1 + (Q - \rho_{12} u^2) G_1^1 + u(Pg_0^1 + QG_0^1) \frac{b(a^1 - A^1)^2}{C_r} - \\ - bu(g_0^1 - G_0^1) = 0, \\ (Q - \rho_{12} u^2) g_1^1 + (R - \rho_{22} u^2) G_1^1 + u(Qg_0^1 + RG_0^1) \frac{b(a^1 - A^1)^2}{C_r} + \\ + bu(g_0^1 - G_0^1) = 0. \end{aligned}$$

Wyznacznik tego układu równań jest równy zeru; stąd

$$(5.23) \quad g_1^1 = \kappa_1 a^1 + \bar{\kappa}_1^1, \quad G_1^1 = \kappa_1 A^1 + \bar{\kappa}_1^1.$$

Po podstawieniu (5.23) do (5.22) otrzymujemy układ równań z niewiadomymi k_1^1 i \bar{k}_1^1 . Jest on taki sam jak (5.22), należy tylko zamienić g_1^1 i G_1^1 odpowiednio na k_1^1 i \bar{k}_1^1 . Układ równań jest nieoznaczony. Po dodaniu stronami mamy równanie

$$(5.24) \quad k_1^1 - \frac{a^1}{A^1} \bar{k}_1^1 = -\mu_w \kappa_0,$$

gdzie

$$\mu_w = \frac{b(a^1 - A^1)^2 u}{C_r} \frac{Pa^1 + Q(a^1 + A^1) + RA^1}{P + Q - p_1 u^2}.$$

Przyjmujemy

$$(5.25) \quad k_1^1 = (k_1^1, 0, 0),$$

wtedy

$$(5.26) \quad \bar{k}_1^1 = \left((k_1^1 + \mu_w \kappa_0) \frac{A^1}{a^1}, 0, 0 \right).$$

Z kolei wyznaczmy κ_1 z równania (4.20), którego prawa strona

$$(5.27) \quad K_1(r) = \frac{k_1^1}{a^1} \left[b(a^1 - A^1)^2 + \frac{C_r}{2r} \right] - \beta_1 \kappa_0 + \frac{3}{8} \frac{C_r u}{r^2} \kappa_0,$$

gdzie

$$\beta_1 = b(a^1 - A^1) \left\{ \mu_w \frac{A^1}{a^1} \left[1 + \frac{2}{u C_r} (Qa^1 + RA^1)(a^1 - A^1) \right] + \frac{b(a^1 - A^1)^3 u}{2C_r} \right\}.$$

Po podstawieniu (5.27) do (4.20) i zamianie zmiennych mamy równanie

$$(5.28) \quad \frac{d\kappa_1}{dr} + \left(\frac{1}{2r} + \frac{b(a^1 - A^1)^2}{C_r} \right) \kappa_1 = -\frac{k_1^1}{a^1} \left[\frac{1}{2r} + \frac{b(a^1 - A^1)^2}{C_r} \right] + \frac{\beta_1}{C_r} \kappa_0 - \frac{3}{8} u \frac{\kappa_0}{r^2},$$

którego rozwiązaniem jest funkcja

$$(5.29) \quad \kappa_1 = -\frac{k_1^1}{a^1} + \left(\frac{C_1}{C_0} + \frac{\beta_1}{C_r} r + \frac{3}{8} \frac{u}{r} \right) \kappa_0,$$

albo wyraźniej

$$(5.30) \quad \kappa_1 = -\frac{k_1^1}{a^1} + \left(\frac{C_1}{\sqrt{r}} + \frac{C_0 \beta_1}{C_r} \sqrt{r} + \frac{3}{8} C_0 \frac{u}{r^{3/2}} \right) e^{-b(a^1 - A^1)^2 r / C} \kappa_0.$$

Z kolei

$$(5.31) \quad g_1^1 = \left(\frac{C_1}{C_0} + \frac{\beta_1}{C_r} r + \frac{3}{8} \frac{u}{r} \right) \kappa_0 a^1 \delta_1^1,$$

$$(5.32) \quad G_1^i = \left(\frac{C_1}{C_0} + \frac{\beta_1}{C_0} r + \frac{3}{8} \frac{u}{r} + \frac{\mu_w}{a^1} \right) \kappa_0 A^1 \delta_i^1.$$

Zgodnie z (4.4) i (4.5) mamy przemieszczenia:

$$(5.33) \quad u^t = \frac{C_0 a^t}{\sqrt{r}} e^{-b(a^1 - A^1)^2 r / C_r} \left[S_2 \left(t - \frac{r}{u} \right) + \left(\frac{C_1}{C_0} + \frac{\beta_1}{C_r} r + \frac{3}{8} \frac{u}{r} \right) S_3 \left(t - \frac{r}{u} \right) + \dots \right],$$

$$(5.34) \quad U^t = \frac{C_0 A^t}{\sqrt{r}} e^{-b(a^1 - A^1)^2 r / C_r} \left[S_2 \left(t - \frac{r}{u} \right) + \left(\frac{C_1}{C_0} + \frac{\beta_1}{C_r} r + \frac{3}{8} \frac{u}{r} + \frac{\mu_w}{a^1} \right) S_3 \left(t - \frac{r}{u} \right) + \dots \right].$$

6. WNIOSKI

Tensor akustyczny (3.8) ośrodka dwufazowego, opisanego równaniami ruchu (2.5) jest tensorem symetrycznym o macierzy szóstego stopnia. Jego wektorami własnymi są amplitudy a^i i A^i , którym odpowiada sześć rzeczywistych kwadratów prędkości propagacji. Jeżeli te wartości własne są dodatnie, to istnieją rzeczywiste prędkości propagacji i powierzchnia nieciągłości może się propagować. Kwadraty prędkości propagacji są dodatnie, jeżeli dla każdego kierunku propagacji N_α i rzeczywistych amplitud a^i i A^i spełniona jest nierówność (3.11). Jest ona odpowiednikiem warunku S-E w ośrodku jednofazowym.

W pracy rozpatrzono propagację fali walcowej. Z przykładu tego wynika, że w ośrodku porowatym nasyconym cieczą (model Biota) propagują się dwie fale podłużne i fala poprzeczna.

Z warunków propagacji (3.6) widać, że uwzględnienie w równaniach ruchu (2.5) wyrazów $b(\dot{u}_i - \dot{U}_i)$, związanych z dysypacją energii wywołaną względnym ruchem cieczy i szkieletu, nie wpływa na prędkość propagacji u . Jest to konsekwencją definicji fali przyspieszenia, w której przyjęto, że przemieszczenia i ich pierwsze pochodne są ciągłe. Dysypacja energii znajduje natomiast odbicie w wartości parametru κ_0 , który opisuje zmianę amplitudy w miarę oddalania się od źródła zaburzenia. Dla rozpatrywanej w przykładzie fali walcowej, zgodnie z (5.20)

$$\kappa_0 = \frac{C_0}{\sqrt{r}} e^{-b(a^1 - A^1)^2 r / C_r}, \quad r = (x_k x_k)^{1/2}, \quad k = 1, 2.$$

W celu porównania wyznaczono również κ_0 dla fali płaskiej

$$\kappa_0 = C_0 e^{-b(a^1 - A^1)^2 x / C_r}$$

i sferycznej

$$\kappa_0 = \frac{C_0}{r} e^{-b(a^1 - A^1)^2 r / C_r}, \quad r = (x_k x_k)^{1/2}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Ponieważ sposób postępowania przy wyznaczaniu κ_0 dla fali płaskiej i sferycznej jest taki sam jak w przypadku fali walcowej, ograniczono się tylko do przedstawienia wyników. Współczynniki κ_0 dla wszystkich trzech rodzajów fal możemy zapisać jednym wzorem

$$\kappa_0 = C_0 r^{-\frac{n-1}{2}} e^{-b(a^1 - A^1)^2 r/C_r}, \quad r = (x_i x_i)^{1/2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

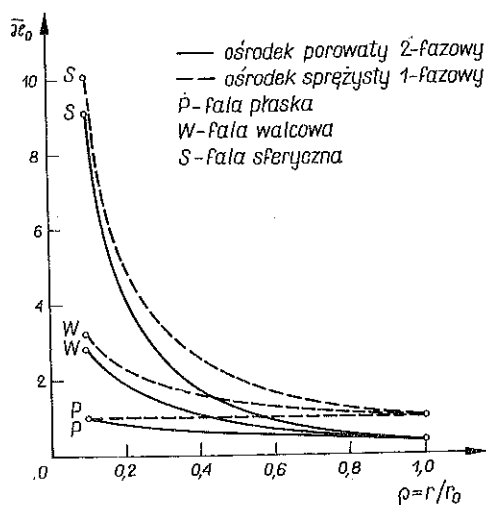
gdzie n zależy od geometrii fali: dla fali płaskiej $n=1$, dla fali walcowej $n=2$, dla fali sferycznej $n=3$. W przypadku cieczy nielepkiej ($b=0$) lub przy braku ruchu względnego cieczy i szkieletu ($a^1 - A^1 = 0$) otrzymujemy

$$\kappa_0 = C_0 r^{-\frac{n-1}{2}},$$

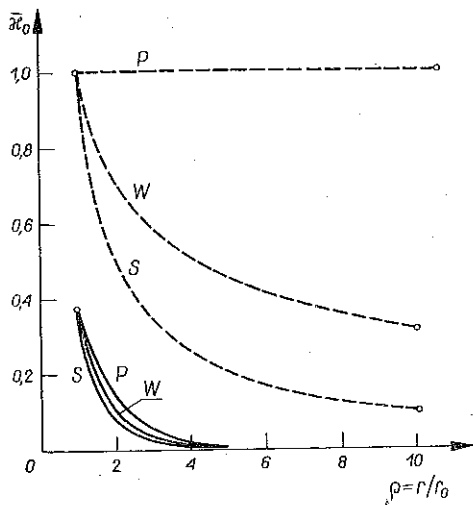
jak dla jednofazowego ośrodka sprężystego. Zatem czynnik $r^{-\frac{n-1}{2}}$ przedstawia zmianę amplitudy związaną z geometrią fali. Z kolei $\exp[-b(a^1 - A^1)^2 r/C_r]$ oznacza tłumienie amplitudy na skutek ruchu względnego cieczy i szkieletu. Wprowadzając bezwymiarowy parametr $\rho = r/r_0$, gdzie $r_0 = C_r/b(a^1 - A^1)^2$ jest długością charakterystyczną, możemy napisać

$$\bar{\kappa}_0 = \frac{\kappa_0}{C_0} r_0^{\frac{n-1}{2}} = \rho^{-\frac{n-1}{2}} e^{-\rho}.$$

Na rys. 1 i 2 przedstawiono zmienność współczynnika $\bar{\kappa}_0$ jako funkcję bezwymiarowego parametru ρ . Dla porównania pokazano również $\bar{\kappa}_0$ dla ośrodka sprężystego.



Rys. 1.



Rys. 2.

UWAGA

Po złożeniu pracy do druku autor został poinformowany przez prof. W. DERSKIEGO, że otrzymał On równania ruchu ośrodka konsolidującego (o modelu Biota) w postaci

$$(1) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho_1 \ddot{u}_i + b(\dot{u}_i - \dot{U}_i), \\ \sigma_{,i} &= \rho_2 \ddot{U}_i - b(\dot{u}_i - \dot{U}_i). \end{aligned}$$

W pracy, która ukaże się w Biuletynie PAN, wyjaśniono znaczenie gęstości ρ_1 i ρ_2 . Z porównania prawych stron równań (1) i równań Biota (2.1) wynika, że uzyskane w niniejszej pracy rezultaty można natychmiast sprowadzić do rezultatów dla ośrodka opisanego równaniami (1), przyjmując $\rho_{11} = \rho_1$, $\rho_{22} = \rho_2$ i $\rho_{12} = 0$. Zmniejszy się w tym przypadku ilość fal — jak widać z (5.11) nie wystąpią fale poprzeczne w cieczy.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Т. У. Артыков, Я. У. Саатов, И. Исаков, *Влияние жидкости на распространение волн в пористых средах*, Изв. АН Узб. ССР, 2, 1972]
2. M. A. BIOT, *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid*, J. Acoust. Soc. Am., 28, 2, 168–191, 1956.
3. M. A. BIOT, D. G. WILLIS, *The elastic coefficients of the theory of consolidation*, J. Appl. Mech., 24, 594–601, 1957.
4. H. DERESIEWICZ, *The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: I. Reflection of plane waves at a free plane boundary (Non-dissipative case)*, Bull. Seism. Soc. Am., 50, 4, 599–607, 1960.
5. H. DERESIEWICZ, *The effect of boundaries in wave propagation in a liquid-filled porous solid: II. Love waves in a porous layer*, Bull. Seism. Soc. Am., 51, 1, 51–59, 1961.
6. H. DERESIEWICZ, J. T. RICE, *The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: III. Reflection of plane waves at a free plane boundary (General case), IV. Surface waves in a half-space*, Bull. Seism. Soc. Am., 52, 3, 595–638, 1962.
7. H. DERESIEWICZ, J. T. RICE, *The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: V. Transmission across a plane interface, VI. Love waves in a double surface layer, VII. Surface waves in a half-space in presence of a liquid layer*, Bull. Seism. Soc. Am., 54, 1, 409–430, 1964.
8. H. DERESIEWICZ, B. WOLF, *The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: VIII. Reflection of plane waves at an irregular boundary*, Bull. Seism. Soc. Am., 54, 4, 1537–1561, 1964.
9. J. P. JONES, *Reyleigh waves in a porous, elastic, saturated solid*, J. Acoust. Soc. Am., 33, 7, 959–962, 1961.
10. J. P. JONES, *Effect of a uniform flow on elastic waves in a porous saturated, elastic solid*, J. Acoust. Soc. Am., 34, 9, 1172–1175, 1962.
11. Б. Мардонов, О. Ибраимов, *Распространение цилиндрической волны в пористой среде*, Изв. АН Узб. ССР, 4, 69–72, 1972.
12. Т. Г. Рахманов, *К распространению и отражению сферической волны в двухкомпонентной среде*, Изв. АН Узб. ССР, 4, 72–74, 1972.
13. И. Исаков, Б. Мордонов, *Распространение сферической волны в двухкомпонентной пористой среде*, Изв. АН Узб. ССР, 4, 46–49, 1972.
14. А. Юсупов, Т. Г. Рахманов, Я. Ч. Саатов, *распространение плоской волны в изотропном полупространстве насыщенном жидкостью*, Изв. АН Узб. ССР, 6, 56–57, 1971.
15. T. TODD, G. SIMMONS, *Effect of pore pressure on the velocity of compressional waves in low-porosity rocks*, J. Geophys. Res., 77, 20, 3731–3743, 1972.
16. C. TRUESDEL, W. NOLL, *The non-linear field theories of mechanics*, Handbuch der Physik, III/3, Springer Verlag 1965.
17. Z. WESOŁOWSKI, *Zagadnienia dynamiczne nieliniowej teorii sprężystości*, PWN, Warszawa 1974.
18. C. H. YEW, P. N. JOGI, *Study of wave motions in fluid saturated porous rocks*, J. Acoust. Soc. Am., 60, 1, 2–8, 1976.
19. R. COURANT, H. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, II, Interscience, New York 1962.

Резюме

ВОЛНА УСКОРЕНИЯ В КОНСОЛИДИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

В работе рассмотрено распространение волны ускорения в пористой среде, с упругим скелетом, насыщенной жидкостью. Для общего случая уравнений движения двухфазной среды составлены условия распространения этой волны. Приведено неравенство будущее эквивалентом условия сильной эллиптичности для однофазной среды. Выведено уравнение амплитуды волны ускорения. Как пример рассмотрено распространение цилиндрической волны в консолидирующей среде с моделью Биота. В среде распространяются две продольные волны и поперечная волна. Диссипация энергии, вызванная относительным движением жидкости и скелета, не влияет на скорость распространения волн, вызывает же затухание амплитуды по мере удаления от источника возмущения. Изменение амплитуды связано тоже с геометрией волны.

SUMMARY

ACCELERATION WAVE IN A CONSOLIDATING MEDIUM

The paper deals with an acceleration wave propagation in a porous medium with fluid saturated skeleton. In a general case of motion equations for a two-phase medium the propagation conditions of the wave are presented. An inequality, which corresponds to the strong ellipticity condition of an uni-phase medium, is given. The equation for the acceleration wave amplitude is derived.

As an example the propagation of a cylindrical wave in a Biot type consolidating medium is considered. Two longitudinal waves and one transverse wave may propagate in this medium. The energy dissipation involved by relative motion of fluid and skeleton does not influence on the wave propagation velocities, causes however amplitude attenuation when it moves away from a disturbance source. The amplitude change is also due to wave geometry.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 lutego 1977 r.