

## DRGANIA SKRĘTNE PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH O BISYMETRYCZNYCH PRZEKROJACH OTWARTYCH

CZESŁAW SZYM CZAK (GDAŃSK)

W pracy wyprowadzono macierz mas dla pręta cienkościennego o bisymetrycznym przekroju otwartym. Wykorzystując macierz geometryczną ustaloną w poprzedniej pracy autora [4], bada się problem drgań skrętnych przy uwzględnieniu stałej siły osiowej. Podano przykład liczbowy, w którym za pomocą dynamicznego kryterium stateczności wyznaczono siłę krytyczną swobodnie podpartego dwuteownika o zmiennej skokowo szerokości póltek. Stwierdzono, że siła ta może być mniejsza od siły krytycznej dwuteownika o stałej, minimalnej szerokości póltek.

### 1. WSTĘP

Drgania skrętne prętów cienkościennych o przekrojach otwartych były już przedmiotem szeregu prac. Poniżej nawiązuje się wyłącznie do opracowań [1, 2 i 3]. O ile praca [1] dotyczy tylko przekrojów stałych, to w pracy [2] przedstawiono rozwiązanie tego problemu dla dwuteownika o zmiennym, bisymetrycznym przekroju otwartym. Podstawę rozwiązania stanowiło wyprowadzone równanie różniczkowe o zmiennych współczynnikach, które rozwiązano metodą różnic skończonych. Dalszym uogólnieniem jest praca [3], w której za pomocą typowej procedury elementów skończonych przedstawiono rozwiązanie zagadnienia dla dowolnych przekrojów otwartych. W pracach [2 i 3] nie rozważano jednak wpływu siły osiowej.

Celem niniejszego opracowania jest uwzględnienie wpływu siły osiowej na drgania skrętne prętów o skokowo-zmiennych przekrojach bisymetrycznych. W tym celu wyprowadzono macierz mas, która w połączeniu z poprzednio podaną w pracy [4] macierzą geometryczną umożliwi wyżej wspomnianą analizę.

Pracę zakończono badaniem dokładności otrzymanego rozwiązania oraz przykładem liczbowym dotyczącym wpływu siły osiowej na częstość drgań własnych dwuteownika o zmiennej skokowo szerokości póltek.

### 2. RÓWNANIA PODSTAWOWE ZAGADNIENIA

Równania różniczkowe ruchu sprężystego układu prętowego o skończonej liczbie stopni swobody, przy uwzględnieniu działania sił osiowych, można napisać w następującej postaci macierzowej [5]:

$$(2.1) \quad M\ddot{U} + (K_L + K_G)U = F,$$

gdzie  $\mathbf{M}$  jest globalną macierzą mas układu,  $\mathbf{K}_L$  jest globalną macierzą sztywności, a  $\mathbf{K}_G$  globalną macierzą geometryczną. Elementami wektora przemieszczeń  $\mathbf{U}$  są składowe przemieszczenia wybranych przekrojów układu prętowego, a elementami wektora sił  $\mathbf{F}$  składowe siły odpowiadających elementom wektora  $\mathbf{U}$ . Równanie (2.1) opisuje ruch układu przy pominięciu tłumienia.

W niniejszej pracy rozpatrzono jedynie drgania własne, przyjmując  $\mathbf{F}=\mathbf{0}$  oraz zakładając, że przemieszczenia mają postać harmoniczną

$$(2.2) \quad \mathbf{U} = \mathbf{Q} e^{i\omega_n t},$$

gdzie  $\mathbf{Q}$  jest wektorem amplitud przemieszczeń  $\mathbf{U}$ ,  $\omega_n$  częstością drgań, a  $t$  jest czasem.

Po wstawieniu funkcji (2.2) do równania (2.1) otrzymuje się układ algebraicznych równań jednorodnych

$$(2.3) \quad [-\omega_n^2 \mathbf{M} + (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G)] \mathbf{Q} = \mathbf{0},$$

który wykorzystuje się do obliczenia częstości drgań własnych  $\omega_n$ . Ponieważ sposób tworzenia globalnych macierzy  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}_L$ ,  $\mathbf{K}_G$  dla całego układu jest znany (np. [5]), zajmiemy się jedynie wyznaczeniem odpowiadających im macierzy  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{k}_L$ ,  $\mathbf{k}_G$  dla pojedynczego elementu  $ik$  (rys. 1).

W przypadku drgań skrętnych prętów cienkościennych wektor amplitud  $\mathbf{q}$  dla elementu  $ik$  obieramy podobnie jak w pracy [4] w postaci

$$(2.4) \quad \mathbf{q}^T = \{\theta_i; \theta'_i l; \theta_k; \theta'_k l\},$$

gdzie  $\theta_i$ ,  $\theta_k$  są kątami skręcenia odpowiednio przekrojów  $i$ ,  $k$ , natomiast  $\theta'_i$ ,  $\theta'_k$  pochodnymi kątów skręcenia tych przekrojów względem zmiennej  $z$ . Długość elementu  $ik$  oznaczono przez  $l$ . Ponieważ dla tak przyjętego wektora  $\mathbf{q}$  macierz sztywności elementu  $\mathbf{k}_L$  oraz macierz geometryczną  $\mathbf{k}_G$  wyznaczono w pracy [4], przeto pozostaje do wyznaczenia jedynie macierz mas elementu  $\mathbf{m}$ .

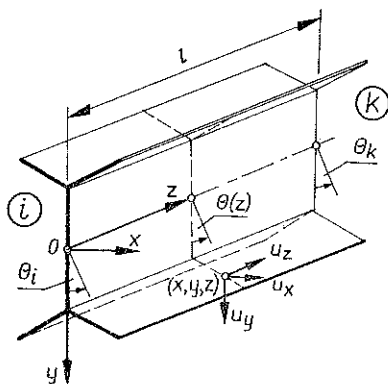
### 3. MACIERZ MAS

Wektor przemieszczeń dowolnego punktu przekroju poprzecznego określonego przez współrzędne  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (rys. 1) można wyrazić poprzez kąt skręcenia przekroju  $\theta(z)$  [1]:

$$(3.1) \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -y \\ x \\ d \\ -\omega \frac{dz}{dz} \end{Bmatrix} \theta(z) = \mathbf{D} \theta(z),$$

gdzie  $\omega$  oznacza pole powierzchni wycinkowej. Kąt skręcenia  $\theta(z)$  wyznaczono z równania różniczkowego skręcania skrępowanego [1],

$$(3.2) \quad \frac{d^4 \theta}{dz^4} - k^2 \frac{d^2 \theta}{dz^2} = 0,$$



Rys. 1.

gdzie  $k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$  oznacza współczynnik zanikania,  $GJ_d$  sztywność skręcania St. Venanta, a  $EJ_\omega$  sztywność skręcania skrępowanego. Rozwiązanie równania (3.2) spełniającego następujące warunki brzegowe na obu końcach elementu  $ik$ :

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_i, & \theta' &= \theta'_i & \text{dla } z=0, \\ \theta &= \theta_k, & \theta' &= \theta'_k & \text{dla } z=l, \end{aligned}$$

można przedstawić w postaci

$$(3.3) \quad \theta(z) = \Phi^T C q,$$

gdzie  $\Phi^T = \{\cosh kz; \sinh kz; kz; 1\}$  oraz gdzie  $C$  jest macierzą kwadratową  $4 \times 4$  współczynników zależnych od  $k$  i  $l$ . Wstawiając (3.3) do równania (3.1) otrzymano

$$(3.4) \quad \mathbf{u} = \mathbf{D} \Phi^T C q = \mathbf{a} q,$$

gdzie przez  $\mathbf{a} = \mathbf{D} \Phi^T C$  oznaczono macierz prostokątną  $3 \times 4$ . Zgodnie z [5] macierz mas można otrzymać po wykonaniu następującego całkowania:

$$(3.5) \quad \mathbf{m} = \int_0^L \int_A \rho \mathbf{a}^T \mathbf{a} \, dz \, dA,$$

gdzie  $A$  oznacza pole przekroju poprzecznego pręta, a  $\rho$  masę właściwą.

Przy założeniu materiału jednorodnego otrzymana w ten sposób macierz mas ma postać

$$(3.6) \quad \mathbf{m} = \frac{\rho I_0}{k \Delta^2} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ \text{---} & b_{22} & -b_{14} & b_{24} \\ \text{SYMETRIA} & & b_{11} & -b_{12} \\ \text{---} & & & b_{22} \end{bmatrix},$$

gdzie  $I_0$  oznacza moment biegunowy przekroju względem początku układu  $x, y, z$  (rys. 1) oraz  $\Delta = 2(1 - \cosh \kappa) + \kappa \sinh \kappa$  i  $\kappa = kl$ .

Wzory na współczynniki  $b_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3, 4$ ) mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= (\cosh \kappa - 1) \left\{ 5 \sinh \kappa - \kappa (4 + \cosh \kappa) - \kappa^2 \sinh \kappa + \frac{1}{3} \kappa^3 \times \right. \\
 &\quad \left. \times (1 + \cosh \kappa) + \frac{I_\omega}{I_0} k^2 [-\kappa \sinh \kappa + \kappa (2 + \cosh \kappa)] \right\}, \\
 b_{22} &= \frac{1}{2\kappa^2} \left\{ 2(\cosh \kappa - 1) [-3 \sinh \kappa + 3\kappa (1 + 2 \cosh \kappa)] - \right. \\
 &\quad - \kappa^2 \sinh \kappa (4 + 5 \cosh \kappa) + \frac{1}{3} \kappa^3 [5 + 2 \cosh \kappa (1 + \cosh \kappa)] + \\
 &\quad + \frac{I_\omega}{I_0} k^2 [2(\cosh \kappa - 1) [\sinh \kappa - \kappa (1 + 2 \cosh \kappa)] + \\
 &\quad \left. + \kappa^2 \sinh \kappa (2 + \cosh \kappa) - \kappa^3] \right\}, \\
 b_{12} &= \frac{1}{2} \left\{ 7 \sinh \kappa (\cosh \kappa - 1) - \kappa (\cosh \kappa - 1) (4 \cosh \kappa + 5) + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{3} \kappa^2 \sinh \kappa (2 \cosh \kappa + 1) - \frac{I_\omega}{I_0} \frac{k^2}{\kappa} (1 - \cosh \kappa) \times \\
 (3.7) \quad &\quad \left. \times [4(1 - \cosh \kappa) + \kappa \sinh \kappa + \kappa^2] \right\}, \\
 b_{13} &= (\cosh \kappa - 1) \left\{ -5 \sinh \kappa + \kappa (2 + 3 \cosh \kappa) - \kappa^2 \sinh \kappa + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{6} \kappa^3 (\cosh \kappa + 1) + \frac{I_\omega}{I_0} k^2 [3 \sinh \kappa - \kappa (2 + \cosh \kappa)] \right\}, \\
 b_{14} &= \frac{1}{2\kappa} \left\{ 8(\cosh \kappa - 1)^2 - 5\kappa \sinh \kappa (\cosh \kappa - 1) + \right. \\
 &\quad + \kappa^2 (2 \cosh \kappa + 1) (\cosh \kappa - 1) - \frac{1}{3} \kappa^3 \sinh \kappa (2 + \cosh \kappa) + \\
 &\quad \left. + \frac{I_\omega}{I_0} k^2 (\cosh \kappa - 1) [4(1 - \cosh \kappa) + \kappa \sinh \kappa + \kappa^2] \right\}, \\
 b_{24} &= \frac{1}{2\kappa^2} \left\{ 6 \sinh \kappa (\cosh \kappa - 1) - 2\kappa (\cosh \kappa - 1) (7 + 2 \cosh \kappa) + \right. \\
 &\quad + \kappa^2 \sinh \kappa (7 + 2 \cosh \kappa) - \frac{1}{3} \kappa^3 [1 + \cosh \kappa (7 + \cosh \kappa)] + \\
 &\quad + \frac{I_\omega}{I_0} k^2 [-2 \sinh \kappa (\cosh \kappa - 1) + 6\kappa (\cosh \kappa - 1) - \\
 &\quad \left. - 3 \kappa^2 \sinh \kappa + \kappa^3 \cosh \kappa] \right\}.
 \end{aligned}$$

Ze względu na skomplikowaną postać tych współczynników rozpatrzono uproszczony wariant macierzy mas  $\mathbf{m}_n$ , otrzymany po rozwinięciu funkcji hiperbolicznych w szeregi potęgowe i pozostawieniu tylko zerowych potęg  $k$ :

$$(3.8) \quad \mathbf{m}_n = \rho I_0 l \begin{bmatrix} \frac{13}{35} + 1,2\mu & \frac{11}{210} + 0,1\mu & \frac{9}{70} - 1,2\mu & -\frac{13}{420} + 0,1\mu \\ \frac{1}{105} + \frac{2}{15}\mu & \frac{13}{420} - 0,1\mu & -\frac{11}{210} - 0,1\mu & -\frac{3}{420} - \frac{1}{30}\mu \\ \frac{13}{35} + 1,2\mu & -\frac{11}{210} - 0,1\mu & \frac{1}{105} + \frac{2}{15}\mu & -\frac{11}{210} - 0,1\mu \\ -\frac{13}{420} + 0,1\mu & -\frac{3}{420} - \frac{1}{30}\mu & -\frac{11}{210} - 0,1\mu & \frac{1}{105} + \frac{2}{15}\mu \end{bmatrix},$$

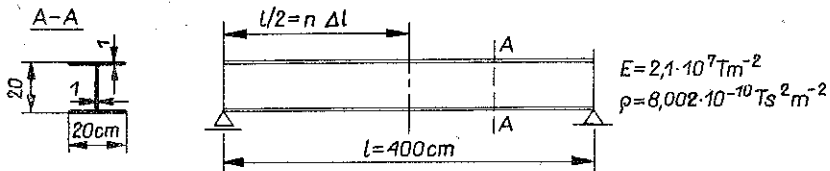
SYMETRIA

gdzie  $\mu = \frac{I_0}{I_0 l^2}$ .

Można wykazać, że w ten sposób otrzymana macierz  $\mathbf{m}_n$  odpowiada przyjęciu zamiast ścisłego rozwiązania równania różniczkowego (3.2) — przybliżenia w postaci wielomianu stopnia trzeciego względem  $z$ . Odpowiadające takiemu przybliżeniu macierze  $\mathbf{k}_{Lu}$  i  $\mathbf{k}_{Gu}$  podano także w pracy [4].

#### 4. PRZYKŁADY LICZBOWE

W celu określenia dokładności obliczenia częstości drgań własnych skrętnych za pomocą wyprowadzonej macierzy sztywności — obliczono je dla swobodnie podpartego dwuteownika (rys. 2). Częstości drgań własnych obliczono na podstawie układu równań (2.3) za pomocą komputera Odra 1204. Wykorzystano przy tym symetrię układu, ograniczając się do obliczenia dwóch najniższych częstości drgań



Rys. 2.

o postaciach symetrycznych. Wyniki obliczeń dla podziału połowy pręta na kolejno 1, 2, 4, i 6 elementów podano w tablicy 1, porównując je ze ścisłymi wartościami częstości obliczonych na podstawie pracy [1]. Następnie na tym samym przykładzie swobodnie podpartego dwuteownika (rys. 2) porównano dwie pierwsze częstości drgań o postaciach symetrycznych obliczone na podstawie macierzy  $\mathbf{m}$  i  $\mathbf{k}_L$  z wartościami otrzymanymi przy wykorzystaniu macierzy przybliżonych  $\mathbf{m}_n$  i  $\mathbf{k}_{Lu}$ . Wyniki podano w tablicy 2.

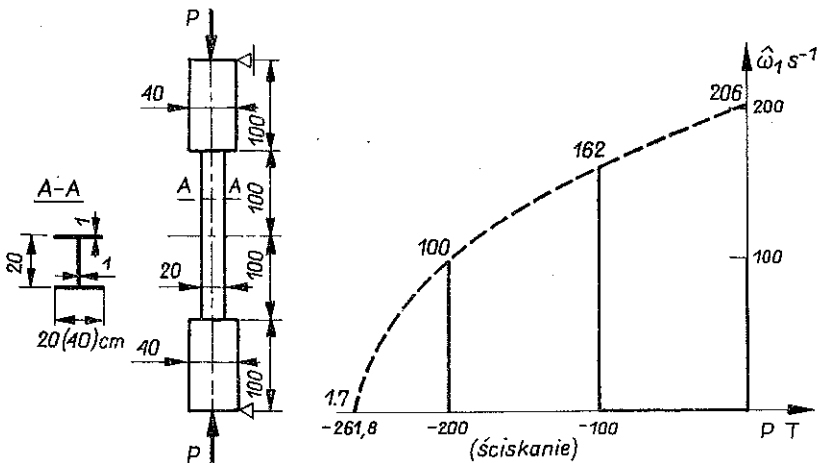
Tablica 1. Częstość drgań własnych

Ilość elementów	1	2	4	6
Pierwsza częstość $\omega_1 \text{ s}^{-1}$	246,9	208,2	207,2	207,1
Ścisła wartość $\omega_1 \text{ s}^{-1}$	207,1			
Błąd %	19,2	0,5	0,05	0,00
Druga częstość $\omega_2 \text{ s}^{-1}$	—	1760	1428	1406
Ścisła wartość $\omega_2 \text{ s}^{-1}$	1400			
Błąd %	—	26	2,0	0,4

Tablica 2. Częstości drgań własnych

Ilość elementów	Macierz $m, k_L$		Macierz $m_n, k_{Ln}$		Wartości ścisłe	
	$\omega_1 \text{ s}^{-1}$	$\omega_2 \text{ s}^{-1}$	$\omega_1 \text{ s}^{-1}$	$\omega_2 \text{ s}^{-1}$	$\omega_1 \text{ s}^{-1}$	$\omega_2 \text{ s}^{-1}$
2	208,2	1760	207,5	1710	207,1	1400
4	207,2	1428	207,12	1423		
6	207,1	1406	207,10	1405		

Ostatni przykład dotyczy wpływu siły osiowej na częstość skrętnych drgań własnych swobodnie podpartego dwuteownika o skokowo zmiennej szerokości półek (rys. 3). Rozważono tylko siły ściskające, wykorzystując symetrię układu. Obliczenia przeprowadzono przy podziale połowy układu na dwa elementy, co, jak wynika z poprzednio podanych przykładów, daje dostatecznie dokładne rozwiązania. Wyniki przedstawiono na rys. 3. Ponieważ pierwsza częstość skrętnych



Rys. 3.

drgań własnych dla siły osiowej  $P=261,8$  T zbliża się do zera, przeto na podstawie dynamicznego kryterium utraty stateczności jest to najniższa siła krytyczna wybożenia skrętnego. Należy przy tym zauważyć, że jest to siła niższa, niż siły krytyczne dla dwuteowników o stałych ekstremalnych szerokościach półek, które wynoszą odpowiednio 334,3 T dla minimalnej szerokości i 854 T dla maksymalnej szerokości półek [4 i 6].

## 5. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawione przykłady liczbowe wykazują dobrą zbieżność obliczonych częstości skrętnych drgań własnych (na podstawie wyprowadzonej macierzy mas) do wartości ścisłych. Dokładniejsze wyniki otrzymano przy tym stosując uproszczone macierze, oparte na aproksymacji kąta skęcenia  $\theta(z)$  parabolą stopnia trzeciego. Wiąże się to, podobnie jak w pracy [4], ze zwiększeniem wartości wszystkich elementów uproszczonej macierzy mas w stosunku do macierzy «dokładnej», a tym samym zwiększenia energii kinetycznej odpowiadającej podstawowej postaci drgań.

W ilorazie Rayleigha

$$\omega_n^2 = \min_Q \frac{Q(K_L + K_G)Q}{QM}$$

zwiększa się w ten sposób mianownik w dużo większym stopniu niż licznik, co prowadzi ostatecznie do mniejszych, a tym samym dokładniejszych wartości częstości drgań własnych. W pracy ograniczono się jedynie do przykładu obliczeń skrętnych drgań własnych, podczas gdy podany macierzowy sposób obliczeń umożliwia także analizę drgań wymuszonych. Ponadto na przykładzie dwuteownika o zmiennej skokowo szerokości półek przedstawionego na rys. 3 potwierdzono możliwość występowania siły krytycznej wybożenia skrętnego niższej, niż siły krytyczne dwuteowników o stałych ekstremalnych szerokościach półek. Ten ostatni fakt stanowi potwierdzenie możliwości wykraczania siły krytycznej dla zmiennego przekroju poza przedział ograniczony siłami krytycznymi prętów o ekstremalnych przekrojach. Należy jeszcze raz zwrócić uwagę, że taka możliwość została wskazana wcześniej w pracy [6], w której uzyskano siłę krytyczną dla przekroju zmiennego większą niż wartość takiej siły dla pręta o stałym maksymalnym przekroju.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

- 1] В. З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Государственное Издательство физико-математической Литературы, Москва 1959.
- 2] Z. CYWIŃSKI, *Statyka i dynamika skręcanego cienkościennego dwuteownika o zmiennym, bismetrycznym przekroju poprzecznym*, Rozpr. Inżyn., 17, 185–217, 1969.
- 3] J. WEKEZER, *Dynamika prętów cienkościennych o zmiennych przekrojach otwartych*, Rozpr. Inżyn., 24, 201–208, 1976.
- 4] Cz. SZYM CZAK, *Wybożenie skrętnie prętów cienkościennych o bismetrycznym przekroju otwartym*, Rozpr. Inżyn., 26, 2, 323–330, 1978.

5. J. S. PRZEMIENIECKI, *Theory of matrix structural analysis*, McGraw-Hill, New York 1968.  
 6. Z. CYWIŃSKI, C. F. KOLLBRUNNER, *Drillknicken dünnwandiger I-Stabe mit veränderlichen doppelt-symmetrischen Querschnitten*, Institut für Bauwissenschaftliche Forschung, Verlag Leeman, 18, Zurich 1971.

## Резюме

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ С БИСИММЕТРИЧНЫМ  
 ОТКРЫТЫМ СЕЧЕНИЕМ

Представлен вывод матрицы масс тонкостенного стержня с бисимметричным, открытым профилем. При помощи этой матрицы масс, а также матрицы жёсткости и геометрической матрицы, вывод которых представлен в последней работе автора [4], можно решать задачи динамики тонкостенных стержней с помощью ЭВМ. В численном примере определены частоты крутильных собственных колебаний центрально-сжатого двутавра со ступенчато переменными полками. Доказано, что критическая сила двутавра с переменным сечением определенная с помощью динамического критерия устойчивости может быть меньше, чем критическая сила двутавра с постоянным минимальным сечением.

## SUMMARY

TORSIONAL VIBRATIONS OF THIN-WALLED BARS WITH BISYMMETRIC OPEN  
 CROSS-SECTION

The mass matrix for thin-walled bars with bisymmetric open cross-section is derived. This matrix together with the elastic stiffness and the geometrical stiffness matrices, derived in Author's earlier work [4], enables the computer aided dynamic analysis of thin-walled bars. Numerical examples given contain the calculation of frequencies of the compressed I-column with a stepwise variability of width of its flanges. It has been shown that the value of the critical force of column with variable cross-section obtained by means of the dynamic stability criterion may be less than the value of this force for a constant minimum cross-section.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 8 lutego 1977 r.*