

STATECZNOŚĆ GLOBALNA PRZESTRZENNYCH KĄTOWNIKOWYCH DŹWIGARÓW KRATOWYCH(*)

JAN MISIAK i DARIUSZ TRZEŚNIEWSKI (WARSZAWA)

Przedstawiono rozwiązanie zagadnienia stateczności globalnej przestrzennych trójpasowych dźwigarów kratowych poddanych działaniu obciążeń zachowawczych. Dźwigary te dzięki swym zaletom (możliwość przenoszenia złożonych obciążeń) znajdują szerokie zastosowanie w wielu konstrukcjach inżynierskich, szczególnie z zakresu budowy maszyn (dźwignice) oraz budownictwa. Dla prawidłowego ich zaprojektowania, oprócz wyznaczania sił wewnętrznych, niezbędne jest określenie globalnych własności wyobczeniowych. Ze względu na zachowawczy charakter obciążenia zastosowano statyczne (eulerowskie) kryterium utraty stateczności. Uzyskano układ jednorodny dziewięciu równań różnicowych liniowych o stałych współczynnikach stanowiących przemieszczeniowe równania stateczności dźwigara. Stosując metodę numeryczną obliczono krytyczne wartości obciążeń zewnętrznych. Praca ilustrowana jest liczbowymi przykładami.

WSTĘP

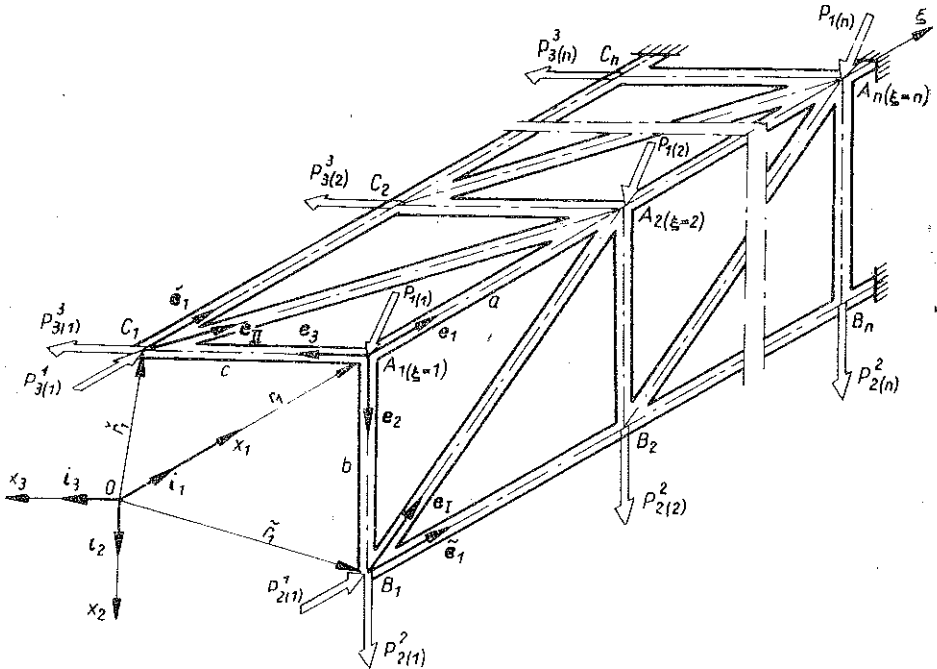
Zagadnienia stateczności płaskich układów prętowych w stanie sprężystym są szeroko omawiane w licznych monografiach i publikacjach, z których ważniejsze podano w wykazie literatury. W literaturze tej są zawarte podstawowe pojęcia stateczności i szereg przykładów zastosowań.

Przedmiotem badań jest regularny dźwigar przestrzenny o trzech pasach równoległych złożony z dwóch płaskich dźwigarów prostokątnych z przekątniowymi wykratowaniami, tworzących ze sobą kąt prosty, obciążony w węzłach układem sił zachowawczych P , leżących odpowiednio w dwu płaszczyznach dźwigara (rys. 1). Dźwigar zbudowany jest z prostych prętów o danych sztywnościach na zginanie i skręcanie — w ogólnym przypadku różnych, lecz nie zmieniających się wzdłuż ich długości. Przyjęto, że jedna z głównych osi bezwładności przekroju poprzecznego prętów leży w płaszczyźnie utworzonej przez środki ciężkości przekrojów poprzecznych tych prętów. Tak więc każda z dwu płaszczyzn rozważanego dźwigara jest siatką ściśle płaską, dla której można postawić zagadnienie tarcz i płyt siatkowych. Do rozwiązania zagadnienia wykorzystano najbardziej zbliżony do rzeczywistości schemat obliczeniowy, jaki stwarza model sprężystego dźwigara opartego na dyskretnej strukturze siatkowej.

Prace H. FRĄCKIEWICZA [3] i W. GUTKOWSKIEGO [7] należą do podstawowej literatury z zakresu mechaniki ośrodków siatkowych. Ogólne rozwiązanie statecz-

(*) Praca wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12 (temat 08.7) „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych”, koordynowanego przez IPPT PAN.

ności dowolnego układu prętowego oraz przykłady szczególne przedstawili J. BAUER i W. GUTKOWSKI w pracy [1]. H. FRĄCKIEWICZ w pracy [4] przedstawił przybliżoną metodę obliczania stateczności konstrukcji prętowych, zakładającą przyjęcie uprosz-



Rys. 1.

zonego modelu utraty stateczności. J. MISIAK opierając się na tej ogólnej metodzie badania stateczności opracował metodę obliczania stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych, obciążonych zachowawczymi i niezachowawczymi siłami zewnętrznymi [8, 9, 10, 11, 12, 14].

H. FRĄCKIEWICZ i J. MISIAK [5] zbadali wpływ szeregu parametrów konstrukcyjnych na stateczność płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych, a w pracy [6] przedstawili metodę rozwiązania stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych poddanych działaniu siły skierowanej do bieguna. J. DREWNIAK i J. MISIAK w pracy [2] rozwiązali zagadnienie stateczności płaskiej postaci zginania ramowych dźwigarów prostokątnych.

Cz. WOŹNIAK w monografii [17] przedstawił przybliżoną teorię badania stateczności płyt siatkowych o różnych strukturach wewnętrznych, posługując się schematem obliczeniowym modelu ośrodka włóknistego. Ponadto szereg przykładów szczególnych dotyczących stateczności układów prętowych przy obciążeniach siłami potencjalnymi zebrano w monografiach [15 i 18].

Dotychczas brak jest w literaturze opracowań z zakresu globalnej stateczności przestrzennych dźwigarów kratowych, przy których projektowaniu ograniczono się do wyznaczania ich stateczności lokalnej.

Praca niniejsza stanowi więc pierwszą próbę rozwiązania tego zagadnienia.

I. ELEMENTY GEOMETRYCZNE DŹWIGARA

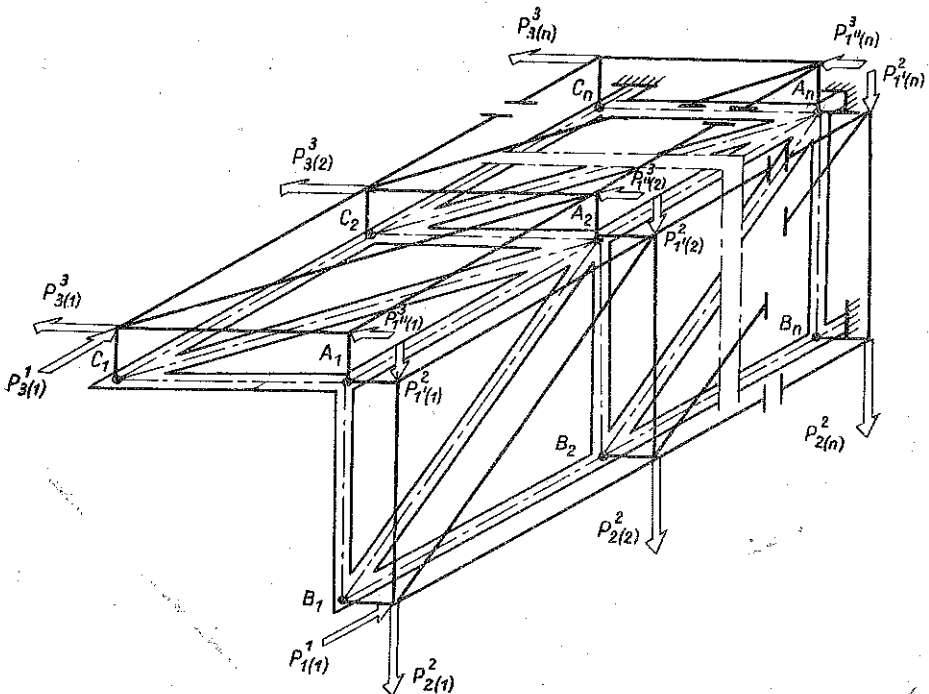
Modelem matematycznym dźwigara jest model ośrodka dyskretnego opisany w pracach H. FRĄCKIEWICZA [3 i 4]. Punktami tego ośrodka są węzły rozpatrywanego dźwigara. Węzłem leżącym na wszystkich pasach przypisuje się pewien uporządkowany sposób liczbę ξ (problem został sprowadzony do zagadnienia jednowymiarowego, co pozwoliło na znaczne uproszczenie warunków brzegowych) ze zbioru liczb całkowitych. Liczby te leżą na linii prostej; ich współrzędne oznaczamy przez ξ .

Dźwigar zanurzony jest w przestrzeni Euklidesa sparametryzowanej kartezjańskim układem współrzędnych x^α ($\alpha=1, 2, 3$). Położenie poszczególnych węzłów określone jest promieniami wektorami:

$$(1.1) \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{i}_1 a\xi, \quad \tilde{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{i}_1 a\xi + \mathbf{i}_2 b, \quad \check{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{i}_1 a\xi + \mathbf{i}_3 c.$$

2. METODA ROZWIĄZANIA

Przyjęto następujący model utraty stateczności, zgodny z metodą przedstawioną przez H. FRĄCKIEWICZA w pracy [4]. Nad dźwigarem (rys. 1) rozpina się dwie siatki zbudowane z piętów sztywno-sprężystych ($EJ=\infty$), połączonych ze sobą przegubowo oraz przez sztywne łączniki połączone przegubowo z dźwigarem (rys. 2). Powstaje w ten sposób układ składający się ze sztywno-przegubowych tarcz i sprężystego dźwigara.



Rys. 2.

Węzłom tarcz nadajemy przemieszczenia \tilde{V} i \check{V} , powodując przejście układu sztywno-przegubowych tarcz i sprężystego dźwigara w konfigurację wygiętą. Zgodnie z założeniem pręty tarcz po nadaniu tych wychyleń pozostają proste, a dźwigar wygina się sprężysto. Wychylenie tego układu z konfiguracji tarczowej w konfigurację wyboczeniową typu płytowego powoduje, że w sztywno-przegubowych tarczach pojawiają się pewne niezrównoważone składowe, które przez sztywne łączniki będą obciążać dźwigar w poszczególnych węzłach. Składowe te są funkcjami tarczowego stanu napięć i założonego wychylenia płytowego. W efekcie problem sprowadza się do rozwiązania zagadnienia dźwigara obciążonego tym szczególnym obciążeniem. Jeżeli do równań równowagi dźwigara obciążonego w węzłach dowolnym obciążeniem wstawimy to szczególne (niezrównoważone w obrębie tarczowego stanu napięć) obciążenie, to otrzymamy ostateczną postać wyboczeniowych równań równowagi rozpatrywanego dźwigara.

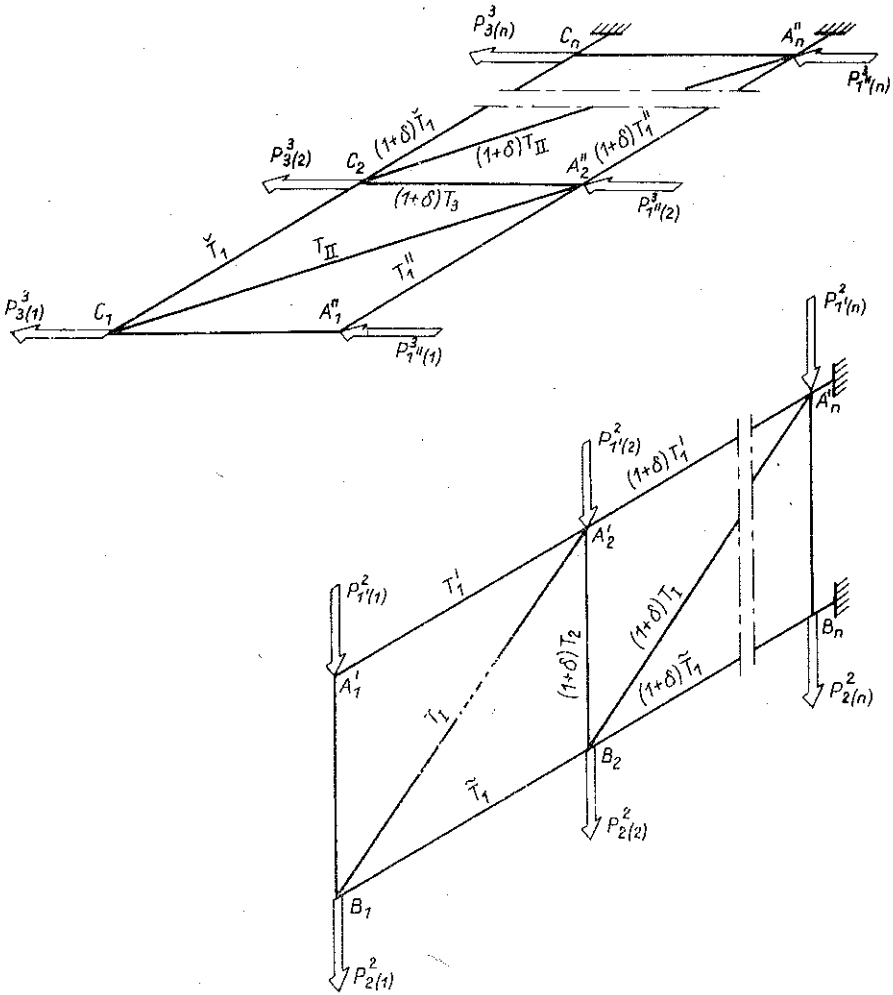
Obciążeniem krytycznym dźwigara nazywać będziemy taką wartość obciążenia zewnętrznego, przy której jest możliwa równowaga układu złożonego ze sztywno-przegubowych tarcz i sprężystego dźwigara w konfiguracji wygiętej. Obliczone w ten sposób krytyczne obciążenie jest traktowane jako wartość przybliżona.

Należy dodać, że przyjęty matematyczny model utraty stateczności, dla dźwigarów typu kątownika ogranicza dokładność ostatecznego rozwiązania, dając zerowe przemieszczenia węzłów pasa wspólnego. Błąd wynikający z tego ograniczenia nie jest zbyt duży, gdyż uzyskane wyniki pomiarów na stanowisku badawczym wykazały znacznie większe wartości przemieszczeń węzłów należących do pasów bocznych w stosunku do przemieszczeń węzłów pasa wspólnego.

Zgodnie z przedstawionym schematem rozwiązania problemu stateczności rozpatrywanego dźwigara można podzielić na następujące etapy: 1) określenie tarczowego stanu napięć dla rozpatrywanych dwóch tarcz; 2) wyprowadzenie równań równowagi dźwigara obciążonego w węzłach dowolnym obciążeniem; 3) obliczenie obciążenia niezrównoważonego w obrębie tarczowego stanu napięć; 4) wyprowadzenie wyboczeniowych równań równowagi dźwigara i ich rozwiązanie.

2.1. Tarczowy stan napięcia

Rozpatruje się układ dwu siatek ściśle płaskich (rys. 3) obciążonych układem sił tarczowych zewnętrznych $P_{1'(1)}^2, \dots, P_{1'(n)}^2, P_{2'(1)}^2, \dots, P_{2'(n)}^2, P_{1''(1)}^3, \dots, P_{1''(n)}^3, P_{3'(1)}^3, \dots, P_{3'(n)}^3$. Siatki te są zbudowane z prostych prętów sztywno-sprężystych połączonych przegubowo w węzłach. Dla siatek takich nie zachodzi potrzeba wprowadzenia wszystkich pojęć z liniowej teorii tarcz siatkowych (odnośnie do płaskiego stanu odkształcenia i płaskiego stanu napięcia), gdyż innych obciążeń zewnętrznych niż siły leżące w ich płaszczyznach przenieść nie są w stanie. Nie może w nich powstać inny układ napięć wewnętrznych niż układ określony siłami $T_1', T_1'', T_2, T_3, \tilde{T}_1, \check{T}_1, T_{11}, T_{11}$, leżącymi w płaszczyznach tarcz. Ze względu na przyjętą metodę rozwiązania i związany z nią model, wydłużenia prętów oraz przesunięcia węzłów w płaszczyźnie tarczy są równe zeru. Inne składowe stanu przemieszczenia, np. prostopadłe do płaszczyzny tarcz — tak jak w przyjętym modelu wyboczenia — nie są sprzężone z siłami wewnętrznymi i ze względu na te przemieszczenia rozpatrywane tarcze są



Rys. 3.

po prostu mechanizmami. Tak więc zagadnienie tarcz kratowych w zakresie potrzebnym do rozwiązania głównego problemu, tj. stateczności dźwigarów przestrzennych wg przyjętego modelu, sprowadza się do określenia napięć wewnętrznych w prętach.

Równania równowagi węzłów tarcz. Rozpatruje się układ sił wewnętrznych $T'_1, T_2, \tilde{T}_1, T_1$ i zewnętrznych tarczowych $P_{1'}^2(1), \dots, P_{1'}^2(n), \dots, P_{2'}^2(1), \dots, P_{2'}^2(n)$ dla jednej tarczy oraz sił $T''_1, T_3, \check{T}_1, T_{II}$ i $P_{1''}^3(1), \dots, P_{1''}^3(n), P_{3'}^3(1), \dots, P_{3'}^3(n)$ dla tarczy drugiej. Następnie piszemy wektorowe równania równowagi sił dla charakterystycznych węzłów (rys. 3) A'_2, B_2 , i A''_2, C_2 :

z równowagi węzła A'_2, B_2

$$(2.2) \quad \begin{aligned} -T_1 + \delta T'_1 + (1 + \delta) T_2 + (1 + \delta) P_{1'}^2 &= 0, \\ (1 + \delta) T_1 - (1 + \delta) T_2 + \delta \tilde{T}_1 + (1 + \delta) P_{2'}^2 &= 0; \end{aligned}$$

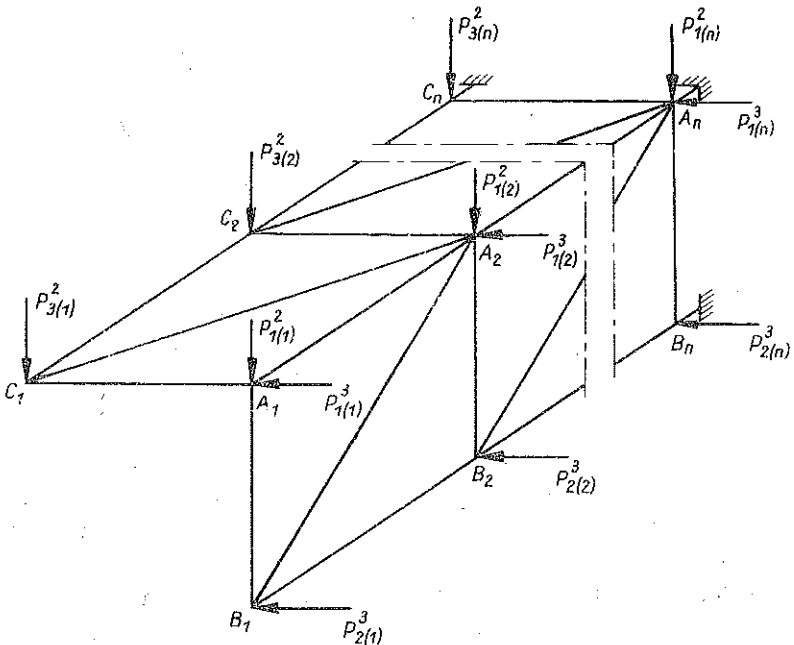
z równowagi węzła A_2'' , C_2

$$(2.3) \quad \begin{aligned} -T_{11} + \delta T_1'' + (1 + \delta) T_3 + (1 + \delta) P_1^3 &= 0, \\ (1 + \delta) T_{11} - (1 + \delta) T_3 + \delta T_1 + (1 + \delta) P_3^3 &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ rozpatrywane zagadnienia określania stanu napięć w siatkach powierzchniowych z przegubowymi węzłami są zagadnieniami statycznie wyznaczalnymi, więc do wyznaczania składowych sił tarczowych T_1' , T_2 , T_3 , T_1 , i T_1'' , T_3 , T_1 , T_{11} wystarczają równania (2.2) i (2.3) połączone z odpowiednimi warunkami brzegowymi. Nie trzeba tu rozpatrywać związków geometrycznych czy fizycznych. Siły w prętach tarcz wyrażone będą przez zewnętrzne obciążenie i metrykę dźwigara jako funkcji współrzędnej ξ .

2.2. Zagadnienie zginania dźwigara przestrzennego obciążonego w węzłach

Rozpatruje się dźwigar obciążony w poszczególnych węzłach obciążeniem zewnętrznym w postaci sił $P_1^3(1), \dots, P_1^3(n), \dots, P_2^3(2), P_2^3(n), P_1^2(1), \dots, P_1^2(n), P_3^2(1), \dots, P_3^2(n)$, odpowiednio prostopadłych do dwu płaszczyzn dźwigara (rys. 4). Zaga-



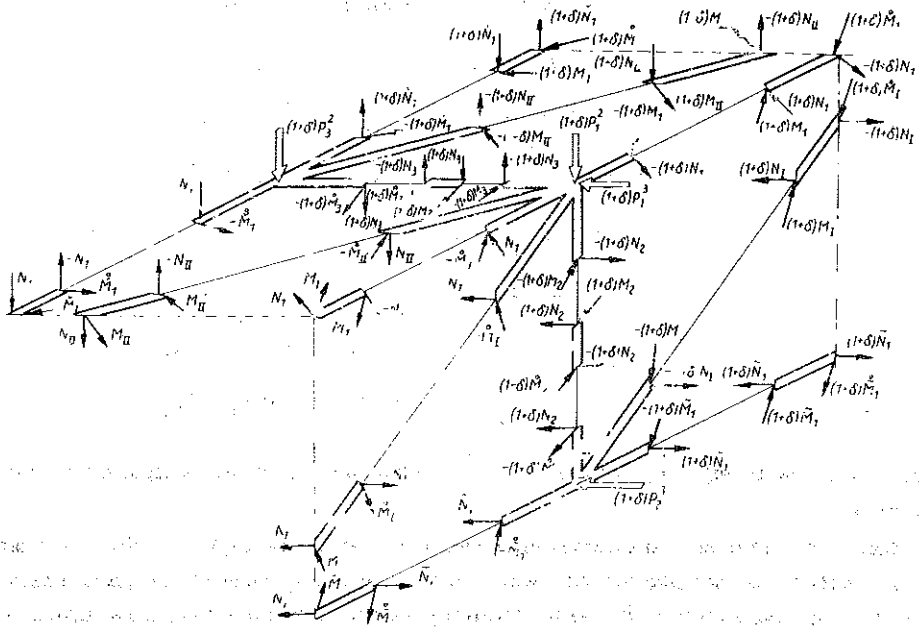
Rys. 4.

dnienie zginania płyt siatkowych opracowane zostało w pracy [3], gdzie wprowadzono podstawowe związki i równania niezbędne do rozwiązania zagadnienia płyty w przemieszczeniach. Poniżej przedstawiono wobec powyższego w dużym skrócie (opuszczając szereg niezbędnych do uzyskania równań równowagi wprowadzeń i przekształceń) zagadnienie zginania rozpatrywanego dźwigara.

Równania równowagi dźwigara. Na rys. 5 przedstawiono układ sił zewnętrznych jak i wewnętrznych, działających na charakterystyczne węzły dźwigara. Rozpatrując stratę tych węzłów, otrzymujemy następujące wektorowe równania równowagi:

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad & -\dot{\mathbf{M}}_I - \dot{\mathbf{M}}_I - \dot{\mathbf{M}}_{II} - (1+\delta)\mathbf{M}_2 - (1+\delta)\mathbf{M}_3 - (1+\delta)\mathbf{M}_I = 0, \\
 & -\dot{\mathbf{M}}_I - (1+\delta)\dot{\mathbf{M}}_2 - (1+\delta)\mathbf{M}_I - (1+\delta)\dot{\mathbf{M}}_I = 0, \\
 & -\dot{\mathbf{M}}_I - (1+\delta)\dot{\mathbf{M}}_3 - (1+\delta)\mathbf{M}_{II} - (1+\delta)\dot{\mathbf{M}}_I = 0, \\
 & (1+\delta)\mathbf{N}_2 - (1+\delta)\mathbf{N}_I - \delta\dot{\mathbf{N}}_I + (1+\delta)\mathbf{P}_2 = 0, \\
 & (1+\delta)\mathbf{N}_3 - (1+\delta)\mathbf{N}_{II} - \delta\dot{\mathbf{N}}_I + (1+\delta)\mathbf{P}_3 = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie $\dot{\mathbf{N}}_y$ oznacza siły poprzeczne w przekroju łączników przed węzłami, \mathbf{N}_y siły poprzeczne w przekroju łączników za węzłami, $\dot{\mathbf{M}}_y$ momenty gnące w przekroju łączników przed węzłami, \mathbf{M}_y momenty gnące w przekroju łączników za węzłami



Rys. 5.

Siły te i momenty są wynikiem oddziaływania węzłów na łączniki. Oznacza to, że łączniki oddziałują na węzły takimi samymi siłami i momentami, ale o przeciwnych zwrotach. Ponieważ układ sił i momentów jest samorzównoważony, przeto pomiędzy siłami i momentami muszą być spełnione następujące związki:

$$(2.5) \quad \dot{\mathbf{N}}_y = -\mathbf{N}_y, \quad \dot{\mathbf{M}}_y = -\mathbf{M}_y + \mathbf{e}_y \times \mathbf{N}_y.$$

Pisząc równania równowagi poszczególnych prętów, otrzymamy zgodnie ze wzorami (2.5)

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{\mathbf{M}}_I &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}_I - \mathbf{M}_I, \\
 \overset{\circ}{\mathbf{M}}_I &= (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \times \mathbf{N}_I - \mathbf{M}_I, \quad \overset{\circ}{\mathbf{M}}_{II} = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) \times \mathbf{N}_{II} - \mathbf{M}_{II}, \\
 (2.6) \quad (1+\delta)\overset{\circ}{\mathbf{M}}_2 &= \mathbf{e}_2 \times (1+\delta)\mathbf{N}_2 - (1+\delta)\mathbf{M}_2, \quad (1+\delta)\overset{\circ}{\mathbf{M}}_3 = \mathbf{e}_3 \times (1+\delta)\mathbf{N}_3 - \\
 &\quad - (1+\delta)\mathbf{M}_3, \\
 \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{M}}}_I &= \tilde{\mathbf{e}}_1 \times \tilde{\mathbf{N}}_I - \tilde{\mathbf{M}}_I, \quad \overset{\circ}{\check{\mathbf{M}}}_I = \check{\mathbf{e}}_1 \times \check{\mathbf{N}}_I - \check{\mathbf{M}}_I.
 \end{aligned}$$

Uwzględniając w równaniach (2.4) zależności (2.6), a następnie wyrażając siły i momenty przez składowe w bazie podstawowej, otrzymamy skalarowe równania równowagi w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 (2.7) \quad abc n_1^3 + m_1^1 g_{11} - abc n_{II}^2 + m_{II}^1 g_{11} - (1+\delta)m_2^1 g_{11} - (1+\delta)m_3^1 g_{11} - \delta m_1^1 g_{11} &= 0, \\
 abc n_1^3 + abc \check{n}_1^3 + m_1^2 g_{22} - (1+\delta)m_2^2 g_{22} - \delta m_1^2 g_{22} &= 0, \\
 -abc n_1^2 - abc n_{II}^2 + m_{II}^3 g_{33} - (1+\delta)m_3^3 g_{33} - \delta m_1^3 g_{33} &= 0, \\
 -(1+\delta)abc n_2^3 + (1+\delta)m_2^1 g_{11} - (1+\delta)m_1^1 g_{11} - \delta \check{m}_1^1 g_{11} &= 0, \\
 abc \check{n}_1^3 + (1+\delta)m_2^2 g_{22} - (1+\delta)m_1^2 g_{22} - \delta \check{m}_1^2 g_{22} &= 0, \\
 (1+\delta)abc n_3^2 + (1+\delta)m_3^1 g_{11} - (1+\delta)m_{II}^1 g_{11} - \delta \check{m}_1^1 g_{11} &= 0, \\
 -abc \check{n}_1^2 + (1+\delta)m_3^3 g_{33} - (1+\delta)m_{II}^3 g_{33} - \delta \check{m}_1^3 g_{33} &= 0, \\
 (1+\delta)n_2^3 - (1+\delta)n_1^3 - \delta \check{n}_1^3 + (1+\delta)p_2^3 &= 0, \\
 (1+\delta)n_3^2 - (1+\delta)n_{II}^2 - \delta \check{n}_1^2 + (1+\delta)p_3^2 &= 0,
 \end{aligned}$$

gdzie symbolami m_y^α i n_y^α oznaczono tzw. składowe obiektów wzajemnych stanu napięcia.

Stan odkształcenia charakteryzuje się wektorem przesunięcia $V_{(\xi)}$ węzłów dźwigara prostopadłym do jego płaszczyzn i wektorem obrotu $\Omega_{(\xi)}$ węzłów dźwigara leżącym w jednej jego płaszczyźnie. Po odpowiednim połączeniu ze sobą związków fizycznych z obiektami podstawowymi stanu napięcia i po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy następującą postać składowych obiektów wzajemnych stanu napięcia (w przemieszczeniach):

$$\begin{aligned}
 (2.8) \quad n_1^3 &= -\frac{6a_1}{ca^3} [ab(\Omega_{(\xi)}^2 + \Omega_{(\xi+1)}^2)], \\
 n_1^2 &= \frac{6a_1}{ba^3} [ac(\Omega_{(\xi)}^3 + \Omega_{(\xi+1)}^3)],
 \end{aligned}$$

(2.8) [ed.]

$$n_2^3 = \frac{6\alpha a_1}{cb^3} [-2\check{V}_{(\xi)} + ab(\check{\Omega}_{(\xi)}^1 + \Omega_{(\xi)}^1)],$$

$$n_3^2 = -\frac{6\beta a_1}{bc^3} [2\check{V}_{(\xi)} + ac(\check{\Omega}_{(\xi)}^1 + \check{\Omega}_{(\xi)}^1)],$$

$$\check{n}_1^3 = -\frac{6\gamma a_1}{ca^3} [2(\check{V}_{(\xi+1)} - \check{V}_{(\xi)}) + ab(\check{\Omega}_{(\xi)}^2 + \check{\Omega}_{(\xi+1)}^2)],$$

$$\check{n}_1^2 = \frac{6\delta a_1}{ba^3} [ac(\check{\Omega}_{(\xi)}^3 + \check{\Omega}_{(\xi+1)}^3) - 2(\check{V}_{(\xi+1)} - \check{V}_{(\xi)})],$$

$$n_1^3 = -\frac{6\lambda a_1}{cA^3} [ab(\Omega_{(\xi+1)}^1 + \Omega_{(\xi+1)}^2 + \check{\Omega}_{(\xi)}^1 + \check{\Omega}_{(\xi)}^2) - 2\check{V}_{(\xi)}],$$

$$n_{II}^2 = \frac{6\eta a_1}{bB^3} [ac(\Omega_{(\xi+1)}^1 + \check{\Omega}_{(\xi)}^1 + \Omega_{(\xi+1)}^3 + \check{\Omega}_{(\xi)}^3) - 2(V'_{(\xi+1)} - \check{V}_{(\xi)})],$$

$$m_1^1 = -\frac{\varepsilon a_1}{a} [\Omega_{(\xi+1)}^1 - \Omega_{(\xi)}^1],$$

$$m_1^2 = \frac{a_1}{a^2 b} [2ab(2\Omega_{(\xi)}^2 + \Omega_{(\xi+1)}^2)],$$

$$m_1^3 = \frac{a_1}{a^2 c} [2ac(2\Omega_{(\xi)}^3 + \Omega_{(\xi+1)}^3)],$$

$$m_2^1 = \frac{\alpha a_1}{ab^2} [-6\check{V}_{(\xi)} + 2ab(2\Omega_{(\xi)}^1 + \check{\Omega}_{(\xi)}^1)],$$

$$m_2^2 = -\frac{\kappa a_1}{b} [\check{\Omega}_{(\xi)}^2 - \Omega_{(\xi)}^2],$$

$$\check{m}_1^1 = -\frac{\mu a_1}{a} [\check{\Omega}_{(\xi+1)}^1 - \check{\Omega}_{(\xi)}^1],$$

$$\check{m}_1^2 = \frac{\gamma a_1}{a^2 b} [6(\check{V}_{(\xi+1)} - \check{V}_{(\xi)}) + 2ab(2\check{\Omega}_{(\xi)}^2 + \check{\Omega}_{(\xi+1)}^2)],$$

$$\check{m}_1^3 = -\frac{\nu a_1}{a} [\check{\Omega}_{(\xi+1)}^3 - \check{\Omega}_{(\xi)}^3],$$

$$m_1^3 = \frac{\delta a_1}{a^2 c} [2ac(2\check{\Omega}_{(\xi)}^3 + \check{\Omega}_{(\xi+1)}^3) - 6(\check{V}_{(\xi+1)} - \check{V}_{(\xi)})],$$

$$m_3^1 = \frac{\beta a_1}{c^2 a} [6\check{V}_{(\xi)} + 2ac(2\Omega_{(\xi)}^1 + \check{\Omega}_{(\xi)}^1)],$$

$$m_3^3 = -\frac{\rho a_1}{c} [\check{\Omega}_{(\xi)}^3 - \Omega_{(\xi)}^3],$$

$$\begin{aligned}
 (2.8) \quad m_{\text{I}}^1 &= \frac{\lambda b a_1}{a A^3} [2ab (\Omega_{(\xi+1)}^1 + \Omega_{(\xi+1)}^2 + 2\check{\Omega}_{(\xi)}^1 + 2\check{\Omega}_{(\xi)}^2) - 6\check{V}_{(\xi)}] + \\
 &\quad - \frac{\tau a_1}{A^3} [a^2 (\Omega_{(\xi+1)}^1 - \check{\Omega}_{(\xi)}^1) - b^2 (\Omega_{(\xi+1)}^2 - \check{\Omega}_{(\xi)}^2)], \\
 m_{\text{I}}^2 &= \frac{\lambda a a_1}{b A^3} [-6\check{V}_{(\xi)} + 2ab (\Omega_{(\xi+1)}^1 + \Omega_{(\xi+1)}^2 + 2\check{\Omega}_{(\xi)}^1 + 2\check{\Omega}_{(\xi)}^2)] + \\
 &\quad + \frac{\tau a_1}{A^3} [a^2 (\Omega_{(\xi+1)}^1 - \check{\Omega}_{(\xi)}^1) - b^2 (\Omega_{(\xi+1)}^2 - \check{\Omega}_{(\xi)}^2)], \\
 m_{\text{II}}^1 &= \frac{\eta c a_1}{a B^3} [2ac (\Omega_{(\xi+1)}^1 + \Omega_{(\xi+1)}^3 + 2\check{\Omega}_{(\xi)}^1 + 2\check{\Omega}_{(\xi)}^3) + 6\check{V}_{(\xi)}] \\
 &\quad - \frac{\psi a_1}{B^3} [a^2 (\Omega_{(\xi+1)}^1 - \check{\Omega}_{(\xi)}^1) - c^2 (\Omega_{(\xi+1)}^3 - \check{\Omega}_{(\xi)}^3)], \\
 m_{\text{II}}^3 &= \frac{\eta a a_1}{c B^3} [2ac (\Omega_{(\xi+1)}^1 + \Omega_{(\xi+1)}^3 + 2\check{\Omega}_{(\xi)}^1 + 2\check{\Omega}_{(\xi)}^3) + 6\check{V}_{(\xi)}] + \\
 &\quad + \frac{\psi a_1}{B^3} [a^2 (\Omega_{(\xi+1)}^1 - \check{\Omega}_{(\xi)}^1) - c^2 (\Omega_{(\xi+1)}^3 - \check{\Omega}_{(\xi)}^3)],
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 (2.9) \quad \alpha &= \frac{a_2}{a_1}, \quad \beta = \frac{a_3}{a_1}, \quad \gamma = \frac{\check{a}_1}{a_1}, \quad \delta = \frac{\check{a}'_1}{a_1}, \quad \lambda = \frac{a_1}{a_1}, \quad \eta = \frac{a_{\text{II}}}{a_1}, \\
 \varepsilon &= \frac{b_1}{a_1}, \quad \kappa = \frac{b_2}{a_1}, \quad \mu = \frac{\check{b}_1}{a_1}, \quad \nu = \frac{\check{b}'_1}{a_1}, \quad \rho = \frac{b_3}{a_1}, \quad \tau = \frac{b_1}{a_1}, \quad \psi = \frac{b_{\text{II}}}{a_1}, \\
 A &= (a^2 + b^2)^{1/2}, \quad B = (a^2 + c^2)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Postać końcową przemieszczeniowych równań równowagi dźwigara otrzymamy, wstawiając składowe obiektów napięć (2.8) do skalarowych równań równowagi (2.7).

Zagadnienie warunków brzegowych dźwigara. Szczegółowo zagadnienie warunków brzegowych płyty siatkowej zostało omówione w monografii [3]. Poniżej przedstawione zostaną istotne elementy tego zagadnienia dla rozpatrywanego dźwigara.

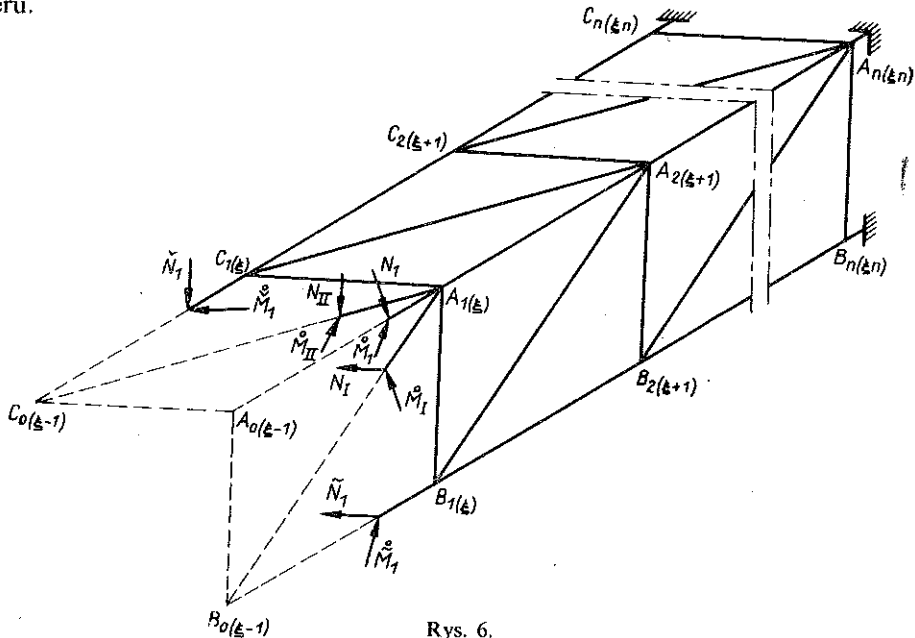
a) Brzeg sztywno zamocowany. Na brzegu tym wszystkie składowe stanu przemieszczenia są równe zeru i jeżeli sztywno zamocowany jest brzeg $A_n B_n C_n$ (rys. 6), to

$$\begin{aligned}
 (2.10) \quad [V]_{(\xi=\xi_n)} &= 0, \quad [\check{V}]_{(\xi=\xi_n)} = 0, \quad [\check{V}']_{(\xi=\xi_n)} = 0, \\
 [\Omega^\alpha]_{(\xi=\xi_n)} &= 0, \quad [\check{\Omega}^\alpha]_{(\xi=\xi_n)} = 0, \quad [\check{\Omega}^{\alpha'}]_{(\xi=\xi_n)} = 0.
 \end{aligned}$$

b) Brzeg swobodny nieobciążony. Jeżeli swobodny brzeg zewnętrzny nie jest obciążony, to składowych stanu przemieszczenia nie znamy. Natomiast obciążenie jako oddziaływanie fikcyjnego łącznika na węzeł brzegowy równe jest zeru. Dla brzegu $A_1 B_1 C_1$ (Rys. 6) otrzymamy

$$\begin{aligned}
 (2.11) \quad [N_{\text{I}} + N_{\text{I}} + N_{\text{II}}]_{(\xi=\xi_{n-1})} &= 0, \quad [\check{N}_{\text{I}}]_{(\xi=\xi_{n-1})} = 0, \quad [\check{N}']_{(\xi=\xi_{n-1})} = 0, \\
 [\check{M}_{\text{I}} + \check{M}_{\text{I}} + \check{M}_{\text{II}}]_{(\xi=\xi_{n-1})} &= 0, \quad [\check{M}_{\text{I}}]_{(\xi=\xi_{n-1})} = 0, \quad [\check{M}_{\text{I}}']_{(\xi=\xi_{n-1})} = 0.
 \end{aligned}$$

Wyrażając napięcia (2.11) przez przemieszczenia (przez związki fizyczne) otrzymuje się przemieszczeniową postać tych równań, z których określa się poszukiwane przemieszczenia węzłów fikcyjnych $A_0 B_0 C_0$. Na podstawie (2.11) dla brzegu $A_1 B_1 C_1$ swobodnego, nieobciążonego wiemy, że obciążenie $n_{1(0)}^2, n_{1(0)}^3, \tilde{n}_{1(0)}^3, \check{n}_{1(0)}^2, n_{1(0)}^3, n_{II(0)}^2, \check{m}_{1(0)}^1, \check{m}_{1(0)}^2, \check{m}_{1(0)}^3, \check{m}_{1(0)}^1, \check{m}_{1(0)}^2, \check{m}_{1(0)}^3, \check{m}_{1(0)}^1, \check{m}_{1(0)}^2, \check{m}_{1(0)}^3, \check{m}_{1(0)}^1, \check{m}_{1(0)}^2, \check{m}_{1(0)}^3$ węzłów jest równe zero.



Rys. 6.

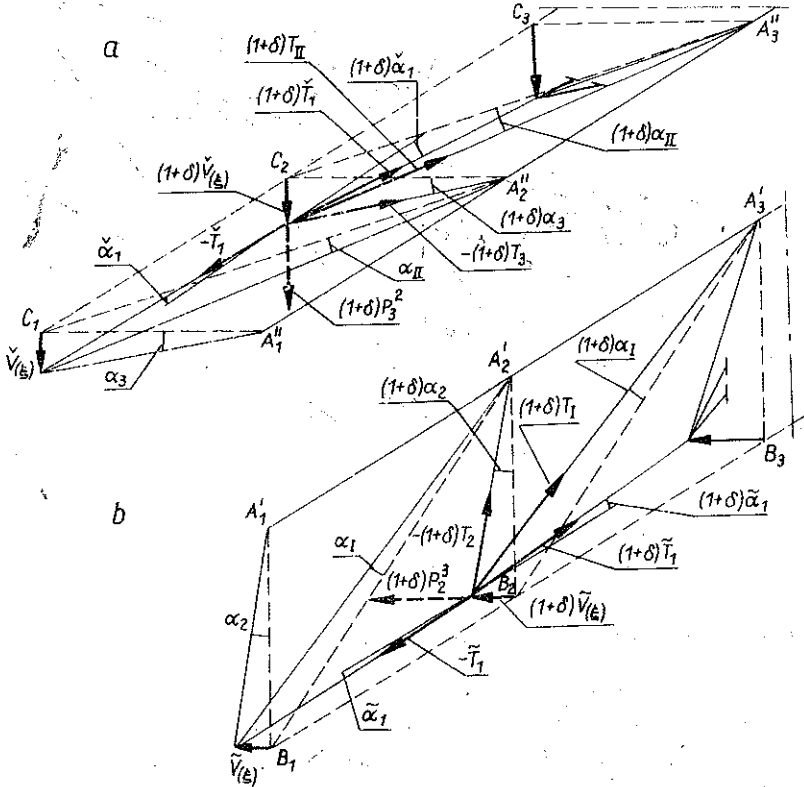
2.3. Obciążenie dźwigara wywołane tarczowym stanem napięcia

Zgodnie z przyjętą metodą rozwiązania należy z kolei określić wartość obciążenia szczególnego, obciążającego dźwigar w węzłach, pochodzącego od tarczowego stanu napięć. Sposób połączenia węzłów sztywno-przegubowych tarcz i sprężystego dźwigara jest taki, że umożliwia przeniesienie tego obciążenia z tarcz na dźwigar. W procesie zmiany konfiguracji z tarczowej w płytową poszczególne pręty tarcz pozostają proste, załamując się w węzłach. Ponadto nie mogą dokonywać obrotów w płaszczyźnie tarcz, jak również nie posiadają żadnej sztywności skrętnej. Jak już zostało powiedziane poprzednio, zastosowany model (sztywno-przegubowy) wybozczenia dźwigara pozwala dla węzłów pasa wspólnego (przy wstępnym założeniu zerowych wartości składowych ich przemieszczeń) określić jedynie trzy składowe ich obrotu. Nadajemy zatem węzłom B_1 i C_1 przemieszczenia $\check{V}_{(\xi)}$ i $\check{V}_{(\zeta)}$. Pręty tarcz zajmą położenie pokazane na rys. 7. Suma rzutów sił T_s i T_t odpowiednio na kierunki e^2 i e^3 działających na węzły B_2 i C_2 , a pochodzące od oddziaływania poszczególnych łączników — wyraża się wzorami

$$(2.12) \quad \begin{aligned} (1+\delta)P_2^3 &= -\check{T}_1 \check{a}_1 + (1+\delta)\check{T}_1 \check{a}_1 - (1+\delta)T_1 \alpha_1 - (1+\delta)T_2 \alpha_2, \\ (1+\delta)P_3^2 &= -\check{T}_1 \check{a}_1 + (1+\delta)\check{T}_1 \check{a}_1 - (1+\delta)T_{11} \alpha_{11} - (1+\delta)T_3 \alpha_3. \end{aligned}$$

Poszczególne kąty obrotu łączników określone są następującymi wzorami:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= \frac{\tilde{V}_{(\xi+1)} - \tilde{V}_{(\xi)}}{\sqrt{g_{11}}}, & \alpha_2 &= \frac{\tilde{V}_{(\xi)}}{\sqrt{g_{22}}}, & \alpha_1 &= \frac{\tilde{V}_{(\xi)}}{\sqrt{g_{11}}}, \\ \check{\alpha}_1 &= \frac{\check{V}_{(\xi+1)} - \check{V}_{(\xi)}}{\sqrt{g_{11}}}, & \alpha_3 &= \frac{\check{V}_{(\xi)}}{\sqrt{g_{33}}}, & \alpha_{II} &= \frac{\check{V}_{(\xi)}}{\sqrt{g_{III}}} \end{aligned}$$



Rys. 7.

Podstawiając wyrażenia (2.13) do (2.12) i dokonując odpowiednich przekształceń otrzymamy siły $P_{2(\xi+1)}^3$ i $P_{3(\xi+1)}^2$, obciążające dźwigar w poszczególnych węzłach:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} P_{2(\xi+1)}^3 &= \tilde{V} \left[\frac{\tilde{T}_{1(\xi)}}{a} \right] + \tilde{V}_{(\xi+1)} \left[- \left(\frac{\tilde{T}_{1(\xi)} + \tilde{T}_{1(\xi+1)}}{a} + \frac{T_{1(\xi+1)}}{A} + \frac{T_{2(\xi+1)}}{b} \right) \right] + \\ & \quad + \tilde{V}_{(\xi+2)} \left[\frac{\tilde{T}_{1(\xi+1)}}{a} \right], \\ P_{3(\xi+1)}^2 &= \check{V}_{(\xi)} \left[\frac{\check{T}_{1(\xi)}}{a} \right] + \check{V}_{(\xi+1)} \left[- \left(\frac{\check{T}_{1(\xi)} + \check{T}_{1(\xi+1)}}{a} + \frac{T_{II(\xi+1)}}{B} + \frac{T_{3(\xi+1)}}{c} \right) \right] + \\ & \quad + \check{V}_{(\xi+2)} \left[\frac{\check{T}_{1(\xi+1)}}{a} \right]. \end{aligned}$$

Tak otrzymane obciążenie dźwigara wywołane tarczowym stanem napięcia podstawiamy do równań równowagi (2.7) zastępując nimi składniki $(1+\delta)P_2^3$ i $(1+\delta)P_3^2$ zgodnie z równaniami

$$(2.15) \quad (1+\delta)P_2^3 = P_{2(\xi+1)}^3, \quad (1+\delta)P_3^2 = P_{3(\xi+1)}^2.$$

2.4. Równania równowagi wyobczonego dźwigara

Dokonując w równaniach równowagi dźwigara (2.7) podstawień (2.8) oraz (2.14) i (2.15) otrzymujemy ostateczną postać równań równowagi wyobczonego dźwigara. Należy zwrócić uwagę, że na skutek ograniczeń wynikających z przyjętej metody (co zostało już wyjaśnione) z równań równowagi dźwigara (2.7) otrzymuje się ostatecznie układ dziewięciu równań o następującej postaci:

$$(2.16) \quad \begin{aligned} & E_{11}^1 \Omega_{(\xi)}^1 + E_{12}^1 \Omega_{(\xi+1)}^1 + E_{13}^1 \Omega_{(\xi+2)}^1 + E_{22}^1 \Omega_{(\xi+1)}^2 + E_{32}^1 \Omega_{(\xi+1)}^3 + \tilde{E}_{11}^1 \Omega_{(\xi)}^1 + \\ & \quad + \tilde{E}_{12}^1 \Omega_{(\xi+1)}^1 + \tilde{E}_{21}^1 \tilde{\Omega}_{(\xi)}^2 + \tilde{E}_{11}^1 \check{\Omega}_{(\xi)}^1 + \tilde{E}_{12}^1 \check{\Omega}_{(\xi+1)}^1 + \tilde{E}_{31}^1 \check{\Omega}_{(\xi)}^3 + \\ & \quad + \tilde{E}_1^1 \check{V}_{(\xi)} + \tilde{E}_2^1 \check{V}_{(\xi+1)} + \tilde{E}_1^1 \check{V}_{(\xi)} + \tilde{E}_2^1 \check{V}_{(\xi+1)} = 0, \\ & E_{12}^2 \Omega_{(\xi+1)}^1 + E_{21}^2 \Omega_{(\xi)}^2 + E_{22}^2 \Omega_{(\xi+1)}^2 + E_{23}^2 \Omega_{(\xi+2)}^2 + \tilde{E}_{11}^2 \tilde{\Omega}_{(\xi)}^1 + \tilde{E}_{21}^2 \tilde{\Omega}_{(\xi)}^2 + \\ & \quad + \tilde{E}_{22}^2 \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^2 + \tilde{E}_1^2 \check{V}_{(\xi)}^2 = 0, \\ & E_{12}^3 \Omega_{(\xi+1)}^1 + E_{31}^3 \Omega_{(\xi)}^3 + E_{32}^3 \Omega_{(\xi+1)}^3 + E_{33}^3 \Omega_{(\xi+2)}^3 + \tilde{E}_{11}^3 \check{\Omega}_{(\xi)}^1 + \tilde{E}_{31}^3 \check{\Omega}_{(\xi)}^1 + \\ & \quad + \tilde{E}_{32}^3 \check{\Omega}_{(\xi+1)}^3 + \tilde{E}_1^3 \check{V}_{(\xi)} = 0, \\ & E_{12}^4 \Omega_{(\xi+1)}^1 + E_{13}^4 \Omega_{(\xi+2)}^1 + E_{23}^4 \Omega_{(\xi+2)}^2 + \tilde{E}_{11}^4 \tilde{\Omega}_{(\xi)}^1 + \tilde{E}_{12}^4 \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^1 + \tilde{E}_{13}^4 \tilde{\Omega}_{(\xi+2)}^1 + \\ & \quad + \tilde{E}_{22}^4 \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^2 + \tilde{E}_2^4 \check{V}_{(\xi+1)} = 0, \\ & E_{13}^5 \Omega_{(\xi+2)}^1 + E_{22}^5 \Omega_{(\xi+1)}^2 + \tilde{E}_{12}^5 \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^1 + \tilde{E}_{21}^5 \tilde{\Omega}_{(\xi)}^2 + \tilde{E}_{22}^5 \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^2 + \\ & \quad + \tilde{E}_{23}^5 \tilde{\Omega}_{(\xi+2)}^2 + E_3^5 V'_{(\xi+2)} + \tilde{E}_1^5 \check{V}_{(\xi)} + \tilde{E}_2^5 \check{V}_{(\xi+1)} + \tilde{E}_3^5 \check{V}_{(\xi+1)} = 0, \\ & E_{12}^6 \Omega_{(\xi+1)}^1 + E_{13}^6 \Omega_{(\xi+2)}^1 + E_{33}^6 \Omega_{(\xi+2)}^3 + \tilde{E}_{11}^6 \check{\Omega}_{(\xi)}^1 + \tilde{E}_{12}^6 \check{\Omega}_{(\xi+1)}^1 + \tilde{E}_{13}^6 \check{\Omega}_{(\xi+2)}^1 + \\ & \quad + \tilde{E}_{32}^6 \check{\Omega}_{(\xi+1)}^3 + \tilde{E}_2^6 \check{V}_{(\xi+1)} = 0, \\ & E_{13}^7 \Omega_{(\xi+2)}^1 + E_{32}^7 \Omega_{(\xi+1)}^3 + E_{33}^7 \Omega_{(\xi+2)}^3 + \tilde{E}_{12}^7 \check{\Omega}_{(\xi+1)}^1 + \tilde{E}_{31}^7 \check{\Omega}_{(\xi)}^3 + \tilde{E}_{32}^7 \check{\Omega}_{(\xi+1)}^3 + \\ & \quad + \tilde{E}_{33}^7 \check{\Omega}_{(\xi+2)}^3 + \tilde{E}_1^7 \check{V}_{(\xi)} + \tilde{E}_2^7 \check{V}_{(\xi+1)} + \tilde{E}_3^7 \check{V}_{(\xi+2)} = 0, \\ & E_{12}^9 \Omega_{(\xi+1)}^1 + E_{13}^9 \Omega_{(\xi+2)}^1 + E_{23}^9 \Omega_{(\xi+2)}^2 + \tilde{E}_{12}^9 \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^1 + \tilde{E}_{21}^9 \tilde{\Omega}_{(\xi)}^2 + E_{22}^9 \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^2 + \\ & \quad + \tilde{E}_{23}^9 \tilde{\Omega}_{(\xi+2)}^2 + (\tilde{E}_1^9 + \tilde{E}_{1p}^9) \check{V}_{(\xi)} + (\tilde{E}_2^9 + \tilde{E}_{2p}^9) \check{V}_{(\xi+1)} + (\tilde{E}_3^9 + \tilde{E}_{3p}^9) \check{V}_{(\xi+2)} = 0, \\ & E_{12}^{11} \Omega_{(\xi+1)}^1 + E_{13}^{11} \Omega_{(\xi+2)}^1 + E_{33}^{11} \Omega_{(\xi+2)}^3 + \tilde{E}_{12}^{11} \check{\Omega}_{(\xi+1)}^1 + \tilde{E}_{31}^{11} \check{\Omega}_{(\xi)}^3 + \tilde{E}_{32}^{11} \check{\Omega}_{(\xi+1)}^3 + \\ & \quad + \tilde{E}_{33}^{11} \check{\Omega}_{(\xi+2)}^3 + (\tilde{E}_1^{11} + \tilde{E}_{1p}^{11}) \check{V}_{(\xi)} + (\tilde{E}_2^{11} + \tilde{E}_{2p}^{11}) \check{V}_{(\xi+1)} + (\tilde{E}_3^{11} + \tilde{E}_{3p}^{11}) \check{V}_{(\xi+2)} = 0. \end{aligned}$$

Operatory równań (2.16) wyrażają się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
 E_{11}^1 = E_{13}^1 = \varepsilon a, \quad E_{12}^1 &= -\frac{4a^2 b^2 \lambda + a^4 \tau}{A^3} - \frac{4a^2 \alpha}{b} - \frac{4a^2 c^2 \eta + a^4 \psi}{B^3} - \frac{4a^2 \beta}{c} - 2a\varepsilon, \\
 E_{22}^1 = E_{12}^2 = \check{E}_{22}^4 = \check{E}_{12}^5 &= \frac{a^2 b^2 (\tau - 4\lambda)}{A^3}, \quad E_{32}^1 = E_{12}^3 = E_{32}^6 = E_{12}^7 = \frac{a^2 c^2 (\psi - 4\eta)}{B^3}, \\
 \check{E}_{11}^1 = E_{13}^4 &= \frac{a^4 \tau - 2a^2 b^2 \lambda}{A^3}, \quad \check{E}_{12}^1 = E_{12}^4 = -\frac{2a^2 \alpha}{b}, \quad \check{E}_{12}^1 = E_{12}^6 = -\frac{2a^2 \beta}{c}, \\
 E_{21}^1 = \check{E}_{11}^2 = E_{23}^4 = E_{13}^5 &= -\frac{a^2 b^2 (2\lambda + \tau)}{A^3}, \quad \check{E}_{11}^1 = E_{13}^6 = \frac{a^4 \psi - 2a^2 c^2 \eta}{B^3}, \\
 \check{E}_{31}^1 = \check{E}_{11}^3 = E_{33}^6 = E_{13}^7 &= -\frac{a^2 c^2 (2\eta + \psi)}{B^3}, \quad \check{E}_2^4 = +\frac{6abc \lambda}{A^3} + \frac{6ac \alpha}{b^2}, \\
 \check{E}_1^1 = \check{E}_1^2 = \check{E}_2^5 &= \frac{6abc \lambda}{A^3}, \quad \check{E}_2^1 = -\frac{6ac \alpha}{b^2}, \\
 \check{E}_2^6 &= -\frac{6abc \eta}{B^3} - \frac{6ab \beta}{c^2}, \quad \check{E}_2^1 = -\frac{6ab \beta}{c^2}, \\
 (2.17) \quad \check{E}_1^1 = \check{E}_1^3 = \check{E}_2^7 &= -\frac{6abc \eta}{B^3}, \quad E_{21}^2 = E_{23}^2 = -\frac{2b^2}{a}, \\
 E_{22}^2 &= -\left(\frac{4a^2 b^2 \lambda + b^4 \tau}{A^3} + \frac{8b^2}{a} + \kappa b \right), \quad \check{E}_{21}^2 = E_{23}^5 = \frac{b^4 \tau - 2a^2 b^2 \lambda}{A^3}, \\
 E_{31}^3 = E_{33}^3 &= -\frac{2c^2}{a}, \\
 E_{32}^3 &= -\left(\frac{4a^2 c^2 \eta + c^4 \psi}{B^3} + \frac{8c^2}{a} + \rho c \right), \quad \check{E}_{31}^3 = E_{33}^7 = \frac{c^4 \psi - 2a^2 c^2 \eta}{B^3}, \\
 \check{E}_{32}^3 = E_{32}^7 = \rho c, \quad \check{E}_{11}^4 = \check{E}_{13}^4 = a\mu, \quad \check{E}_{12}^4 &= -\left(\frac{4a^2 \alpha}{b} + \frac{4a^2 b^2 \lambda + a^4 \tau}{A^3} + 2a\mu \right), \\
 \check{E}_{21}^5 = \check{E}_{23}^5 &= -\frac{2b^2 \gamma}{a}, \quad \check{E}_{22}^5 = -\left(\frac{8b^2 \gamma}{a} + \frac{4a^2 b^2 \lambda + b^4 \tau}{A^3} + b\kappa \right), \\
 \check{E}_1^5 = -\check{E}_3^5 &= \frac{6bc \gamma}{a^2}, \\
 \check{E}_{11}^6 = \check{E}_{13}^6 = a\nu, \quad \check{E}_{12}^6 &= -\left(\frac{4a^2 \beta}{c} + \frac{4a^2 c^2 \eta + a^4 \psi}{B^3} + 2a\nu \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.17) \quad \check{E}_{31}^7 &= \check{E}_{33}^7 = -2 \frac{c^2 \delta}{a}, & \check{E}_{32}^7 &= -\left(\frac{8c^2 \delta}{a} + \frac{4a^2 c^2 \eta + c^4 \varphi}{B^3} + \rho c \right), \\
 \text{led.} \quad \check{E}_1^7 &= -\check{E}_3^7 = -\frac{6bc\delta}{a^2}, & \check{E}_{12}^9 &= \frac{6ab\lambda}{A^3} + \frac{6a\alpha}{b^2}, \\
 E_{13}^9 &= E_{23}^9 = \check{E}_{22}^9 = \frac{6ab\lambda}{A^3}, & E_{12}^9 &= \frac{6a\alpha}{b^2}, \\
 \check{E}_{21}^9 &= -\check{E}_{23}^9 = -\frac{6b\gamma}{a^2}, \\
 \check{E}_1^9 &= \check{E}_3^9 = \frac{12c\gamma}{a^3}, & \check{E}_2^9 &= -12c \left(\frac{\alpha}{b^3} + \frac{\lambda}{A^3} + \frac{2\gamma}{a^3} \right), \\
 E_{12}^{11} &= -\frac{6ac\eta}{B^3} - \frac{6a\beta}{c^2}, & E_{13}^{11} &= E_{33}^{11} = \check{E}_{32}^{11} = -\frac{6ac\eta}{B^3}, \\
 E_{12}^{11} &= \frac{6a\beta}{c^2}, \\
 \check{E}_{31}^{11} &= -\check{E}_{33}^{11} = \frac{6c\delta}{a^2}, & \check{E}_1^{11} &= \check{E}_3^{11} = \frac{12b\delta}{a^3}, \\
 \check{E}_2^{11} &= -12b \left(\frac{\beta}{c^3} + \frac{\eta}{B^3} + \frac{2\delta}{a^3} \right), \\
 \check{E}_{1p}^9 &= \frac{c}{a_1} \frac{\check{T}_{1(\xi)}}{a}, & \check{E}_{2p}^9 &= -\frac{c}{a_1} \left[\frac{\check{T}_{1(\xi)} + \check{T}_{1(\xi+1)}}{a} + \frac{T_{1(\xi+1)}}{A} + \frac{T_{2(\xi+1)}}{b} \right], \\
 \check{E}_{3p}^9 &= \frac{c}{a_1} \left[\frac{\check{T}_{1(\xi+1)}}{a} \right], & \check{E}_{1p}^{11} &= \frac{b}{a_1} \left[\frac{\check{T}_{1(\xi)}}{a} \right], \\
 \check{E}_{2p}^{11} &= -\frac{b}{a_1} \left[\frac{\check{T}_{1(\xi)} + \check{T}_{1(\xi+1)}}{a} + \frac{T_{11(\xi+1)}}{B} + \frac{T_{3(\xi+1)}}{c} \right], \\
 \check{E}_{3p}^{11} &= \frac{b}{a_1} \left[\frac{\check{T}_{1(\xi+1)}}{a} \right].
 \end{aligned}$$

Układ równań (2.16) jest jednorodnym układem równań różnicowych o stałych współczynnikach. Zawiera on jako niewiadome dziewięć składowych $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3, \check{\Omega}^1, \check{\Omega}^2, \check{\Omega}^3, \check{V}, \check{V}$ stanu przemieszczenia węzłów dźwigara oraz zewnętrzne obciążenie P . Warunkiem istnienia niezerowych wartości wymienionych składowych jest, aby wyznacznik charakterystyczny macierzy tego układu napisanego dla wszystkich węzłów dźwigara, utworzonej ze współczynników przy tych składowych, był równy zero. Warunek ten sprowadza się do równania n -tego stopnia względem obciążenia zewnętrznego (współczynniki przy składowych stanu przemieszczenia w omawianym układzie równań, mają postać wielomianową względem tego obciążenia).

Stopień m tego równania zależy od ilości węzłów dźwigara, sposobu zamocowania jego węzłów brzegowych w ten sposób, że jest równy sumie stopni swobody wszystkich węzłów dźwigara. Z rozwiązania tego równania otrzymuje się m wartości obciążenia P . Ze względów technicznych najbardziej interesująca jest najmniejsza wartość tego obciążenia $P_{kr} = P_{kr}^I$. Wartość ta określa krytyczną wartość obciążenia danego dźwigara.

3. PRZYKŁADY OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Zastosowana w niniejszym opracowaniu metoda rozwiązania, aczkolwiek przyjmująca pewne założenia upraszczające, jest dla celów inżynierskich wystarczająco dokładna, a poza tym bardzo efektywna. Obliczenia z przedstawionych równań stateczności (2.16) krytycznej wartości zewnętrznego obciążenia dokonuje się za pomocą metody numerycznej, która została opracowana na maszynę cyfrową CDC-3170 w języku FORTRAN. Wszystkie obliczenia numeryczne przeprowadzono dla prętów o przekrojach osiowosymetrycznych przy następujących stosunkach sztywności zginania i skręcania prętów: $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \lambda = \eta = 1$, $\varepsilon = \kappa = \mu = \nu = \rho = \tau = \psi = 0,8$ oraz wymiarach gabarytowych $a = 1\text{m}$, $b = c = 0,5\text{m}$.

Rozpatrzono dźwigar przedstawiony na rys. 1, obciążony w brzegowym węźle pasa dolnego (B_1) potencjalną siłą P . Zagadnienie rozwiązano przy tym typie obciążenia dla czterech dźwigarów o różnej długości l przy $b = c = 0,5a$. Otrzymano następujące wartości sił krytycznych dla poszczególnych dźwigarów:

a) dwuobwodowy

$$l_2 = 2a: \quad P_{2kr}^I = 6,9914 a_1;$$

b) trzyobwodowy

$$l_3 = 3a: \quad P_{3kr}^I = 4,2164 a_1, \quad P_{3kr}^{II} = 6,1172 a_1,$$

(3.1) c) czteroobwodowy

$$l_4 = 4a: \quad P_{4kr}^I = 3,0497 a_1, \quad P_{4kr}^{II} = 3,5630 a_1, \quad P_{4kr}^{III} = 6,2746 a_1;$$

d) pięcioobwodowy

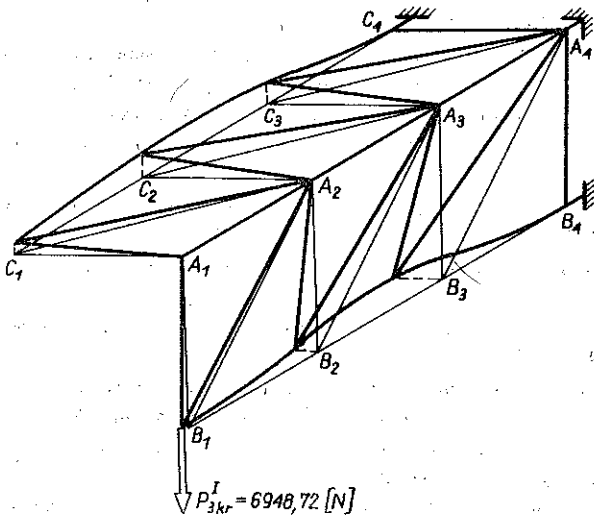
$$l_5 = 5a: \quad P_{5kr}^I = 2,3790 a_1, \quad P_{5kr}^{II} = 3,5421 a_1, \quad P_{5kr}^{III} = 3,6464 a_1, \\ P_{5kr}^{IV} = 6,3317 a_1.$$

Należy zwrócić uwagę, że w celu uzyskania wyników niezależnych od konkretnej wartości sztywności zginania i skręcania poszczególnych prętów dźwigara, podzielono wszystkie równania (2.16) przez sztywność zginania a_1 (Nm^2) pasa wspólnego. Z rozwiązania tych równań otrzymano zatem wartości obciążeń krytycznych podzielonych przez tę sztywność (P_{kr}/a_1). Przykładowo, dla przekroju rurowego pręta o wymiarach: $d_z = 0,0215\text{m}$ i $d_w = 0,015\text{m}$ (PN-64/H-74200), $a_1 = 0,001648\text{MNm}^2$ — najmniejsze siły krytyczne dla poszczególnych dźwigarów wynoszą

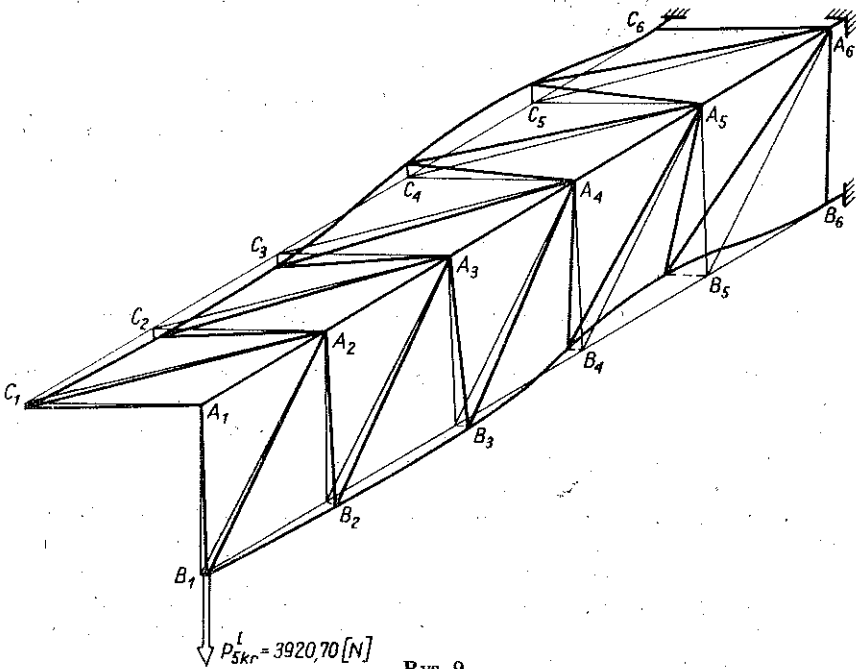
$$(3.2) \quad P_{2kr} = 11521,87\text{N}, \quad P_{3kr}^I = 6948,72\text{N}, \quad P_{4kr}^I = 5026,05\text{N}, \quad P_{5kr}^I = 3920,70\text{N}.$$

Każdej z obliczonych (3.1) sił krytycznych dla danego dźwigara odpowiada inna kolejna postać jego wybożenia. Postacie te można określić z równań (2.16) przyjmując za znaną wartość jednego z przemieszczeń płytowych węzłów dźwigara.

Na rys. 8 i 9 przedstawiono postacie wybočenja dźwigarów 3 i 5-cio obwodowych przy działaniu pierwszej (najmniejszej) siły krytycznej. Otrzymane równania równowagi wyboconego dźwigara umożliwiają nie tylko określenie krytycznych obciążeń zewnętrznych i postaci wybočenja dźwigarów, ale również pozwalają na przeprowadzenie szeregu analiz: zbadanie wpływu sposobu przyłożenia obciążenia, rodzaju podparcia, stosunku sztywności poszczególnych prętów, stosunku wymiarów gabarytowych (a, b, c) i innych na stateczność dźwigara.



Rys. 8.



Rys. 9.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. BAUER, W. GUTKOWSKI, *Stateczność regularnych konstrukcji prętowych*, Arch. Inż. Łąd., **19**, 1, 1973.
2. J. DREWNIAK, J. MISIAK, *Stateczność płaskiej postaci zginania dźwigarów ramowych dwupasowych poddanych działaniu sił konserwatywnych*, Rozpr. Inż., **25**, 4, 1977.
3. H. FRĄCKIEWICZ, *Mechanika ośrodków siatkowych*, PWN, Warszawa 1970.
4. H. FRĄCKIEWICZ, *Buckling of lattice plates*, Arch. Mech., **24**, 4, 1971.
5. H. FRĄCKIEWICZ, J. MISIAK, *Analiza stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych*, Rozpr. Inż., **23**, 1, 1975.
6. H. FRĄCKIEWICZ, J. MISIAK, *Stateczność płaskiej postaci zginania dwupasowych dźwigarów kratowych przy działaniu siły skierowanej do bieguna*, Rozpr. Inż., **23**, 2, 1975.
7. W. GUTKOWSKI, *Regularne konstrukcje prętowe*, PWN, Warszawa 1973.
8. J. MISIAK, *Stateczność płaskiej formy zginania dźwigarów siatkowych*. Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska 1972.
9. J. MISIAK, *Stateczność płaskiej postaci zginania dźwigarów siatkowych o pasach równoległych*, Rozpr. Inż., **21**, 1, 1973.
10. J. MISIAK, *Analiza stateczności dźwigarów poddanych działaniu sił zachowawczych*, Rozpr. Inż., **23**, 1, 1975.
11. J. MISIAK, *Stateczność dźwigarów kratowych poddanych działaniu sił skierowanych do bieguna*, Rozpr. Inż., **24**, 4, 1976.
12. J. MISIAK, *Metoda badania stateczności płaskiej postaci zginania dwupasowych dźwigarów kratowych poddanych działaniu obciążeń niezachowawczych*, Arch. Bud. Maszyn, **24**, 3, 1977.
13. J. MISIAK, J. NAPONA, *Stateczność płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych o pasach nierównoległych*, [przygotowana do druku].
14. J. MISIAK, *Teoria stateczności płaskich dźwigarów kratowych*, Prace naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika, **40**, 1976.
15. S. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Theory of elastic stability*, Mc Graw Hill 1961, Teoria stateczności sprężystej, Arkady, Warszawa 1963.
16. A. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*. Москва 1967.
17. С. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.
18. *Handbook of structural stability*, Edited by Column Presearch Committee of Japan Corona Publishing Company, LTD, Tokyo 1971.

Резюме

ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ УГОЛКОВЫХ ФЕРМ

Представлено решение задачи глобальной устойчивости пространственных трехпоясных ферм подвергнутых действию консервативных нагрузок. Эти фермы благодаря своим достоинствам (возможность передачи сложных нагрузок) находят широкое применение в многих инженерских конструкциях, особенно в области машиностроения (краны), а также строительства. Для правильного их проектирования, кроме определения внутренних сил, необходимо определить глобальные свойства пропольных изгибов. Из-за консервативного характера нагрузки применен статический (эйлеровский) критерий потери устойчивости. Получена однородная система девяти линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, составляющих уравнения устойчивости фермы в перемещениях. Применяя численный метод, вычислены критические значения внешних нагрузок. Работа иллюстрирована числовыми примерами.

SUMMARY

GLOBAL STABILITY OF SPATIAL ANGLE-BAR, TRUSS-GIRDERS

The problem of global stability for spatial, three-flange trussgirder under conservative loads is solved. The girders under consideration are commonly used in engineering (machinery, building construction) due to their capability to carry complex loads. In a design process, however, special care must be given to prevent buckling.

The static (Eulerian) stability criterion is applied. Linear, homogeneous system of equations in finite-differences is obtained; it describes stability of the girder with respect to displacements. The critical loads are determined and numerical examples given.

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 stycznia 1978 r.
