ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 27, 2, 317—325, 1979
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Technik.

SKRĘTNO-GIĘTNE DRGANIA NIEJEDNORODNEGO PRĘTA CIENKOŚCIENNEGO

RYSZARD SKARŻYŃSKI (WARSZAWA)

Wyprowadzono równania różniczkowe opisujące wymuszone, tłumione drgania pryzmatycznego pręta cienkościennego o niejednorodnie w przekroju poprzecznym rozmieszczonej gęstości. Rozwiązanie równań zilustrowano przykładem, w którym wyprowadzono je pomijając wpływ sił bezwładności związanych z deplanacją przekrojów poprzecznych. Wskazano na możliwość wykorzystania takiego rozwiązania jako modelu niektórych konstrukcji inżynierskich.

1. Sformułowanie zadania

W pracy rozważa się drgania cienkościennego, pryzmatycznego pręta charakteryzującego się nierównomiernie rozmieszczoną gęstością na powierzchni przekroju poprzecznego. Zmienna gęstość sprawia, że oś środków geometrycznych w pręcie nie pokrywa się z osią środków ciężkości, lecz że są one wzajemnie równoległe.

Pręt taki może być modelem zastępczym konstrukcji, która składa się z cienkościennego konturu nośnego oraz dołączonej do niego, rozłożonej równomiernie wzdłuż jego podłużnej osi, dodatkowej masy. Masa ta nie wzmacnia konstrukcji, lecz stanowi jej obciążenie, zmieniając także układ inercyjny. Konstrukcje tego typu są często spotykane w praktyce technicznej. Należą do nich chociażby trzony budynków wysokich, mosty komunikacji lądowej itp.

Wyprowadzone w niniejszej pracy cząstkowe równania różniczkowe wymuszonych, skrętno-giętnych drgań opisanego układu są nieco ogólniejsze od zamieszczonych w pracach [1, 2, 3 i 4]. Dają się one uprościć do postaci odpowiadających opisowi drgań pręta jednorodnego. Sposób znalezienia funkcji opisującej zastępczą, zmienną gęstość podany jest w przykładzie.

2. Skrętno-giętne drgania pręta

Rozważmy drgania pryzmatycznego pręta o otwartym przekroju cienkościennym i niejednorodnej gęstości właściwej. Układ współrzędnych tworzą krawędzie przenikania trzech głównych płaszczyzn bezwładności masowej, przy czym oś x jest miejscem geometrycznym środków ciężkości elementarnych segmentów pręta, ograniczonych przekrojami poprzecznymi.

Drgania są wymuszone rozłożonymi wzdłuż niej obciążeniami (q_x, q_y, q_z) oraz momentem skręcającym m_x. Pręt zbudowany jest z tworzywa lepkosprężystego o cechach Kelvina-Voigta.

Miara deplanacji przekroju w dowolnym punkcie wyraża się wzorem

$$u(x, s, t)=u(x, t)-v'(x, t)y(s)-w'(x, t)z(s)-\theta'(x, t)\omega(s), \tag{2.1}$$

gdzie $u(x, t)$ oznacza translację przekroju równoległą do osi x, $v(x, t)$ i $w(x, t)$ odpowiednie przemieszczenia w kierunku osi y i z oraz $\theta(x, t)$ kąt obrotu przekroju.

Naprężenie normalne σ_x wyznaczymy ze wzoru

$$\sigma_x(x, s, t)=EK[u'(x, t)-v''(x, t)y(s)-w''(x, t)z(s)-\theta''(x, t)w(s)], \tag{2.2}$$

gdzie K jest następującym operatorem:

$$K=1+\psi\frac{\partial}{\partial t}, \tag{2.3}$$

w którym ψ jest czasem opóźnienia, $(\ )'$ oznacza zaś różniczkowanie względem zmiennej x.

W równaniach ruchu uwzględnimy wpływ obrotu przekrojów poprzecznych. W tym celu w równaniu równowagi elementu objętości $\delta(s)\,ds\,dx$ rozpatrzymy działanie sił bezwładności $b_x(x, s, t)$ rozłożonych na konturze

$$\frac{\partial[\delta(s)\sigma_x(x, s, t)]}{\partial x}+\frac{\partial[\delta(s)\tau(x, s, t)]}{\partial s}+b_x(x, s, t)=0. \tag{2.4}$$

Jeśli założymy, że nie ma napięć stycznych na brzegu konturu, to otrzymamy następujący wzór na naprężenie styczne:

$$\tau(x, s, t)=-\frac{1}{\delta(s)}\int\limits_0^s\{b_x(x, s, t)+EK[u''(x, t)-v'''(x, t)y(s)-\\ -w'''(x, t)z(s)-\theta'''(x, t)\omega(s)]\}\,ds. \tag{2.5}$$

Składowe sił bezwładności określają wzory

$$\begin{aligned} b_x(x, s, t)&=-\rho(s)\delta(s)[\ddot{u}-\ddot{v}'y(s)-\ddot{w}'z(s)-\ddot{\theta}'\omega(s)],\\ b_y(x, s, t)&=-\rho(s)\delta(s)[\ddot{v}-(z-z_A)\ddot{\theta}],\\ b_z(x, s, t)&=-\rho(s)\delta(s)[\ddot{w}+(y-y_A)\ddot{\theta}],\end{aligned} \tag{2.6}$$

w których $\rho(s)$ jest zmienną gęstością materiału, (y_A) i (z_A) współrzędnymi bieguna głównego (A_0) oraz $(\dot{\ })$ oznacza różniczkowanie względem czasu t.

Czyniąc zadość zasadzie d'Alemberta dodajemy siły bezwładności (2.6) do obciążeń zewnętrznych:

$$
\begin{aligned}
&p_x(x,t)=q_x(x,t)+\int_S b_x(x,s,t)\,ds,\\
&p_y(x,t)=q_y(x,t)+\int_S b_y(x,s,t)\,ds,\\
&p_z(x,t)=q_z(x,t)+\int_S b_z(x,s,t)\,ds,\\
&m(x,t)=m_x(x,t)-\int_S b_y(x,s,t)(z-z_A)\,ds+\int_S b_z(x,s,t)(y-y_A)\,ds.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Wstawiając składowe (2.6) do wzorów (2.7) oraz zważywszy, że

$$
\int_S \rho(s)z(s)\delta(s)\,ds=\int_S y(s)\rho(s)\delta(s)\,ds=\int_S \rho(s)\omega(s)\delta(s)\,ds=0,
\tag{2.8}
$$

otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&p_x(x,t)=q_x(x,t)-\mu\ddot{u},\\
&p_y(x,t)=q_y(x,t)-\mu[\ddot{v}+z_A\ddot{\theta}],\\
&p_z(x,t)=q_z(x,t)-\mu[\ddot{w}-y_A\ddot{\theta}],\\
&m(x,t)=m_x(x,t)-\mu[z_A\ddot{v}-y_A\ddot{w}+R_m^2\ddot{\theta}],
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

gdzie $R_m^2=\dfrac{J_{ym}+J_{zm}}{\mu}+z_A^2+y_A^2$, (J_{ym}) i (J_{zm}) oznaczają względem odpowiednich osi układu masowe, jednostkowe momenty bezwładności przekroju poprzecznego, a μ oznacza masę jednostkową pręta. Równania równowagi elementu pręta o długości (dx) są następujące:

$$
\begin{aligned}
&\int_S \frac{\partial[\delta(s)\sigma_x(x,s,t)]}{\partial x}\,ds+p_x(x,t)=0,\\
&\int_S \frac{\partial[\delta(s)\tau(x,s,t)]}{\partial x}\,dy+p_y(x,t)=0,\\
&\int_S \frac{\partial[\delta(s)\tau(x,s,t)]}{\partial x}\,dz+p_z(x,t)=0,\\
&\int_S \frac{\partial[\delta(s)\tau(x,s,t)]}{\partial x}\,d\omega+\frac{\partial M_s(x,t)}{\partial x}+m(x,t)=0.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Po scałkowaniu przez części, przy braku napięć krawędziowych, równania (2.10) dają się przekształcić do postaci

$$
(2.11)\qquad
\begin{gathered}
\int_S \frac{\partial \sigma_x(x,s,t)}{\partial x}\,dA+p_x(x,t)=0,\\
-\int_S y\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial[\delta(s)\tau(x,s,t)]}{\partial s}\right\}ds+p_y(x,t)=0,\\
-\int_S z\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial[\delta(s)\tau(x,s,t)]}{\partial s}\right\}ds+p_z(x,t)=0,\\
-\int_S \omega\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial[\delta(s)\tau(x,s,t)]}{\partial s}\right\}ds+\frac{\partial M_s(x,t)}{\partial x}+m(x,t)=0,
\end{gathered}
$$

gdzie dA oznacza element pola powierzchni przekroju poprzecznego.

Po podstawieniu do równań (2.11) obciążeń określonych wzorami (2.9) i po wykonaniu całkowania otrzymuje się równania

$$
EK\left[u''\int_S dA-v'''\int_S y(s)\,dA-w'''\int_S z(s)\,dA-\theta'''\int_S \omega(s)\,dA\right]-\\
-q_x(x,t)+\mu\ddot{u}=0,
$$

$$
(2.12)\qquad
\begin{aligned}
&\ddot{u}'\int_S \rho(s)y(s)\,dA-\ddot{v}''\int_S \rho(s)y^2(s)\,dA-\ddot{w}''\int_S \rho(s)y(s)z(s)\,dA-\\
&\quad-\ddot{\theta}''\int_S \rho(s)\omega(s)y(s)\,dA+EK\left\{-u'''\int_S y(s)\,dA+v^{\mathrm{IV}}\int_S y^2(s)\,dA+\right.\\
&\quad\left.+w^{\mathrm{IV}}\int_S y(s)z(s)\,dA+\theta^{\mathrm{IV}}\int_S \omega(s)y(s)\,dA\right\}-q_y(x,t)+\mu[\ddot{v}+z_A\ddot{\theta}]=0,\\
&\ddot{u}'\int_S \rho(s)z(s)\,dA-\ddot{v}''\int_S \rho(s)y(s)z(s)\,dA-\ddot{w}''\int_S \rho(s)z^2(s)\,dA-\\
&\quad-\ddot{\theta}''\int_S \rho(s)\omega(s)z(s)\,dA+EK\left\{-u'''\int_S z(s)\,dA+v^{\mathrm{IV}}\int_S y(s)z(s)\,dA+\right.\\
&\quad\left.+w^{\mathrm{IV}}\int_S z^2(s)\,dA+\theta^{\mathrm{IV}}\int_S \omega(s)z(s)\,dA\right\}-q_z(x,t)+\mu[\ddot{w}-y_A\ddot{\theta}]=0,\\
&\ddot{u}'\int_S \rho(s)\omega(s)\,dA-\ddot{v}''\int_S \rho(s)\omega(s)y(s)\,dA-\ddot{w}''\int_S \rho(s)\omega(s)z(s)\,dA-\\
&\quad-\ddot{\theta}''\int_S \rho(s)\omega^2(s)\,dA+EK\left\{-u'''\int_S \omega(s)\,dA+v^{\mathrm{IV}}\int_S \omega(s)y(s)\,dA+\right.\\
&\quad\left.+w^{\mathrm{IV}}\int_S \omega(s)z(s)\,dA+\theta^{\mathrm{IV}}\int_S \omega^2(s)\,dA\right\}-GJ_s\theta''-\\
&\quad-m_x(x,t)+\mu[z_A\ddot{v}-y_A\ddot{w}+R_m^2\ddot{\theta}]=0.
\end{aligned}
$$

Dobierając odpowiednio biegun główny A_0 oraz mając na uwadze to, że osie y i z są głównymi osiami bezwładności masowej, znajdziemy

$$\int_S \rho(s) y(s) z(s) dA = \int_S \rho(s) \omega(s) y(s) dA = \int_S \rho(s) \omega(s) z(s) dA = 0. \tag{2.13}$$

Wykorzystując znikanie całek (2.8) i (2.13) we wzorach (2.12) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&EK[Au'' - S_z v''' - S_y w''' - S_\omega \theta'''] + \mu\ddot{u} = q_x(x, t),\\
&EK[-S_z u''' + J_z v^{IV} + J_{yz} w^{IV} + J_{\omega y} \theta^{IV}] - J_{zm}\ddot{v}'' + \mu[\ddot{v} + z_A \ddot{\theta}] = q_y(x, t),\\
&EK[-S_y u''' + J_{yz} v^{IV} + J_y w^{IV} + J_{\omega z} \theta^{IV}] - J_{ym}\ddot{w}'' + \mu[\ddot{w} - y_A \ddot{\theta}] = q_z(x, t),\\
&EK[-S_\omega u''' + J_{\omega y} v^{IV} + J_{\omega z} w^{IV} + J_\omega \theta^{IV}] - J_{\omega m}\ddot{\theta}'' - GJ_s \theta'' +\\
&\qquad + \mu[z_A \ddot{v} - y_A \ddot{w} + R_m^2 \ddot{\theta}] = m_x(x, t).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

We wzorach (2.14) symbole S oznaczają odpowiednie momenty statyczne, symbole J zaś odpowiednie momenty bezwładności z tym zastrzeżeniem, że dodatkowy wskaźnik $(\ )_m$ oznacza jednostkowe momenty masowe.

Równania te opisują wymuszone skrętno-giętne, tłumione drgania pryzmatycznego pręta cienkościennegó o niejednorodnym rozkładzie gęstości $\rho(y, z)$ w płaszczyźnie przekroju poprzecznego. Tworzą one układ czterech cząstkowych równań różniczkowych. Rozwiązanie ich utrudnia występowanie pochodnych rzędów nieparzystych.

W przypadkach spotykanych w technice istnieje często możliwość uproszczenia tego układu dzięki łatwo stwierdzalnemu, małemu wpływowi sił bezwładności związanych z deplanacją przekrojów poprzecznych, które można by w rozważaniach pominąć:

$$\mu\ddot{u} \approx 0. \tag{2.15}$$

Z pierwszego z równań (2.14) znajdziemy

$$EKu''' = EK[y_0 v^{IV} + z_0 w^{IV} + \omega_0 \theta^{IV}] + \frac{1}{A} q_x'(x, t), \tag{2.16}$$

gdzie y_0, z_0 i ω_0 oznaczają uogólnione współrzędne.

Pozostałe równania układu (2.14) przyjmują wówczas następującą postać:

$$\begin{aligned}
&EK[(J_z - S_z y_0) v^{IV} + (J_{yz} - S_z z_0) w^{IV} + (J_{\omega y} - S_z \omega_0)\theta^{IV}] -\\
&\qquad - J_{zm}\ddot{v}'' + \mu\ddot{v} + \mu z_A \ddot{\theta} = q_y(x, t) + y_0 q_x'(x, t),\\
&EK[(J_{yz} - S_y y_0) v^{IV} + (J_y - S_y z_0) w^{IV} + (J_{\omega z} - S_y \omega_0)\theta^{IV}] - J_{ym}\ddot{w}'' +\\
&\qquad + \mu\ddot{w} - \mu y_A \ddot{\theta} = q_z(x, t) + z_0 q_x'(x, t),\\
&EK[(J_{\omega y} - S_\omega y_0) v^{IV} + (J_{\omega z} - S_\omega z_0) w^{IV} + (J_\omega - S_\omega \omega_0)\theta^{IV}] - GJ_s \theta'' -\\
&\qquad - J_{\omega m}\ddot{\theta}'' + \mu z_A \ddot{v} - \mu y_A \ddot{w} + \mu R_m^2 \ddot{\theta} = m_x(x, t) + \omega_0 q_x'(x, t).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Równania (2.17) tworzą układ, w którym występują pochodne tylko rzędów parzystych. Umożliwia to znacznie prostsze ich rozwiązanie.

3. Przykład

Rozważymy nietłumione drgania pryzmatycznego pręta cienkościennego o długości L, obustronnie swobodnie i przegubowo utwierdzonego o budowie symetrycznej względem płaszczyzny xz z dodatkową masą, rozłożoną równomiernie wzdłuż osi x, również symetryczną względem płaszczyzny xz. Drgania pręta pozostającego na początku ruchu w spoczynku są wywołane siłą skupioną $-P$ skierowaną równolegle do osi z, poruszającą się ze stałą prędkością V wzdłuż tworzącej o równaniu $y=c$. Zastępczą gęstość $\rho(y,z)$ znajdziemy, przyjmując

$$\rho(y,z)=Ay^3+By^2z+Cyz^2+Dz^3+Fy^2+Hyz+Kz^2+My+Nz+0 \tag{3.1}$$

i korzystając z tego, że znana jest łączna masa jednostkowa μ, masowe, jednostkowe momenty statyczne $S_{\omega m}$, S_{ym} i S_{zm} oraz masowe, jednostkowe momenty bezwładności $J_{\omega m}$, $J_{\omega ym}$, $J_{\omega zm}$, J_{ym}, J_{zm} i J_{yzm}. Rozwiązanie dziesięciu równań umożliwia znalezienie stałych $A, B, C, D, F, H, K, M, N$ i 0.

Symetryczna względem płaszczyzny xz budowa pręta sprawia, że w równanaich (2.17) znikają następujące wielkości: $y_0=y_A=J_{yz}=S_z=S_\omega=\omega_0=0$ i układ przyjmuje uproszczoną postać

$$\begin{aligned}
&EJ_z v^{IV}+EJ_{\omega y}\theta^{IV}-J_{zm}\ddot{v}''+\mu\ddot{v}+\mu z_A\ddot{\theta}=0,\\
&E(J_y-S_y z_0)w^{IV}-J_{ym}\ddot{w}''+\mu\ddot{w}=-P\delta(x-Vt),\\
&EJ_\omega\theta^{IV}-GJ_s\theta''-J_{\omega m}\ddot{\theta}''+\mu R_m^2\ddot{\theta}+EJ_{\omega y}v^{IV}+\mu z_A\ddot{v}=-Pc\delta(x-Vt),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

gdzie $\delta(x-Vt)$ jest to quasi-funkcja Diraca.

Drgania poprzeczne w płaszczyźnie xz odbywają się tu niezależnie od pozostałych. Układ równań tworzą tylko pozostałe dwa równania. Stosując skończoną transformację sinusową Fouriera względem współrzędnej położenia oraz transformację całkową Laplace'a funkcji przemieszczeń v i θ względem czasu otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
&[EJ_z\alpha_n^4+(J_{zm}\alpha_n^2+\mu)p^2]\hat{\bar{v}}+[EJ_{\omega y}\alpha_n^4+\mu z_A p^2]\hat{\bar{\theta}}=0,\\
&[EJ_{\omega y}\alpha_n^4+\mu z_A p^2]\hat{\bar{v}}+[EJ_\omega\alpha_n^4+GJ_s\alpha_n^2+(J_{\omega m}\alpha_n^2+\mu R_m^2)p^2]\hat{\bar{\theta}}=\\
&\qquad=-Pc\mathscr{L}[\sin(a_n t)],
\end{aligned} \tag{3.3}$$

gdzie

$$\bar{f}=\int_0^l f(x)\sin(\alpha_n x)\,dx,\qquad \hat{f}=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt,\qquad a_n=\frac{n\pi V}{L},\qquad \alpha_n=\frac{n\pi}{L}.$$

Jeśli równania (3.3) przepisze się w nieco prostszej formie

$$\begin{aligned}
&(\beta_1+\beta_2 p^2)\hat{\bar{v}}+(\gamma_1+\gamma_2 p^2)\hat{\bar{\theta}}=0,\\
&(\beta_3+\beta_4 p^2)\hat{\bar{v}}+(\gamma_3+\gamma_4 p^2)\hat{\bar{\theta}}=-Pc\mathscr{L}[\sin(a_n t)],
\end{aligned} \tag{3.4}$$

to

$$\hat{\theta}=\frac{-Pc(\beta_1+\beta_2 p^2)\,\mathscr{L}\,[\sin(a_n t)]}{(\beta_2\gamma_4-\gamma_2\beta_4)p^4+(\beta_1\gamma_4+\beta_2\gamma_3-\gamma_2\beta_3-\gamma_1\beta_4)p^2+(\beta_1\gamma_3-\gamma_1\beta_3)}. \tag{3.5}$$

Transformatę kąta obrotu (3.5) można przedstawić w postaci

$$\hat{\theta}=\frac{-Pc\,\mathscr{L}\,[\sin(a_n t)]}{\beta_2\gamma_4-\gamma_2\beta_4}\left\{\frac{C_{1n}}{p^2-p_{1n}^2}+\frac{C_{n2}}{p^2-p_{2n}^2}\right\}, \tag{3.6}$$

gdzie p_{1n}^2 i p_{2n}^2 są pierwiastkami układu równań jednorodnych (3.4), przy czym

$$p_{1n}^2=-\omega_{1n}^2, \qquad p_{2n}^2=-\omega_{2n}^2, \tag{3.7}$$

a symbole ω_n oznaczają częstości kątowe drgań własnych pręta. Otrzymuje się charakterystyczne dla drgań skrętno-giętnych dwa zbiory wartości ω_n.

Porównanie postaci przemieszczenia (3.5) i (3.6) prowadzi do znalezienia stałych C:

$$C_{1n}=\frac{\omega_{1n}^2\beta_2-\beta_1}{\omega_{1n}^2-\omega_{2n}^2}, \qquad C_{2n}=\frac{\beta_1-\omega_{2n}^2\beta_2}{\omega_{1n}^2-\omega_{2n}^2}. \tag{3.8}$$

Podstawiając stałe (3.8) do równań (3.6) i dokonując transformacji odwrotnych, otrzymuje się

$$\theta(x,t)=-\frac{2Pc}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\alpha_n x)}{(\beta_2\gamma_4-\gamma_2\beta_4)}\int_0^t \sin(a_n\tau)\left\{\left[\beta_2-\frac{\beta_1}{\omega_{1n}^2}\right]\sin\omega_{1n}(t-\tau)+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\beta_1}{\omega_{2n}^2}-\beta_2\right]\sin\omega_{2n}(t-\tau)\right\}d\tau. \tag{3.9}$$

Po wykonaniu całkowania i uporządkowaniu otrzymamy

$$\theta(x,t)=-\frac{2Pc}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\alpha_n x)}{(\omega_{1n}^2-\omega_{2n}^2)(\beta_2\gamma_4-\gamma_2\beta_4)}\left\{\left(\frac{a_n t}{a_n^2-\omega_{1n}^2}\right)\times\right.$$
$$\times\left(\beta_2-\frac{\beta_1}{\omega_{1n}}\right)\sin(\omega_{1n}t)-\left(\frac{a_n t}{a_n^2-\omega_{2n}^2}\right)\left(\beta_2-\frac{\beta_1}{\omega_{2n}^2}\right)\sin(\omega_{2n}t)+$$
$$\left.+\left[\left(\frac{\omega_{2n}t}{a_n^2-\omega_{2n}^2}\right)\left(\beta_2-\frac{\beta_1}{\omega_{2n}^2}\right)-\left(\frac{\omega_{1n}t}{a_n^2-\omega_{1n}^2}\right)\left(\beta_2-\frac{\beta_1}{\omega_{1n}^2}\right)\right]\sin(a_n t)\right\}. \tag{3.10}$$

Postępując podobnie jak przy znajdowaniu kąta obrotu θ otrzymuje się funkcję opisującą przebieg zmian przemieszczeń poziomych:

$$v(x,t)=\frac{2Pc}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\alpha_n x)}{(\omega_{1n}^2-\omega_{2n}^2)(\beta_2\gamma_4-\gamma_2\beta_4)}\left\{\left(\frac{a_n t}{a_n^2-\omega_{2n}^2}\right)\times\right.$$
$$\times\left(-\gamma_2+\frac{\gamma_1}{\omega_{2n}^2}\right)\sin(\omega_{2n}t)-\left(\frac{a_n t}{a_n^2-\omega_{1n}^2}\right)\left(-\gamma_2+\frac{\gamma_1}{\omega_{1n}^2}\right)\sin(\omega_{1n}t)+$$
$$\left.+\left[\left(\frac{\omega_{1n}t}{a_n^2-\omega_{1n}^2}\right)\left(-\gamma_2+\frac{\gamma_1}{\omega_{1n}^2}\right)-\left(\frac{\omega_{2n}t}{a_n^2-\omega_{2n}^2}\right)\left(-\gamma_2+\frac{\gamma_1}{\omega_{2n}^2}\right)\right]\sin(a_n t)\right\}. \tag{3.11}$$

Literatura cytowana w tekście

1. N. Biezuchow, J. Łužin, *K rasčotu tonkostiennych strieržniej na wynuždiennyje kolebanja*, Issl. po teorii soor., 7, 1957.
2. *Drgania i fale*, red. S. Kaliski, PWN, Warszawa 1966.
3. W. Nowacki, *Dynamika budowli*, Arkady, Warszawa 1972.
4. J. Rutecki, *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*, PWN, Warszawa 1957.

Резюме

КРУТИЛЬНО-ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ

В работе выведены дифференциальные уравнения описывающие вынужденные, затухающие колебания призматического тонкостенного стержня с неоднородно, в поперечном сечении, распределенной плотностью. Решение уравнений иллюстрировано примером, в котором получено решение, пренебрегая влиянием сил инерции, связанных с депланацией поперечных сечений. Указана возможность использования такого решения как модели некоторых инженерных конструкций.

Summary

TORSIONAL AND FLEXURAL VIBRATIONS OF A NON-HOMOGENEOUS THIN-WALLED ROD

The paper presents the derivation of the differential equations governing damped vibrations of a thin-walled prismatic rod with non-uniformly distributed mass over its cross-section. Solution of the equations is illustrated by an example in which the effects of inertia forces connected with deplanation of the cross-sections have been disregarded. Such a solution might serve as a model of certain engineering structures.

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 listopada 1977 r.