

TARCZA SIATKOWA DOWOLNIE OBCIĄŻONA

JAN LEWIŃSKI (WARSZAWA)

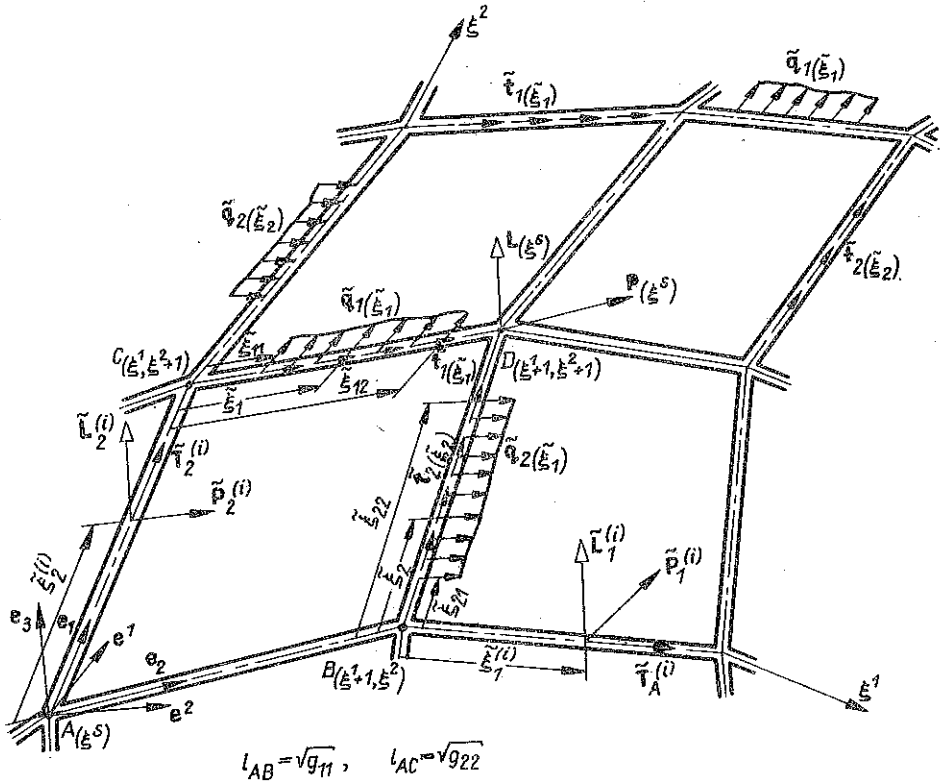
W pracy rozważa się problem tarcz siatkowych dowolnie obciążonych wzdłuż długości swoich prętów. Przedstawia się sposób obliczania dodatkowych wyrazów pochodzących od dowolnego obciążenia prętów tarcz siatkowych. Wyrazy te, wprowadzone do znanych z pracy [1] równań opisujących zagadnienie statyki tarcz siatkowych, określają wpływ obciążenia działającego na pręty — na wartość i charakter przebiegu sił wewnętrznych. Praca ilustrowana jest przykładami szczególnymi, uzasadniającymi potrzebę stosowania proponowanej metody rozwiązania.

1. UWAGI WSTĘPNE

Praca stanowi rozszerzenie prac [1, 2, 3 i 4] na przypadek tarcz siatkowych obciążonych dowolnie wzdłuż długości swoich prętów. Obciążenie tego rodzaju występuje np. w przypadku tarcz wirujących lub poddanych przyspieszeniu. Celem pracy (podobnie jak było w przypadku pracy [4]) jest podanie ogólnego sposobu określania pewnych dodatkowych wyrazów będących funkcjami obciążenia prętów. Wyrazy te wprowadzone kolejno do równań równowagi prętów, związków fizycznych i równań równowagi tarczy pozwalają określić wpływ obciążenia prętów na wartości przemieszczeń oraz sił wewnętrznych tarczy. W pracy wykorzystuje się ogólną metodę rozwiązywania zagadnień statyki tarcz siatkowych opracowaną w monografii [1]. Zgodnie z tą monografią stosowane jest nazewnictwo i symbolika. Praca ilustrowana jest przykładami szczególnymi, uzasadniającymi potrzebę stosowania proponowanej metody rozwiązywania tarcz w przypadku złożonych obciążeń.

2. OPIS ZAGADNIENIA. RÓWNANIA RÓWNOWAGI PRĘTÓW

Rozważana tarcza siatkowa przedstawiona jest na rys. 1. Opis geometryczny tarczy zgodny jest ze stosowanym w pracach [1 i 4]. Obciążenie tarczy stanowią siły $P_{(\xi^s)}$ i momenty $L_{(\xi^s)}$, zaczepione w węzłach; siły skupione $\tilde{P}_A^i(\xi_A^i)$ i $\tilde{T}_A^i(\xi_A^i)$ działające na pręty siatki prostopadłe i stycznie do nich, momenty skupione $\tilde{L}_A^i(\xi_A^i)$ oraz dowolne obciążenie ciągłe $\tilde{q}_A(\xi_A)$ i $\tilde{t}_A(\xi_A)$ działające na pręty ($A=1, 2$; $i=1, 2, \dots, n$; $s=1, 2$). Położenie obciążenia działającego na pręty określa się za pomocą lokalnej współrzędnej ξ_A o początku w węźle poprzedzającym dany pręt.

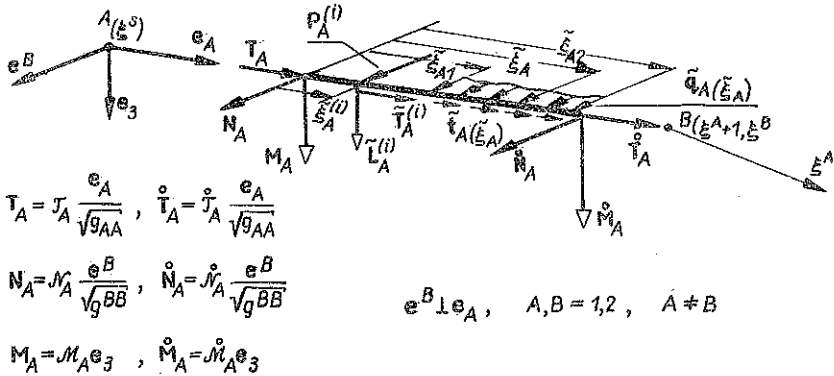


Rys. 1

Zgodnie z [1] obciążenie działające na tarczę można napisać następująco:

$$(2.1) \quad P = \rho^i \frac{e_i}{\sqrt{g_{tt}}}, \quad \tilde{P}_A^i = \tilde{\rho}_A^i \frac{e^B}{\sqrt{g^{BB}}}, \quad \tilde{T}_A^i = \tilde{\mathcal{T}}_A^i \frac{e_A}{\sqrt{g_{AA}}} \quad (A \neq B);$$

$$L = \mathcal{L} e_3, \quad \tilde{L}_A^i = \tilde{\mathcal{L}}_A^i e_3, \quad \tilde{q}_A = \tilde{q}_A \frac{e^B}{\sqrt{g^{BB}}}, \quad \tilde{t}_A = \tilde{t}_A \frac{e_A}{\sqrt{g_{AA}}} \quad (B=1, 2).$$



Rys. 2

Rys. 2 przedstawia dowolny pręt siatki obciążony siłami i momentami zewnętrznymi oraz składowymi napięcia wewnętrznego. Na rysunku pokazano dodatnie zwroty tych składowych. Równania równowagi pręta mają w tym przypadku następującą postać:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \mathring{\mathcal{F}}_A &= -\mathcal{F}_A - \mathring{\mathcal{F}}_A, & \mathring{\mathcal{N}}_A &= -\mathcal{N}_A - \mathring{\mathcal{N}}_A, \\ \mathring{\mathcal{M}}_A &= -\mathcal{M}_A + \varepsilon_{AB3}^* \sqrt{g_{AA}} \mathcal{N}_A - \mathring{\mathcal{L}}_A \quad (\varepsilon_{AB3}^* = \pm 1), \end{aligned}$$

gdzie

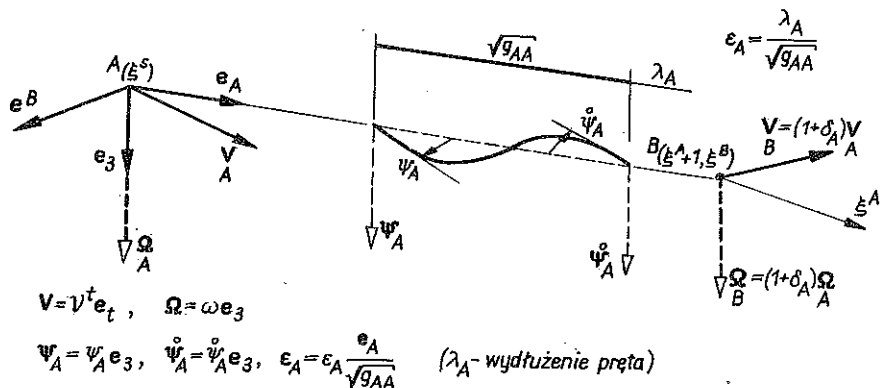
$$(2.3) \quad \begin{aligned} \mathring{\mathcal{F}}_A &= \sum_{i=1}^n \mathring{\mathcal{F}}_A^i + \int_{\xi_{A1}}^{\xi_{A2}} \mathring{f}_A d\xi_A, & \mathring{\mathcal{N}}_A &= \sum_{i=1}^n \mathring{P}_A^i + \int_{\xi_{A1}}^{\xi_{A2}} \mathring{q}_A d\xi_A, \\ \mathring{\mathcal{L}}_A &= \sum_{i=1}^n \mathring{\mathcal{L}}_A^i - \varepsilon_{AB3}^* \left[\sum_{i=1}^n (g_{AA} - \xi_A^i) \mathring{P}_A^i + \int_{\xi_{A1}}^{\xi_{A2}} (\sqrt{g_{AA} - \xi_A}) \mathring{q}_A d\xi_A \right]. \end{aligned}$$

Wzory (2.3) określają dodatkowe wyrazy wynikające z obciążenia prętów i odróżniające równania (2.2) od analogicznych stosowanych w pracy [1].

3. ZWIĄZKI FIZYCZNE

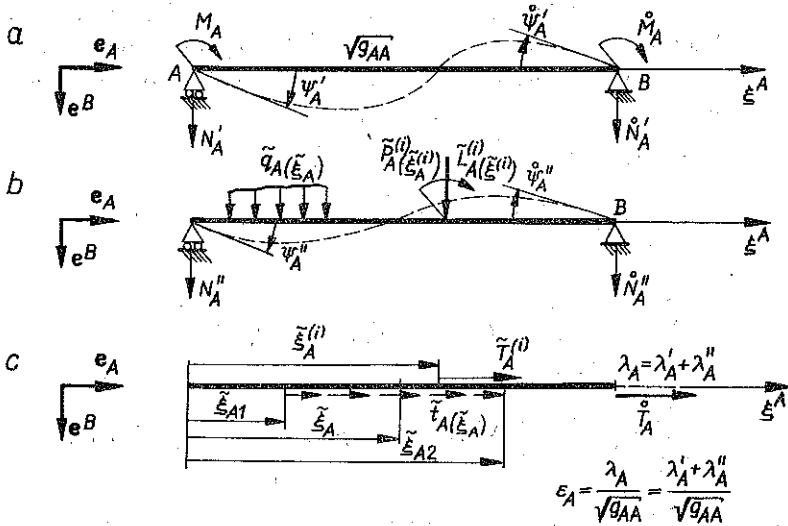
Rys. 3 przedstawia odkształconą postać dowolnego pręta siatki. Odkształcenie to, dla celów niniejszej pracy, opisuje się za pomocą kątów zgięcia ψ_A i $\mathring{\psi}_A$ oraz wydłużenia względnego $\varepsilon_A = \frac{\lambda_A}{\sqrt{g_{AA}}}$ (λ_A oznacza wydłużenie bezwzględne pręta).

Wielkości te dają się wyrazić przez składowe stanu przemieszczenia \mathbf{V} i $\mathbf{\Omega}$ (rys. 3) za pomocą wzorów podanych w pracy [1].



Rys. 3.

W dalszej części pracy wzory te uważane będą za znane. Dla określenia związków fizycznych dotyczących rozpatrywanego zagadnienia zastosowana zostanie zasada superpozycji.



Rys. 4.

Obciążenie dowolnego pręta można podzielić na przywęzłowe i działające wzdłuż jego długości. Z obciążeniami tymi stowarzyszone są odpowiednie części całkowitego odkształcenia pręta. Na rys. 4a i b przedstawiono schematy obliczania kątów zgięcia danego pręta. Zgodnie z nimi można napisać

$$(3.1) \quad \psi_A = \psi_A' + \psi_A'', \quad \dot{\psi}_A = \dot{\psi}_A' + \dot{\psi}_A'',$$

gdzie

$$(3.2) \quad \psi_A' = \frac{\sqrt{g_{AA}}}{6d_A} (2M_A - \dot{M}_A), \quad \dot{\psi}_A' = -\frac{\sqrt{g_{AA}}}{6d_A} (M_A - 2\dot{M}_A),$$

przy czym d_A oznacza sztywność giętą danego pręta. Kąty ψ_A' i $\dot{\psi}_A'$ są wywołane momentami przywęzłowymi. Natomiast kąty ψ_A'' i $\dot{\psi}_A''$ są to dodatkowe kąty zgięcia wywołane obciążeniem zewnętrznym pręta. Ich istnienie odróżnia rozpatrywane zagadnienie od dotychczas opisanych [1 i 2]. Kąty te można obliczyć dla szczególnych postaci obciążenia pręta dowolnym sposobem, znanym z teorii belek. W pracy kąty te uważane będą za znane. Na rys. 4c przedstawiono schemat obliczania wydłużenia względnego dowolnego pręta. Można napisać

$$(3.3) \quad \varepsilon_A = \varepsilon_A' + \varepsilon_A'' = \mathcal{F}_A / d_{0A} + \varepsilon_A''.$$

Tutaj ε_A' oznacza wydłużenie pręta wywołane siłami przywęzłowymi oraz

$$(3.4) \quad \varepsilon_A'' = \frac{1}{d_{0A} \sqrt{g_{AA}}} \left[\sum_{i=1}^n \mathcal{F}_A^i \xi_A^i + \int_{\xi_{A1}}^{\xi_{A2}} \left(\int_{\xi_A}^{\xi_{A2}} \tilde{t}_A d\tilde{\xi}_A \right) d\xi_A + \left(\int_{\xi_{A1}}^{\xi_{A2}} \tilde{t}_A d\tilde{\xi}_A \right) \xi_{A1} \right]$$

oznacza dodatkowe wydłużenie pręta spowodowane siłami zewnętrznymi działającymi wzdłuż pręta (d_{0A} jest to sztywność podłużna pręta). Tak więc związki fizyczne dla rozpatrywanego przypadku można napisać w postaci

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \mathcal{M}_A &= \frac{2d_A}{\sqrt{g_{AA}}} (2\psi_A + \dot{\psi}_A) - 2 \frac{2\check{C}_A + \check{C}_A}{\sqrt{g_{AA}}}, & \mathcal{F}_A &= d_{0A} \varepsilon_A - \check{C}_{0A}, \\ \mathcal{N}_A &= \varepsilon_{AB3} \left[\frac{6d_A}{g_{AA}} (\psi_A + \dot{\psi}_A) - 6 \frac{\check{C}_A + \check{C}_A}{g_{AA}} + \frac{\check{Z}_A}{\sqrt{g_{AA}}} \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.6) \quad \check{C}_A = d_A \psi_A'', \quad \check{C}_A = d_A \dot{\psi}_A'', \quad \check{C}_{0A} = d_{0A} \varepsilon_A''$$

stanowią dodatkowe wyrazy wchodzące do związków fizycznych, określające wpływ obciążenia prętów na wartości sił i momentów przywęzłowych.

4. RÓWNANIA RÓWNOWAGI TARCZY

Zgodnie z [1] stanowią je równania równowagi dowolnego węzła siatki obciążonego siłami zewnętrznymi i przywęzłowymi. Wyrażając te ostatnie przez składowe stanu przemieszczenia (za pomocą związków fizycznych (3.5)) można równania równowagi dla rozpatrywanego zagadnienia napisać w następującej postaci operatorowej:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} F_{At}^T \mathcal{V}^t + F_A^T \omega &= F_{0t}^T \mathcal{P}^t + F_{A0}^T, \\ F_{At} \mathcal{V}^t + F_A \omega &= F_0 \mathcal{L} + F_{A0} \quad (T, t=1, 2), \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.2) \quad \begin{aligned} F_{A0}^T &= -(g_r^T + \Gamma_{rB}^T)(1 + \delta_B) \left\{ (g_t^r + \Gamma_{tA}^r)(1 + \delta_A) \left[\frac{g_A^t}{\sqrt{g_{AA}}} (\check{C}_{0A} - \check{F}_A) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varepsilon_{AB3} \frac{g^{Bt}}{\sqrt{g^{BB}}} \left(\frac{\check{Z}_A}{\sqrt{g_{AA}}} - \frac{6}{\sqrt{g_{AA}}} (\check{C}_A + \check{C}_A) \right) \right] - \frac{g_A^t}{\sqrt{g_{AA}}} \check{C}_{0A} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{g^{Bt}}{\sqrt{g^{BB}}} \left[\varepsilon_{AB3} \left(\frac{6}{g_{AA}} (\check{C}_A + \check{C}_A) - \frac{\check{Z}_A}{\sqrt{g_{AA}}} \right) - \check{N}_A \right] \right\}, \\ F_{A0} &= (1 + \delta_B) \left[(1 + \delta_A) \frac{2}{\sqrt{g_{AA}}} (2\check{C}_A + \check{C}_A) + \frac{2}{\sqrt{g_{AA}}} (\check{C}_A + 2\check{C}_A) \right]. \end{aligned}$$

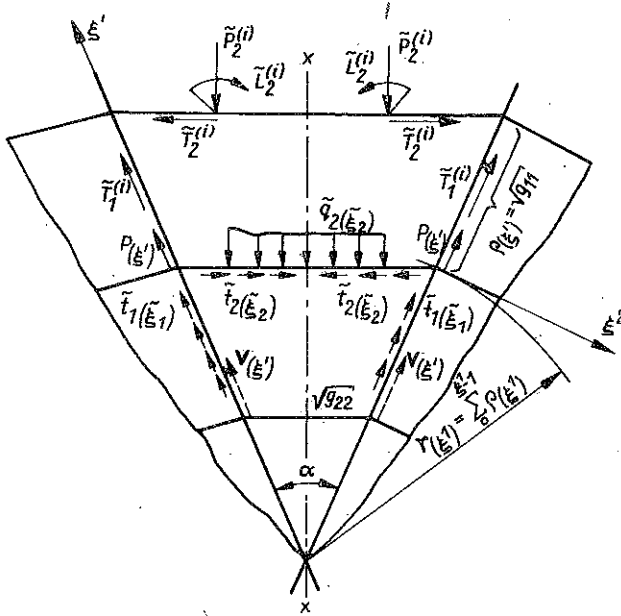
Operatory (4.2) określają dodatkowe wyrazy występujące w równaniach równowagi pochodzące od obciążenia prętów. Wyrazy te charakteryzują wpływ tego obciążenia na wartości przemieszczeń \mathcal{V}^t i ω węzłów tarczy. Postać pozostałych operatorów układu równań (4.1) jest znana [5].

5. PRZYKŁADY TARCZ

5.1. Tarcza biegunowa

Rozpatrywana będzie tarcza biegunowo-symetrycznie obciążona (rys. 5). W tym przypadku wszystkie wielkości związane z tarczą są funkcjami jedynie współrzędnej promieniowej ξ^1 . Zakładając, że obciążenie jest symetryczne względem osi x (rys. 5) stan przemieszczenia tarczy określimy następująco:

$$(5.1) \quad \mathbf{V} = \mathcal{V}_{(\xi^1)} \frac{\mathbf{e}_1}{\sqrt{g_{11}}}, \quad \Omega \equiv 0.$$



Rys. 5.

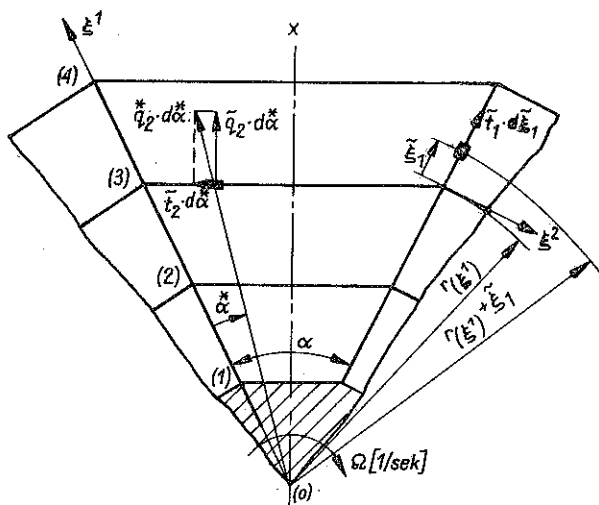
Związki fizyczne sprowadzają się do postaci

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_1^\circ &= d_{01} \frac{\delta_1 \mathcal{V}}{\rho} - \check{C}_{01}, & \mathcal{F}_1 &= -\mathcal{F}_1^\circ - \check{\mathcal{F}}_1, \\ \mathcal{F}_2^\circ &= -\mathcal{F}_2 = d_{02} \frac{\mathcal{V}^*}{r} - \check{C}_{02}, & \mathcal{N}_2 &= \mathcal{N}_2^\circ = -\frac{1}{2} \check{\mathcal{N}}_2, \\ \mathcal{M}_2 &= -\mathcal{M}_2 = -\check{C}_2 / r \sin \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Pozostałe wielkości przywęzłowe są tożsamościowo równe zero. Układ równań równowagi (4.1) sprowadza się do jednego równania o następującej postaci algebraicznej:

$$\begin{aligned}
 (5.3) \quad & -\left(\frac{d_{01}}{\rho}\right)_{(\xi^1)} \mathcal{V}_{(\xi^1)} + \left[\left(\frac{d_{01}}{\rho}\right)_{(\xi^1)} + \left(\frac{d_{01}}{\rho}\right)_{(\xi^1+1)} + 2\left(\frac{d_{02}}{r}\right)_{(\xi^1+1)} \sin \frac{\alpha}{2} \right] \mathcal{V}_{(\xi^1+1)} - \\
 & -\left(\frac{d_{01}}{\rho}\right)_{(\xi^1+1)} \mathcal{V}_{(\xi^1+2)} = P_{(\xi^1+1)} + \tilde{C}_{01(\xi^1)} - \tilde{C}_{01(\xi^1+1)} + \tilde{\mathcal{F}}_{1(\xi^1+1)} + \\
 & + 2\tilde{C}_{02(\xi^1+1)} \sin \frac{\alpha}{2} + \tilde{\mathcal{N}}_{2(\xi^1+1)} \cos \frac{\alpha}{2}.
 \end{aligned}$$

Wyrazy występujące po prawej stronie tego równania zależą od konkretnej postaci obciążenia.



Rys. 6.

a) Przykład szczególny tarczy wirującej z prędkością kątową Ω (rys. 6). Są dane: masa właściwa μ oraz przekroje prętów $A_{A(\xi^1)}$. Na dowolny element pręta promieniowego działa siła

$$(5.4) \quad \tilde{t}_1 d\xi_1 = \mu \Omega^2 A_1 (r + \xi_1) d\xi_1 \quad (0 \leq \xi_1 \leq \rho),$$

na dowolny zaś element pręta obwodowego siła $\tilde{q}_2 d\xi_2$ o składowych

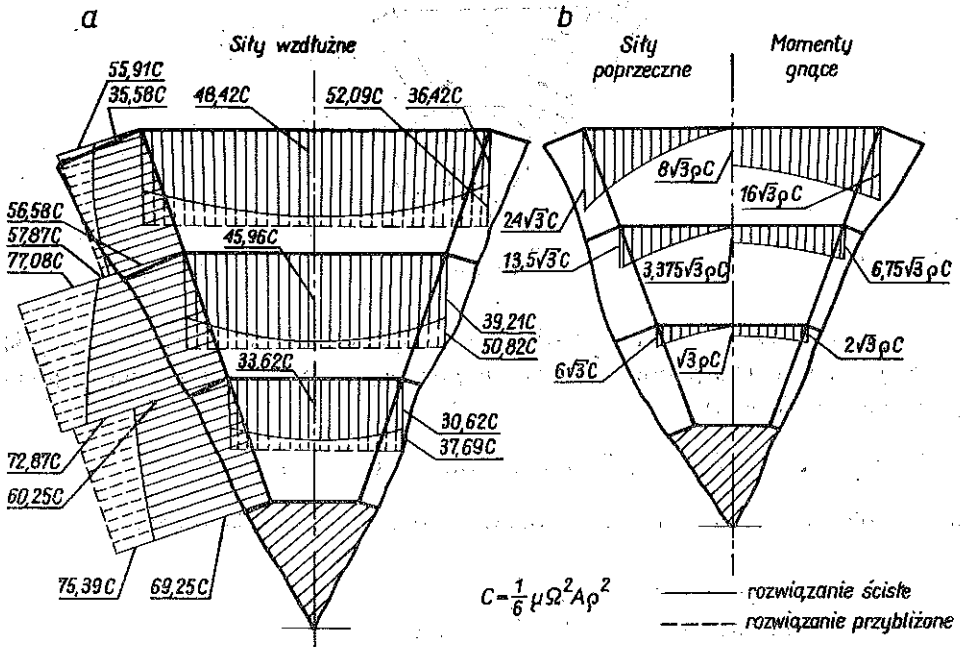
$$\begin{aligned}
 (5.5) \quad \tilde{q}_2 d\alpha^* &= \mu \Omega^2 A_2 r^2 \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \alpha^* \right)} d\alpha^*, \\
 \tilde{t}_2 d\alpha^* &= -\mu \Omega^2 A_2 r^2 \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} - \alpha^* \right)}{\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \alpha^* \right)} d\alpha^* \quad (0 \leq \alpha^* \leq \alpha).
 \end{aligned}$$

Wyrazy dodatkowe w tym przypadku mają postać następującą:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{N}}_2 &= \mu\Omega^2 A_2 r^2 \sin \alpha, & \tilde{\mathcal{C}}_{02} &= \frac{1}{6} \mu\Omega^2 A_2 r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \\ (5.6) \quad \tilde{\mathcal{F}}_1 &= \frac{1}{2} \mu\Omega^2 A_1 \rho^2 \left(1 + 2 \frac{r}{\rho}\right), & \tilde{\mathcal{C}}_{01} &= \frac{1}{6} \mu\Omega^2 A_1 \rho^2 \left(2 + 3 \frac{r}{\rho}\right), \\ \tilde{\mathcal{C}}_2 &= -\tilde{\mathcal{C}}_2^* & &= -\frac{1}{3} \mu\Omega^2 A_2 r^4 \cos \frac{\alpha}{2} \sin^3 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Przykład liczbowy. Rozwiązano zagadnienie tarczy z rys. 6 dla następujących danych: $A_{1(\xi_1)} = A_{2(\xi_2)} = A$, $\rho_{(\xi_1)} = \rho$, $d_{01(\xi_1)} = d_{02(\xi_2)} = d_0$, $\alpha = 60^\circ$ oraz następujących warunków brzegowych: $\psi_{(1)} = 0$, $A_{1(4)} = 0$. Wyniki przedstawiają wykresy zamieszczone na rys. 7.

Dla porównania tę samą tarczę rozważono w sposób przybliżony, sprowadzając masę tarczy do węzłów. W ten sposób uzyskano obciążenie tarczy przyłożone wy-



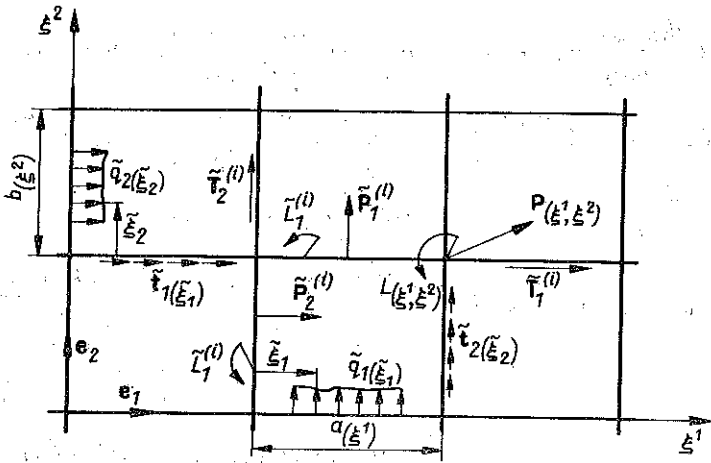
Rys. 7.

łącznie do węzłów, co odpowiada metodzie znanej z pracy [1]. Wyniki rozwiązania naniesiono linią przerywaną na wykresy z rys. 7a. Widoczne są istotne różnice w wartościach i przebiegu sił wewnętrznych. Największy błąd rozwiązania przybliżonego dla sił normalnych wynosi około 57%.

5.2. Tarcza prostokątna

Rysunek 8 przedstawia dowolnie obciążoną tarczę prostokątną. Węzły siatki mogą doznać dowolnych przesunięć w kierunkach obu osi współrzędnych oraz obrotów. Związki fizyczne (uwzględniając [1]) przedstawimy w postaci

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_A &= \varepsilon_{AB3}^* \left\{ \frac{6d_A}{g_{AA}} \left[-2 \frac{\varepsilon_{AB3}^*}{\sqrt{g_{AA}}} \delta_A \psi^B + (2 + \delta_A) \omega \right] - 6 \frac{\check{C}_A + \check{\check{C}}_A}{g_{AA}} + \frac{\check{\mathcal{F}}_A}{\sqrt{g_{AA}}} \right\}, \\
 \mathcal{M}_A &= \frac{2d_A}{\sqrt{g_{AA}}} \left[-3 \frac{\varepsilon_{AB3}^*}{\sqrt{g_{AA}}} \delta_A \psi^B + (3 + \delta_A) \omega \right] - \frac{2}{\sqrt{g_{AA}}} (2\check{C}_A + \check{\check{C}}_A), \\
 \mathcal{M}'_A &= \frac{2d_A}{\sqrt{g_{AA}}} \left[-3 \frac{\varepsilon_{AB3}^*}{\sqrt{g_{AA}}} \delta_A \psi^B + (3 + 2\delta_A) \omega \right] - \frac{2}{\sqrt{g_{AA}}} (\check{C}_A + 2\check{\check{C}}_A), \\
 \mathcal{J}'_A &= \frac{d_{0A}}{\sqrt{g_{AA}}} \delta_A \psi^A - \check{C}_{0A}, \quad \mathcal{F}_A = -\mathcal{J}'_A - \check{\mathcal{F}}_A, \quad \mathcal{N}'_A = -\mathcal{N}_A - \check{\mathcal{N}}_A.
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$



Rys. 8.

Równania równowagi (4.1) sprowadzają się do trzech o następującej postaci operatorowej ($\psi=1, 2, 3$):

$$\begin{aligned}
 (5.8) \quad & A_1^\psi V_{(\xi^1, \xi^2+1)}^1 + A_2^\psi V_{(\xi^1+1, \xi^2)}^1 + A_3^\psi V_{(\xi^1+1, \xi^2+1)}^1 + A_4^\psi V_{(\xi^1+2, \xi^2+1)}^1 + \\
 & + A_5^\psi V_{(\xi^1+1, \xi^2+2)}^1 + B_1^\psi V_{(\xi^1, \xi^2+1)}^2 + B_2^\psi V_{(\xi^1+1, \xi^2)}^2 + B_3^\psi V_{(\xi^1+1, \xi^2+1)}^2 + \\
 & + B_4^\psi V_{(\xi^1+2, \xi^2+1)}^2 + B_5^\psi V_{(\xi^1+1, \xi^2+2)}^2 + C_1^\psi \omega_{(\xi^1, \xi^2+1)} + C_2^\psi \omega_{(\xi^1+1, \xi^2)} + \\
 & + C_3^\psi \omega_{(\xi^1+1, \xi^2+1)} + C_4^\psi \omega_{(\xi^1+2, \xi^2+1)} + C_5^\psi \omega_{(\xi^1+1, \xi^2+2)} = F_0^\psi.
 \end{aligned}$$

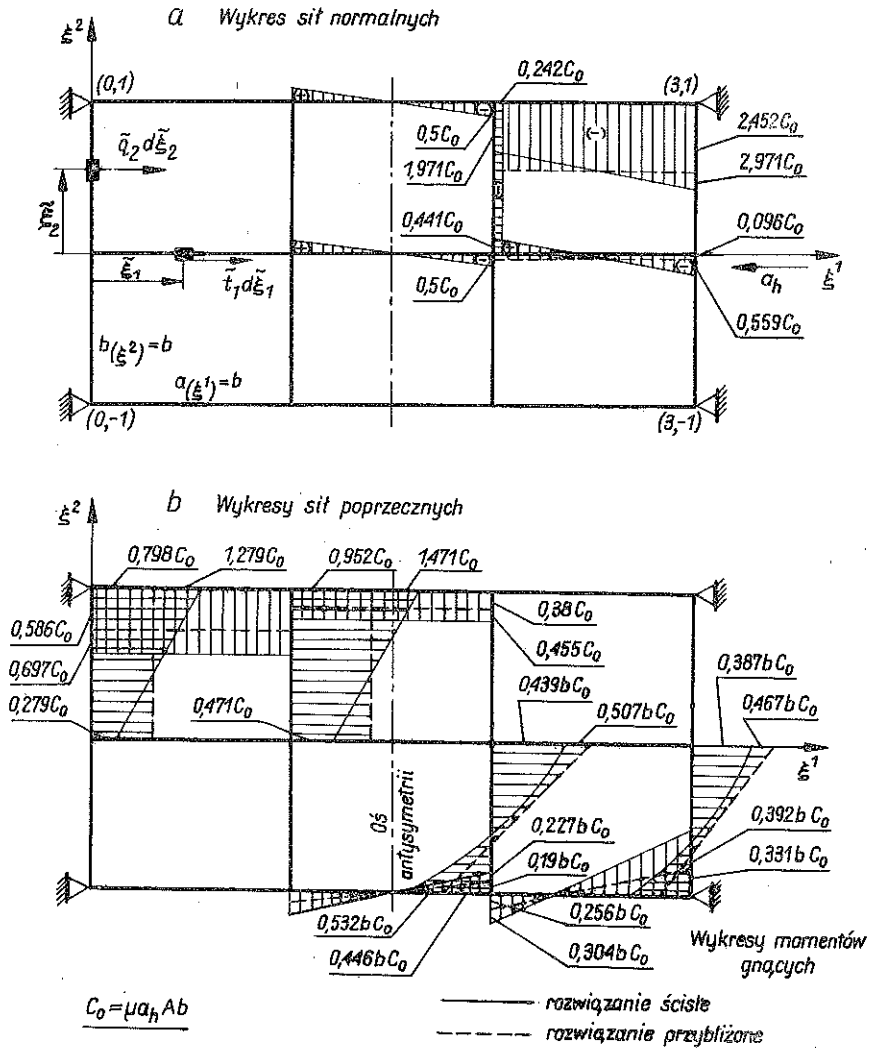
gdzie

$$(5.9) \quad A_1^1 = -\frac{d_{01}(\xi^1, \xi^2+1)}{a(\xi^1)}, \quad A_2^1 = -12 \frac{d_2(\xi^1+1, \xi^2)}{b(\xi^2)^3}, \quad A_4^1 = -\frac{d_{01}(\xi^1+1, \xi^2+1)}{a(\xi^1+1)}$$

$$\begin{aligned}
(5.9) \quad & A_5^1 = -12 \frac{d_{2(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{b_{(\xi^2+1)}^3}, \quad A_3^1 = -(A_1^1 + A_2^1 + A_4^1 + A_5^1), \quad B_1^1 = B_2^1 = B_3^1 = B_4^1 = B_5^1 = 0, \\
& [cd.] \\
& C_1^1 = C_4^1 = 0, \quad C_2^1 = 6 \frac{d_{2(\xi^1+1, \xi^2)}}{b_{(\xi^2)}^2}, \quad C_5^1 = -6 \frac{d_{2(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{b_{(\xi^2+1)}^2}, \quad C_3^1 = C_2^1 + C_5^1, \\
& A_1^2 = A_2^2 = A_3^2 = A_4^2 = A_5^2 = 0, \quad B_1^2 = -12 \frac{d_{1(\xi^1, \xi^2+1)}}{a_{(\xi^1)}^3}, \quad B_2^2 = -\frac{d_{02(\xi^1+1, \xi^2)}}{b_{(\xi^2)}}, \\
& B_4^2 = -12 \frac{d_{2(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{a_{(\xi^1+1)}^3}, \quad B_5^2 = -\frac{d_{02(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{b_{\xi^2+1}}, \quad C_2^2 = C_5^2 = 0, \\
& B_3^2 = -(B_1^2 + B_2^2 + B_4^2 + B_5^2), \quad C_1^2 = -6 \frac{d_{1(\xi^1, \xi^2+1)}}{a_{(\xi^1)}^2}, \quad C_3^2 = C_1^2 + C_4^2, \\
& C_4^2 = 6 \frac{d_{1(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{a_{(\xi^1+1)}^2}, \quad A_1^3 = A_4^3 = 0, \\
& A_2^3 = -6 \frac{d_{2(\xi^1+1, \xi^2)}}{b_{(\xi^2)}^2}, \quad A_5^3 = 6 \frac{d_{2(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{b_{(\xi^2+1)}^2}, \quad A_3^3 = -(A_2^3 + A_5^3), \\
& B_1^3 = 6 \frac{d_{1(\xi^1, \xi^2+1)}}{a_{(\xi^1)}^2}, \quad B_2^3 = 0, \quad B_4^3 = -6 \frac{d_{2(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{a_{(\xi^1+1)}^2}, \quad B_3^3 = -(B_1^3 + B_4^3), \\
& B_5^3 = 0, \quad C_1^3 = 2 \frac{d_{1(\xi^1, \xi^2+1)}}{a_{(\xi^1)}}, \quad C_2^3 = 2 \frac{d_{2(\xi^1+1, \xi^2)}}{b_{(\xi^2)}}, \quad C_4^3 = 2 \frac{d_{1, \xi^1+1, \xi^2+1}}{a_{(\xi^1+1)}}, \\
& C_5^3 = 2 \frac{d_{2(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{b_{(\xi^2+1)}}, \quad C_3^3 = 2(C_1^3 + C_2^3 + C_4^3 + C_5^3), \\
& F_0^1 = P_{(\xi^1+1, \xi^1+1)}^1 + \tilde{N}_{2(\xi^1+1, \xi^2)} + 6 \frac{(\tilde{C}_2 + \tilde{C}_2^0)_{(\xi^1+1, \xi^2)}}{b_{(\xi^2)}^2} - 6 \frac{(\tilde{C}_2 + \tilde{C}_2^0)_{(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{b_{(\xi^2+1)}^2} - \\
& \quad - \frac{\tilde{Z}_{21(\xi^1+1, \xi^2)}}{b_{(\xi^2)}} + \frac{\tilde{Z}_{2(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{b_{(\xi^2+1)}}, \\
& F_0^2 = P_{(\xi^1+1, \xi^2+1)}^2 + \tilde{N}_{1(\xi^1, \xi^2+1)} - 6 \frac{(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_1^0)_{(\xi^1, \xi^2+1)}}{a_{(\xi^1)}^2} + 6 \frac{(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_1^0)_{(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{a_{(\xi^1+1)}^2} + \\
& \quad + \frac{\tilde{Z}_{1(\xi^1, \xi^1+1)}}{a_{(\xi^1)}} - \frac{\tilde{Z}_{1(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{a_{(\xi^1+1)}}, \\
& F_0^3 = \mathcal{L}_{(\xi^1+1, \xi^2+1)} + 2 \frac{(\tilde{C}_2 + 2\tilde{C}_2^0)_{(\xi^1+1, \xi^2)}}{b_{(\xi^2)}} + 2 \frac{(2\tilde{C}_2 + \tilde{C}_2^0)_{(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{b_{(\xi^2+1)}} + \\
& \quad + 2 \frac{(\tilde{C}_1 + 2\tilde{C}_1^0)_{(\xi^1, \xi^2+1)}}{a_{(\xi^1)}} + 2 \frac{(2\tilde{C}_1 + \tilde{C}_1^0)_{(\xi^1+1, \xi^2+1)}}{a_{(\xi^1+1)}}.
\end{aligned}$$

a) Przykład szczególnie tarczy poddanej przyspieszeniu a_n (rys. 9a). Znana jest masa prętów μ oraz ich przekroje A_A . Na dowolny element prętów wzdłużnych i poprzecznych działają siły odpowiednio $\tilde{q}_1 d\tilde{\xi}_1$ i $\tilde{q}_2 d\tilde{\xi}_2$ następujące:

$$(5.10) \quad \tilde{q}_1 d\tilde{\xi}_1 = \mu a_n A_1 d\tilde{\xi}_1, \quad \tilde{q}_2 d\tilde{\xi}_2 = \mu a_n A_2 d\tilde{\xi}_2.$$



Rys. 9.

Wyrazy dodatkowe są w tym przypadku następujące:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{F}}_1 &= \mu a_h A_1 a, & \tilde{\mathcal{F}}_2 &= 0, & \tilde{\mathcal{N}}_2 &= \mu a_h A_2 b, & \tilde{\mathcal{N}}_1 &= 0, \\
 \tilde{\mathcal{Z}}_2 &= \mu a_h A_2 \frac{b^2}{2}, & \tilde{\mathcal{Z}}_1 &= 0, & \tilde{\mathcal{C}}_{01} &= \frac{1}{2} \mu a_h A_1 a, & \tilde{\mathcal{C}}_{02} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_2 = -\tilde{\mathcal{C}}_2 = -\frac{1}{24} \mu a_h A_2 b^3, \quad \tilde{\mathcal{C}}_1 = \tilde{\mathcal{C}}_1 = 0.$$

Przykład liczbowy. Tarczę z rys. 9a rozwiązano dla następujących danych: $a_{(\xi^1)} = b_{(\xi^2)} = b$, $A_1 = A_2 = A$, $d_1 = d_2 = d$, $d_{01} = d_{02} = d_0$ oraz $b^2 d_0/d = 400$. Warunki brzegowe przyjęto następujące: $V_{(0,-1)} = V_{(3,1)} = V_{(0,1)} = V_{(3,-1)} = 0$. Przykład dla tej tarczy rozwiązano dwukrotnie: ściśle wg opisanego sposobu

oraz w sposób przybliżony, sprowadzając jej masę do węzłów. Na rys. 9a przedstawiono wyniki dla sił normalnych, a na rys. 9b dla sił poprzecznych i momentów gnących. Również w tym przypadku widać istotne różnice w rozwiązaniach. Średni błąd rozwiązania przybliżonego wynosi około 35%.

6. UWAGI KOŃCOWE

W przypadku obciążeń skupionych błędy rozwiązań przybliżonych są również znaczące i tym większe, im większa jest nierównomierność obciążenia. Dla typowych obciążeń prętów obliczanie wyrazów dodatkowych daje się zautomatyzować, co ułatwia obliczenia na komputerach.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. FRĄCKIEWICZ, *Mechanika ośrodków siatkowych*, PWN, Warszawa 1970.
2. W. GUTKOWSKI, *Regularne konstrukcje prętowe*, PWN, Warszawa 1972.
3. J. ŚLIŻEWICZ, *Plaskie osiowo-symetryczne zadanie teorii sprężystości w ośrodku dyskretnym*, Rozpr. Inż., 17, 4, 1969.
4. J. LEWIŃSKI, *Płyta siatkowa dowolnie obciążona*, Rozpr. Inż., 26, 2, 1978.
5. J. LEWIŃSKI, *Stateczność rusztów siatkowych*, Rozpr. dokt. Warszawa 1972.

Резюме

ПРОИЗВОЛЬНО НАГРУЖЕННЫЙ СЕТОЧНЫЙ ДИСК

В работе рассматривается проблема сеточных дисков произвольно нагруженных вдоль длины своих стержней. Представлен способ расчета дополнительных членов происходящих из произвольной нагрузки стержней сеточных дисков. Эти члены, введенные в известные из работы [1] уравнения, описывающие задачу статики сеточных дисков, определяют влияние нагрузки, действующей на стержни, на значение и характер хода внутренних сил. Работа иллюстрирована частными примерами, обосновывающими необходимость применения предлагаемого метода решения.

SUMMARY

ARBITRARILY LOADED LATTICE PLATE

Plane state of stress in lattice plates arbitrarily loaded along individual rods is considered. The method of evaluation of additional terms is presented, resulting from the arbitrary loading of rods of the lattice plates. The terms are then introduced into the equations (known from [1]) governing the statics of lattice plates; they determine the influence of loads acting on the rods on the value and character of the internal forces distribution. The paper is illustrated by several examples demonstrating the necessity of using the method of solution proposed in the paper.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lipca 1977 r.