

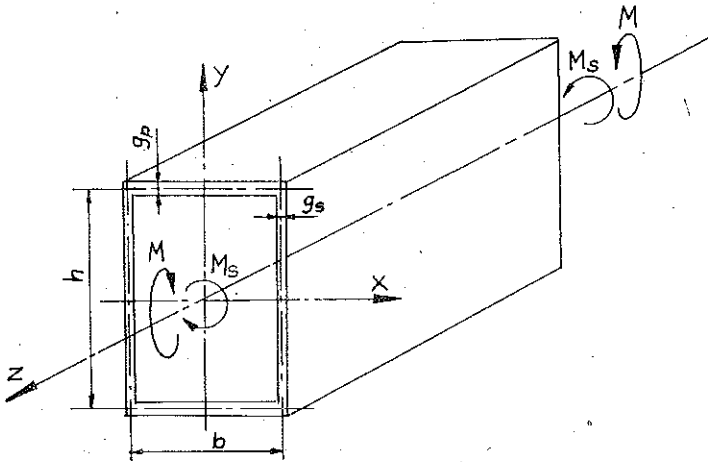
OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE PRZEKROJU SKRZYNKOWEGO PRĘTA RÓWNOCZEŚNIE ZGINANEGO I SKRĘCANEGO*)

TERESA GIB C Z Y Ń S K A (KRAKÓW)

Przeprowadzono optymalizację ze względu na ciężar pręta o przekroju skrzynekowym obciążonego momentem zginającym M i skręcającym M_s . W rozważaniach przyjęto przekrój z dwiema osiami symetrii, niezmienny wzdłuż długości pręta i charakteryzujący się czterema parametrami (h , b , g_s i g_p). Jako ograniczenia przyjęto warunki wytrzymałości i stateczności lokalnej środka i pasa ściskanego. Funkcję celu, tj. pole powierzchni przekroju, przedstawiono za pomocą trzech wielkości bezwymiarowej β , γ , δ i jednej mianowanej $-h$. Zagadnienie rozwiązano stosując metodę linearyzacji warunków ograniczających, następnie metodę Lagrange'a oraz twierdzenie Kuhna-Tuckera. Wzory określające optymalne wymiary przekroju przedstawiono jako funkcje parametrów γ , δ i y (γ , δ), które wyznaczono numerycznie i zestawiono w tablicach 1 i 2.

1. WSTĘP

Pręty o profilu zamkniętym, w stosunku do prętów o profilu otwartym, odznaczają się dużą sztywnością skręcania i w związku z tym są elementami najczęściej



Rys. 1

stosowanymi w konstrukcjach nośnych maszyn roboczych ciężkich. Spośród różnych kształtów przekrojów zamkniętych najczęściej stosowany jest przekrój skrzynekowy. O tym że przekrój ten dominuje we wszelkiego rodzaju konstrukcjach (belki główne

*) Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego 0.5.12 pt. «Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych» — koordynowanego przez IPPT PAN.

i czołowe suwnic pomostowych, elementy osprzętów roboczych koparek) zadecydowała nie tylko stosunkowo duża sztywność zginania i skręcania, lecz również technologia jego wykonania. W związku z tym, że przekrój skrzynkowy jest bardzo rozpowszechniony, konieczne jest opracowanie wzorów pozwalających na szybkie wyznaczenie optymalnych ze względu na ciężar parametrów przekroju, które spełniałyby równocześnie wymagania wytrzymałości i stateczności lokalnej.

Wzory określające optymalne wymiary przekroju skrzynkowego w przypadku czystego zginania zostały wyprowadzone w pracach [2 i 4], natomiast dla swobodnego skręcania — w pracy [4]. Rozpatrzmy w tej pracy pręt obciążony równocześnie momentem skręcającym M_s i zginającym M , działającym w płaszczyźnie y, z (rys. 1).

Czyste zginanie i czyste skręcanie występujące niezależnie stanowiąc będą przypadki graniczne w rozpatrywanym kojarzeniu obciążeń.

2. SFORMUŁOWANIE FUNKCJI CELU I WARUNKÓW POBOCZNYCH

Wymiary realizujące najmniejszy przekrój wyznaczone zostaną przy uwzględnieniu warunków wytrzymałości i stateczności lokalnej pasa górnego i środka. Wymiary te określić można dwiema drogami, mianowicie numerycznie stosując metody programowania nieliniowego lub analitycznie, podając wzory, bezpośrednio określające optymalne parametry przekroju.

W pracy naszej wybrano metodę analityczną, jednakże ze względu na skomplikowaną formę otrzymanych równań w końcowej fazie obliczeń zastosowano metody numeryczne. Wzory w postaci bezpośredniej o ile takie można uzyskać, są znacznie wygodniejsze w użyciu, gdyż pozwalają na bezpośrednią analizę wpływu poszczególnych wielkości na wartość przekroju.

Model matematyczny optymalizacji ma postać

$$F(h, b, g_s, g_p) \rightarrow \min$$

przy ograniczeniach następujących

$$(2.1) \quad \left(\frac{\sigma_p}{R}\right)^2 + \left(\frac{\tau_p}{R_t}\right)^2 \leq 1,$$

$$(2.2) \quad \frac{\sigma_p j}{\sigma_{kp}} + \left(\frac{\tau_p j}{\tau_{kp}}\right)^2 \leq 1,$$

$$(2.3) \quad \left(\frac{\sigma_s j}{\sigma_{ks}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_s j}{\tau_{ks}}\right)^2 \leq 1,$$

$$(2.4) \quad \left(\frac{\sigma_s}{R}\right)^2 + \left(\frac{\tau_s}{R_t}\right)^2 \leq 1.$$

Nierówności (2.1) i (2.2) przedstawiają odpowiednio warunki wytrzymałości i stateczności pasa górnego, a nierówności (2.3) i (2.4) warunki stateczności i wytrzymałości środka [1, 3 i 6]. Pierwsze trzy warunki są warunkami ograniczającymi, uwzględnianymi w przypadku czystego zginania [2] ($M_s=0$).

W nierównościach (2.1)-(2.4) oznaczono przez σ_p i σ_s maksymalne naprężenie normalne, występujące odpowiednio w pasie i środniku przez τ_p i τ_s naprężenia styczne, występujące odpowiednio w pasie i środniku, R dopuszczalne naprężenia zginające, R_t dopuszczalne naprężenia ścinające, j współczynnik pewności ze względu na wyboczenie ścianek, σ_{kp} i σ_{ks} krytyczną wartość naprężeń normalnych dla pasa ściskanego i dla zginanego środnika, τ_{kp} i τ_{ks} krytyczną wartość naprężeń stycznych dla pasa i dla środnika, przez h , b , g_p , g_s wymiary przekroju wskazane na rys. 1.

Maksymalne naprężenia normalne dla pasa i środnika wyznaczmy odpowiednio ze wzorów:

$$(2.5) \quad \sigma_p = \frac{M(h+g_p)}{2J_x}, \quad \sigma_s = \frac{M(h-g_p)}{2J_x}.$$

Do dalszych obliczeń, biorąc pod uwagę niewielką różnicę między σ_p i σ_s , przyjmiemy przybliżoną wartość naprężeń normalnych za jednakową, a dla pasa i środnika jako równą

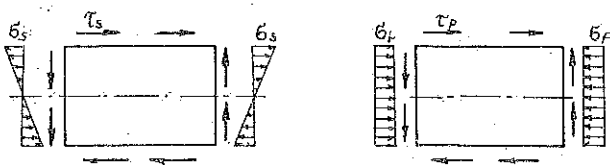
$$(2.6) \quad \sigma = \frac{Mh}{2J_x}.$$

Naprężenia tnące, pochodzące od momentu skręcającego M_s , wyznaczmy wg wzorów Bredta odpowiednio dla pasa i środnika [5]:

$$(2.7) \quad \tau_p = \frac{M_s}{2hb g_p},$$

$$(2.8) \quad \tau_s = \frac{M_s}{2hb g_s}.$$

Przy wyznaczaniu naprężeń normalnych i stycznych pominięto naprężenia powstające na skutek deplanacji przekroju, tzn. naprężenia normalne pochodzące od bimomentu giętno-skrętnego oraz naprężenia styczne od momentu giętno-skrętnego, czyli założono skręcanie swobodne.



Rys. 2

Pasy oraz środniki potraktowano jako płyty swobodnie podparte na czterech brzegach, obciążone w sposób następujący: pas górny — siłami ściskającymi wzdłuż dwóch krawędzi oraz siłami stycznymi, środnik — momentem zginającym oraz siłami stycznymi. Obciążenia pasa i środnika przedstawiono na rys. 2. Naprężenia

krytyczne w przypadku działania tylko jednego z obciążeń wyznaczmy ze wzoru [6]:

dla pasa górnego

$$(2.9) \quad \sigma_{k_p} = k_p D \left(\frac{g_p}{b} \right)^2,$$

$$(2.10) \quad \tau_{k_p} = k_t D \left(\frac{g_p}{b} \right)^2;$$

dla środka

$$(2.11) \quad \sigma_{k_s} = k_s D \left(\frac{g_s}{h} \right)^2,$$

$$(2.12) \quad \tau_{k_s} = k_t D \left(\frac{g_s}{h} \right)^2,$$

gdzie

$$D = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)};$$

k_p , k_s , k_t oznaczają współczynniki liczbowe zależne od ilorazu długości płyt do ich szerokości. Dla ułatwienia dalszych działań pole przekroju F oraz moment bezwładności J_x wyrazimy za pomocą bezwymiarowych wielkości określonych następująco:

$$(2.13) \quad \beta = \frac{g_p}{h}, \quad \gamma = \frac{b}{h}, \quad \delta = \frac{g_s h}{g_p b},$$

$$(2.14) \quad F = 2h^2 (\delta + 1) \beta \gamma,$$

$$(2.15) \quad J_x = \frac{h^4}{6} (\delta + 3) \beta \gamma.$$

Ponadto wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$A_1 = \frac{k_p D}{j}, \quad A_2 = \frac{k_t D}{j}, \quad B_1 = \frac{k_s D}{j}.$$

Uwzględniając wzory (2.6)-(2.12) oraz (2.13) i (2.15) ograniczenia przedstawimy w postaci

$$(2.16) \quad \frac{9M^2}{R^2 (\delta + 3)^2 \beta^2 \gamma^2 h^6} \left[1 + \frac{M_s^2 R^2 (\delta + 3)^2}{36M^2 R_1^2} \right] = x_1^2,$$

$$(2.17) \quad \frac{3M}{A_1 (\delta + 3) \beta^3 h^3} + \frac{M_s^2 \gamma^2}{4A_2^2 \beta^6 h^6} = x_2^2,$$

$$(2.18) \quad \frac{9M^2}{B_1^2 (\delta + 3)^2 \beta^6 \gamma^6 h^6 \delta^4} \left[1 + \frac{M_s^2 B_1^2 (\delta + 3)^2}{36M^2 A_2^2 \delta^2 \gamma^2} \right] = x_3^2,$$

$$(2.19) \quad \frac{9M^2}{R^2 (\delta + 3)^2 \beta^2 \gamma^2 h^6} \left[1 + \frac{M_s^2 R^2 (\delta + 3)^2}{36M^2 R_1^2 \gamma^2 \delta^2} \right] = x_4^2.$$

Wielkości x_i ($i=1, 2, 3, 4$) spełniają nierówności $x_i \leq 1$, i reprezentują odpowiednie warunki wytrzymałości pasa x_1 , stateczności lokalnej pasa ściskanego x_2 , stateczności lokalnej środnika x_3 oraz wytrzymałości środnika x_4 .

Zauważmy, że ograniczenia są silnie nieliniowe. Najkorzystniejszym więc postępowaniem ze względu na dalszą analizę byłoby wyznaczenie wszystkich parametrów określających przekrój jako funkcję nowych zmiennych x_i , spełniających ograniczenia liniowe [4]. Jednakże w związku z tym, że h , β , γ i δ występują w wysokich potęgach, analityczne rozwiązanie powyższego układu równań nie jest możliwe. Musimy więc zadowolić się tylko częściową linearyzacją warunków pobocznych [4].

Zanim przystąpimy do rozwiązania zagadnienia zwróćmy uwagę na ograniczenia (2.16) i (2.19). zauważmy, że równania te będą identyczne, gdy $\gamma\delta=1$, tzn. gdy $h=b$ i $g_s=g_p$. Przekrój, dla którego $\gamma\delta=1$, jest przekrojem optymalnym w przypadku czystego skręcania [4] ($\gamma=1$ i $\delta=1$). Natomiast w przypadku czystego zginania [2] $\gamma\delta < 1$, gdyż $\delta=1$. Wobec tego należy przypuszczać, że dla obciążeń złożonych z momentu zginającego i skręcającego iloczyn $\gamma\delta$ będzie mniejszy lub równy jedności i będzie zależny od ilorazu M_s/M . A więc warunek (2.16) można zastąpić nierównością $1 - \gamma\delta \geq 0$.

Z równań (2.18) i (2.19) wyznaczmy h i β jako funkcje parametrów x_3 , x_4 , γ i δ :

$$(2.20) \quad h = \left(\frac{3M}{R x_3 \beta \gamma} \right)^{1/3} \left\{ 1 + \left[\frac{m_s r (\delta + 3)}{6\gamma\delta} \right]^2 \right\}^{1/6} \frac{1}{(\delta + 3)^{1/3}},$$

$$(2.21) \quad \beta = \left(\frac{R x_4}{B_1 x_3} \right)^{1/2} (\gamma\delta)^{-1} \frac{\left(1 + \left[\frac{m_s a_2 (\delta + 3)}{6\gamma\delta} \right]^2 \right)^{1/4}}{\left(1 + \left[\frac{m_s r (\delta + 3)}{6\gamma\delta} \right]^2 \right)},$$

gdzie

$$m_s = \frac{M_s}{M}, \quad r = \frac{R}{R_t}, \quad a_2 = \frac{B_1}{A_2}.$$

Wstawiając wyrażenia (2.20) i (2.21) do wzorów (2.14) otrzymamy pole przekroju:

$$(2.22) \quad F = C \frac{(\delta + 1)}{x_3^{1/6} x_4^{1/2} \delta^{1/3} (\delta + 3)^{2/3}} \left[1 + \left(\frac{r m_s}{6} \right)^2 \left(\frac{3\delta + 1}{\delta} \right)^2 \varepsilon^2 \right]^{1/4} \times \\ \times \left[1 + \left(\frac{a_2 m_s}{6} \right)^2 \left(\frac{3\delta + 1}{\delta} \right)^2 \varepsilon^2 \right]^{1/12},$$

przy czym

$$(2.23) \quad C = \frac{2 \cdot 3^{2/3} M^{2/3}}{B_1^{1/6} R^{1/2}}, \quad \varepsilon = \frac{\delta + 3}{(3\delta + 1) \gamma}.$$

Natomiast niewykorzystane warunki ograniczające (2.16) i (2.18) można przedstawić za pomocą następujących nierówności:

$$(2.24) \quad 1 - \frac{(\delta+3)\delta}{(3\delta+1)\varepsilon} \geq 0.$$

$$(2.25) \quad \left[\frac{m_s a_2 \varepsilon (3\delta+1)}{6\delta} \right]^4 \frac{(\varepsilon^{10} - x_3^2 \delta \delta_1^5)^2}{\varepsilon^{10}} + \left[\frac{m_s a_2 \varepsilon (3\delta+1)}{6\delta} \right]^2 (2\varepsilon^{10} - 2\delta \delta_1^5 x_3^2 - a_1^2 \varepsilon^2 \delta_1^4 x_3^2) - (a_1^2 x_3^2 2\varepsilon^2 \delta_1^4 - \varepsilon^{10}) \geq 0,$$

przy czym

$$a_1 = \frac{B_1}{A_1}, \quad \delta_1 = \frac{\delta(\delta+3)^2}{(3\delta+1)^2},$$

Oznaczając lewe strony nierówności (2.24) i (2.25) odpowiednio przez $g_1(\delta, \varepsilon)$ i $g_2(x_3, \delta, \varepsilon)$, ograniczenia przedstawimy w postaci

$$(2.26) \quad g_1(\delta, \varepsilon) \geq 0, \quad g_2(x_3, \delta, \varepsilon) \geq 0.$$

3. WARUNKI OPTYMALNOŚCI

Po przekształceniach wykonanych w poprzednim rozdziale — funkcję celu oraz ograniczenia można przedstawić w postaci:

$$(3.1) \quad F = F(x_3, x_4, \delta, \varepsilon), \quad g_i(x_i) = 1 - x_i \geq 0, \quad i=3, 4,$$

$$(3.2) \quad g_1(\delta, \varepsilon) \geq 0,$$

$$(3.3) \quad g_2(x_3, \delta, \varepsilon) \geq 0.$$

A zatem mamy dwa ograniczenia liniowe i dwa ograniczenia nieliniowe.

Z budowy funkcji (2.22) wynika, że funkcja ta osiągnie kres dolny dla $x_4 = x_3 = 1$. Ponieważ parameter x_4 poza ograniczeniem (2.26) nie wchodzi w skład innych ograniczeń, możemy uważać, że dla $x_4 = 1$ funkcja ta istotnie osiągnie kres dolny. Natomiast nie można stwierdzić, że dla $x_3 = 1$ przekrój osiągnie minimum, gdyż wielkość ta występuje w ograniczeniu (3.3).

W przypadku optymalizacji funkcji (2.22) bez uwzględnienia ograniczeń, a jedynie przy założeniu $\varepsilon \geq 0$, kres dolny ze względu na ten parametr otrzymalibyśmy dla $\varepsilon = 0$. Takie rozwiązanie odpowiada nieskończenie dużej wartości b/h , stąd wniosek, że co najmniej jedno z ograniczeń jest ograniczeniem aktywnym.

Zwróćmy uwagę na ograniczenia (3.2). Ograniczenie to w przypadku czystego zginania, tzn. dla $m_s = 0$, jest spełnione w postaci mocnej nierówności, a zatem nie jest aktywne. Natomiast, jest aktywne $g_1(\delta, \varepsilon) = 0$ dla $m_s = \infty$, tzn. dla czystego skręcania.

Wobec tego należy się spodziewać, że istnieje taka graniczna wartość \bar{m}_s , która dzieli cały zakres m_s na dwa przedziały. W pierwszym, tzn. dla $m_s < \bar{m}_s$, $g_1(\delta, \varepsilon) > 0$, natomiast w drugim, tzn. dla $m_s \geq \bar{m}_s$, $g_1(\delta, \varepsilon) = 0$.

Jeśli chodzi o ograniczenie uwzględniające stateczność środka, można przypuszczać, że jest ograniczeniem aktywnym w całym zakresie m_s , gdyż zarówno dla $m_s=0$, jak i dla $m_s=\infty$, $x_3=1$. Niemniej jednak należy sprawdzić, czy tak jest istotnie. Dlatego x_3 w dalszych rozważaniach traktować będziemy jako wielkość poszukiwaną.

Zagadnienie rozwiążemy stosując funkcję Lagrange'a i twierdzenie Kuhna-Tuckera [8], przy czym założymy, że istnieją dwa przedziały zmienności m_s . W pierwszym $m_s \in [0, \bar{m}_s)$, w drugim $m_s \in [\bar{m}_s, \infty)$. Taki podział znacznie ułatwi rozwiązanie, ponieważ w pierwszym zakresie zostanie wyeliminowane jedno z ograniczeń, a w drugim jedna niewiadoma.

Funkcja Lagrange'a dla przedziału pierwszego ma następującą postać:

$$L_1 = -F(x_3, \delta, \varepsilon) + \lambda_{11} g_2(x_3, \delta, \varepsilon) + \lambda_{12} g_3(x_3).$$

Natomiast warunki konieczne optymalności [8] przy założeniu $x_3 \geq 0$, $\delta \geq 0$ i $\varepsilon \geq 0$ są następujące:

$$(3.4) \quad \frac{\partial L_1}{\partial \delta} = -\frac{\partial F(x_3, \delta, \varepsilon)}{\partial \delta} + \lambda_{11} \frac{\partial g_2(x_3, \delta, \varepsilon)}{\partial \delta} \leq 0,$$

$$(3.5) \quad \frac{\partial L_1}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial F(x_3, \delta, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \lambda_{11} \frac{\partial g_2(x_3, \delta, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \leq 0,$$

$$(3.6) \quad \frac{\partial L_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial F(x_3, \delta, \varepsilon)}{\partial x_3} + \lambda_{11} \frac{\partial g_2(x_3, \delta, \varepsilon)}{\partial x_3} + \lambda_{12} \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3} \leq 0,$$

$$(3.7) \quad \lambda_{11} g_2(x_3, \delta, \varepsilon) = 0, \quad g_2(x_3, \delta, \varepsilon) \geq 0,$$

$$(3.8) \quad \lambda_{12} g_3(x_3) = 0; \quad g_3(x_3) \geq 0,$$

przy czym

$$(3.9) \quad \lambda_{11} \geq 0 \text{ i } \lambda_{12} \geq 0.$$

W drugim przedziale z równości $g_1(\delta, \varepsilon) = 0$ otrzymuje się związek $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ i wobec tego, funkcję Lagrange'a oraz warunki optymalności można przedstawić w postaci

$$(3.10) \quad L_2 = -F(x_3, \delta) + \lambda_{21} g_2(x_3, \delta) + \lambda_{22} g_3(x_3),$$

$$(3.11) \quad \frac{\partial L_2}{\partial \delta} = -\frac{\partial F(x_3, \delta)}{\partial \delta} + \lambda_{21} \frac{\partial g_2(x_3, \delta)}{\partial \delta} \leq 0,$$

$$(3.12) \quad \frac{\partial L_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial F(x_3, \delta)}{\partial x_3} + \lambda_{21} \frac{\partial g_2(x_3, \delta)}{\partial x_3} + \lambda_{22} \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3} \leq 0,$$

$$(3.13) \quad \lambda_{21} g_2(x_3, \delta) = 0, \quad g_2(x_3, \delta) \geq 0,$$

$$(3.14) \quad \lambda_{22} g_3(x_3) = 0, \quad g_3(x_3) \geq 0,$$

przy czym tak jak w poprzednim przypadku

$$(3.15) \quad \lambda_{21} \geq 0, \quad \lambda_{22} \geq 0.$$

Przedstawione warunki optymalności wymagają rozważenia czterech przypadków rozwiązania, które zależą od następujących związków określających współczynniki λ_{ij} , $j=1, 2$, $i=1, 2$:

- a) $\lambda_{j1}=0$ oraz $\lambda_{j2}=0$, b) $\lambda_{j1}=0$ oraz $\lambda_{j2}\neq 0$,
 c) $\lambda_{j1}\neq 0$ oraz $\lambda_{j2}\neq 0$, d) $\lambda_{j1}\neq 0$ oraz $\lambda_{j2}=0$.

Ponadto dla każdego z rozwiązań konieczne jest sprawdzenie wartości funkcji celu, a następnie wybranie rozwiązania optymalnego, gdyż podane warunki są jedynie warunkami koniecznymi.

Wyznamy więc pochodne cząstkowe funkcji celu i ograniczeń dla obu zakresów. Pochodne te przedstawiają się następująco: dla $m_s < \bar{m}_s$

$$(3.16) \quad \frac{\partial F}{\partial \delta} = C \left\{ \left[6(\delta-1) - 4(\delta+1) \frac{\delta+3}{3\delta+1} \right] r^2 a_2^2 y^4 + \right. \\ \left. + \left[6(\delta-1)(r^2+a_2^2) - (3r^2+a_2^2)(\delta+1) \frac{\delta+3}{3\delta+1} \right] y^2 + 6(\delta-1) \right\} (x_3^{1/6} M)^{-1},$$

$$(3.17) \quad \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = C(\delta+1)(\delta+3)\delta [3r^2+a_2^2+4r^2 a_2^2 y^2] y^2 (\varepsilon x_3^{1/6} M)^{-1},$$

$$(3.18) \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} = -C [1+r^2 y^2]^{1/4} [1+a_2^2 y^2]^{1/12} (6x_3^{7/6})^{-1},$$

$$(3.19) \quad \frac{\partial g_2}{\partial \delta} = -2 \{ a_2^4 y^4 [2(\varepsilon^{10} - \delta \delta_1 x_3^2) (3\delta+1)^{-1} \delta^{-1} + \\ + \delta_1^4 x_3^2 (\delta_1 + 5\delta \delta_2) (\varepsilon^{10} - \delta \delta_1^5 x_3^2) \varepsilon^{-10}] + \\ + a_2^2 y^2 [(2\varepsilon^{10} - 2\delta \delta_1^5 x_3^2 - a_1^2 \varepsilon^2 \delta_1^4 x_3^2) (3\delta+1)^{-1} \delta^{-1} + \\ + \delta_1^3 x_3^2 (5\delta \delta_1 \delta_2 + \delta_1^2 + 2a_1^2 \varepsilon^2 \delta_2)] + 4a_1^2 \varepsilon^2 \delta_1^3 \delta_2 x_3^2 \},$$

$$(3.20) \quad \frac{\partial g_2}{\partial \varepsilon} = \frac{2}{\varepsilon} \{ a_2^4 y^4 [10(\varepsilon^{10} - \delta \delta_1^5 x_3^2) - 3(\varepsilon^{10} - \delta \delta_1^5 x_3^2) \varepsilon^{-10}] + \\ + y^2 a_2^2 [12\varepsilon^{10} - 2\delta \delta_1^5 x_3^2 - 2a_1^2 \varepsilon^2 \delta_1^4 x_3^2] - (a_1^2 \delta_1^4 x_3^2 - 5\varepsilon^8) \varepsilon^2 \}$$

$$(3.21) \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_3} = 4a_2^2 y^2 \delta_1^{10} \delta^2 \varepsilon^{-10} x_3^2 - 2x_3^2 (1+a_2^2 y^2) (2a_2^2 y^2 \delta \delta_1 + a_1^2 \varepsilon^2) \delta_1^4,$$

gdzie

$$(3.22) \quad y = \frac{m_s \varepsilon}{6\delta} (3\delta+1),$$

$$(3.23) \quad \delta_2 = \frac{3(\delta+3)(\delta-2)^2}{(3\delta+1)^3},$$

$$M = 6\delta^{4/3} (\delta+3)^{5/3} (1+ry^2)^{3/4} - (1+a_2^2 y^2)^{11/12},$$

gdzie M jest mianownikiem pochodnych cząstkowych funkcji F względem δ oraz ε . Wyrażenie to powinno spełniać warunek $M \neq 0$. W rozpatrywanym przypadku

warunek ten będzie zawsze spełniony, gdyż poszukujemy jedynie dodatnich wartości δ i ε :

$$(3.24) \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} = \frac{C}{x_3^{1/6}} \{6(\delta-1)[1+r^2 y^2][1+a_2^2 y^2] + (\delta+1)\delta y^2 [3r^2(1+r^2 y^2) + a_2^2(1+a_2^2 y^2)]\} M^{-1},$$

$$(3.25) \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} = -C \frac{\delta+1}{6x_3^{7/6}(\delta+3)^{2/3} \delta^{1/3}} (1+r^2 y^2)^{1/4} (1+a_2^2 y^2)^{1/12},$$

$$(3.26) \quad \frac{\partial g_2}{\partial \delta} = \frac{a_2^4 y^4}{5} \left[4(\delta^4 - x_3^2) + 8 \left(\frac{\delta^4 - x_3^2}{4} \right) x_3^2 \right] + a_2^2 y^2 \left[\frac{2\delta^4 - 2x_3^2 - a_1^2 x_3^2}{\delta+3} + 8\delta^3 \right] + 4\delta^3,$$

$$(3.27) \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_3} = -2x_3 [2a_2^4 y^4 (\delta^4 - 2x_3^2) + a_2^2 y^2 (2+a_1^2) + 2a_1^2],$$

$$(3.28) \quad \frac{\partial g_3}{\partial x_3} = -1.$$

Po wstawieniu pochodnych cząstkowych odpowiednio do warunków (3.4)–(3.6) oraz (3.10)–(3.12) — przeanalizujemy w obu przedziałach m_s , wymienione warianty rozwiązań.

Jeżeli $\lambda_{j1} = \lambda_{j2} = 0$, $j=1, 2$, to minimum globalne leży wewnątrz ograniczeń. Przypadek ten był rozpatrywany na początku niniejszego rozdziału, gdzie stwierdzono, że co najmniej jedno z ograniczeń jest ograniczeniem aktywnym.

Przyjmując $\lambda_{j1} = 0$ zakładamy, że *infimum* leży wewnątrz ograniczenia g_2 . Wówczas w przedziale pierwszym otrzymamy $\varepsilon = 0$, a w przedziale drugim $\delta < 1$. Ponieważ w zakresie drugim powinna być spełniona równość $\gamma\delta = 1$, przeto $\gamma = b/h > 1$. A zatem założenie $\lambda_{j1} = 0$ w obu przedziałach nie prowadzi do poszukiwanego rozwiązania.

W przypadku c) zakłada się «aktywność» obu ograniczeń, natomiast w przypadku d) przyjmuje się, że ograniczenie ze względu na stateczność środka jest ograniczeniem «biernym», tzn. $x_3 < 1$.

W obu przypadkach, na podstawie ogólnej analizy, nie można określić poszukiwanych parametrów. Dlatego w dalszych rozważaniach przypadki te zostaną poddane szczegółowej analizie numerycznej tak w przedziale pierwszym ($m_s < \bar{m}_s$), jak i w przedziale drugim ($m_s \geq \bar{m}_s$). O tym, który z nich stanowić będzie rozwiązanie, zdecyduje wartość funkcji celu.

4. NUMERYCZNE WYZNACZENIE δ I ε

Biorąc pod uwagę wyniki obliczeń dla czystego skręcania i czystego zginania można przypuszczać, że przypadek c) stanowi rozwiązanie optymalne.

W związku z tym jako pierwszy rozpatrzmy ten przypadek, a następnie sprawdzimy, czy istotnie otrzymane wyniki określają optymalne parametry przekroju.

W przedziale $m_s < \bar{m}_s$ należy rozwiązać następujący układ równań:

$$(4.1) \quad -\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \frac{\partial g_2}{\partial \delta} + \frac{\partial F}{\partial \delta} \frac{\partial g_2}{\partial \varepsilon} = 0,$$

$$(4.2) \quad -\frac{\partial F}{\partial x_3} \frac{\partial g_2}{\partial \delta} + \frac{\partial F}{\partial \delta} \frac{\partial g_2}{\partial x_3} + \lambda_{12} \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \frac{\partial g_2}{\partial \delta} = 0,$$

$$(4.3) \quad g_2(\delta, \varepsilon, x_3) = 0,$$

$$(4.4) \quad g_3(x_3) = 0,$$

przy czym

$$\lambda_{11} = \frac{\partial F}{\partial \delta} / \frac{\partial g_2}{\partial \delta},$$

oraz sprawdzić, czy są spełnione nierówności (3.9).

Z równania (4.4) mamy $x_3 = 1$ i wobec tego równania (4.1) i (4.3) stanowią układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi δ i ε oraz parametrem m_s . Równanie (4.2) służy jedynie do wyznaczenia λ_{12} .

Zauważmy, że równanie (4.3) po uwzględnieniu wzoru (2.25) jest równaniem dwukwadratowym ze względu na m_s , wobec tego zamiast poszukiwać δ i ε , poszukiwać będziemy m_s i δ przy założonej wartości ε . Takie postępowanie znacznie ułatwi procedurę numeryczną, gdyż wyznaczając w sposób ścisły $m_s = m_s(\delta)$, sprowadzimy układ dwóch równań do jednego równania, które rozwiążemy metodą połowienia przedziału. Przy czym sprawdzimy, czy λ_{11} i λ_{12} spełniają nierówności (3.9). W obliczeniach numerycznych przyjęto $a_1 = 24,0/4,0$, $a_2 = 24,0/5,35$, a zatem, nie uwzględniono przepon, ponadto założono $r = 1/0,6$.

Otrzymane wyniki, tj. wartości γ , δ i ε przedstawiono graficznie na rys. 3 i w tabelicy 1. Na podstawie przedstawionych wartości zarówno na rysunku 3 jak i w tabelicy 1 można zauważyć, że γ w tym przedziale m_s zmienia się w bardzo niewielkich granicach. Początkowo maleje, a następnie rośnie, aby osiągnąć na końcu przedziału wartość nieznacznie większą od wartości wyznaczonej dla czystego zginania ($m_s = 0$). Natomiast δ stale wzrasta. Biorąc pod uwagę zmianę wartości γ i δ , można stwierdzić, iż iloraz g_s/g_p również stale rośnie i na końcu przedziału osiąga wartość równą jedności.

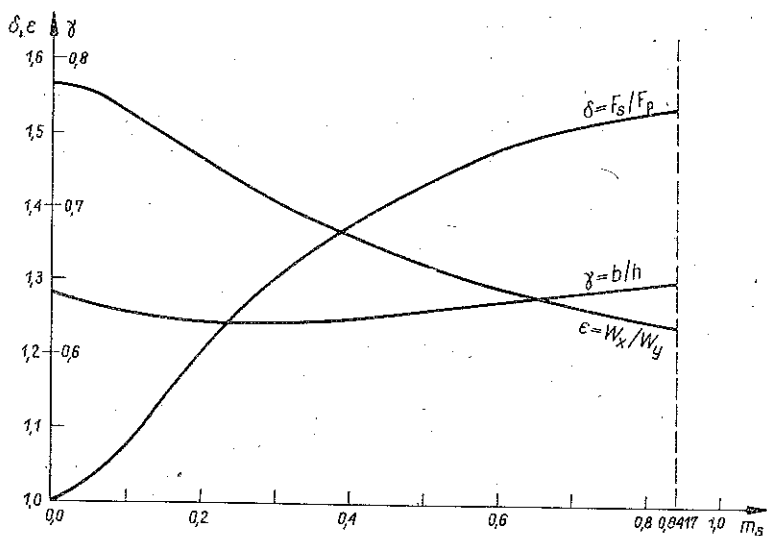
W przedziale drugim, tj. dla $m_s \geq \bar{m}_s$, należy rozwiązać następujący układ równań:

$$(4.5) \quad -\frac{\partial F}{\partial x_3} \frac{\partial g_2}{\partial \delta} + \frac{\partial F}{\partial \delta} \frac{\partial g_2}{\partial x_3} + \lambda_{22} \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \frac{\partial g_2}{\partial \delta} = 0,$$

$$(4.6) \quad g_2(\delta, x_3) = 0,$$

$$(4.7) \quad g_3(x_3) = 0$$

oraz sprawdzić czy spełnione są nierówności (3.15).



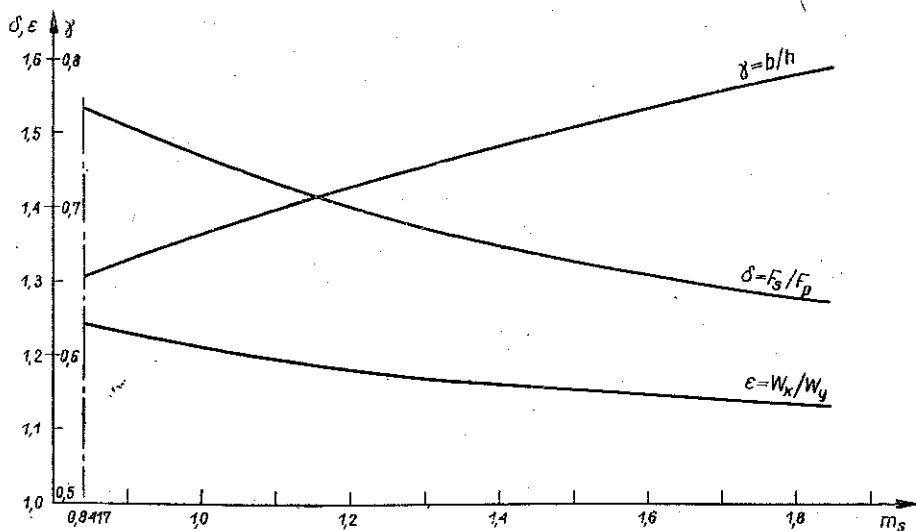
Rys. 3

Tablica 1

m_s	δ	ϵ	γ	$\gamma(\gamma, \delta)$
0,0000	1,0000	1,5651	0,6389	0,0000
0,0649	1,0384	1,5490	0,6335	0,0664
0,0960	1,0745	1,5328	0,6294	0,0964
0,1230	1,1086	1,5167	0,6262	0,1213
0,1486	1,1410	1,5006	0,6239	0,1440
0,1739	1,1720	1,4845	0,6223	0,1658
0,1996	1,2017	1,4683	0,6214	0,1872
0,2260	1,2305	1,4522	0,6209	0,2086
0,2536	1,2585	1,4361	0,6209	0,2303
0,2827	1,2858	1,4200	0,6214	0,2527
0,3136	1,3124	1,4038	0,6222	0,2760
0,3466	1,3385	1,3877	0,6233	0,3004
0,3822	1,3641	1,3716	0,6266	0,3536
0,4631	1,4135	1,3393	0,6288	0,3832
0,5095	1,4371	1,3232	0,6313	0,4153
0,5609	1,4598	1,3071	0,6343	0,4503
0,6184	1,4814	1,2909	0,6376	0,4890
0,6832	1,4016	1,2748	0,6415	0,5322
0,7569	1,5200	1,2587	0,6458	0,5808
0,8417	1,5365	1,2426	0,6508	0,6364

Widzimy, że układ równań (4.5)–(4.7) rozwiązuje się znacznie łatwiej niż poprzedni, gdyż w celu wyznaczenia δ przy $x_3=1$ (wynika to równości (4.7)) należy rozwiązać tylko równanie (4.6); równanie (4.5) służy jedynie do wyznaczenia λ_2 . Rozwiązanie, tj. funkcje $\delta=\delta(m_s)$, $\gamma=\gamma(m_s)$ i $\epsilon=\epsilon(m_s)$ przedstawiono graficznie na rysunku 4 i tablicy 2.

Jak wynika z przedstawionych wykresów, wielkość γ stale wzrasta i dla $m_s \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow 1$. Natomiast pozostałe wielkości, tj. δ i ε stale maleją, przy czym dla $m_s \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 1$ jak również i $\varepsilon \rightarrow 1$. Czyli w przypadku czystego skręcania przekrój staje się skrzyżką kwadratową $b=h$, o bokach równej grubości — $g_s = \gamma_p$.



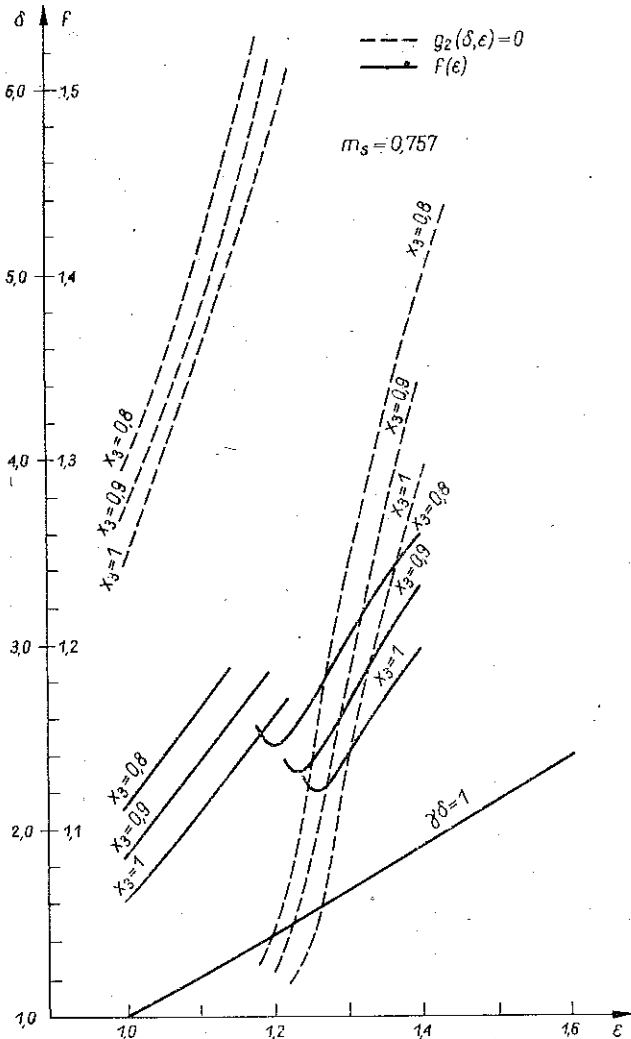
Rys. 4

Tablica 2

m_s	δ	ε	γ	$\gamma(\gamma, \delta)$
0,8417	1,5365	1,2426	0,6508	0,6364
0,9580	1,4828	1,2200	0,6744	0,7157
1,1008	1,4292	1,1972	0,6997	0,8126
1,2816	1,3755	1,1740	0,7270	0,9346
1,5189	1,3219	1,1505	0,7565	1,0940
1,8461	1,2682	1,1266	0,7885	1,3132
2,3301	1,2145	1,1023	0,8233	1,6367
3,1267	1,1609	1,0775	0,8614	2,1684
4,7036	1,1073	1,0523	0,9031	3,2198
9,3980	1,0526	1,0265	0,9491	6,3494
∞	1,0000	1,0000	1,0000	∞

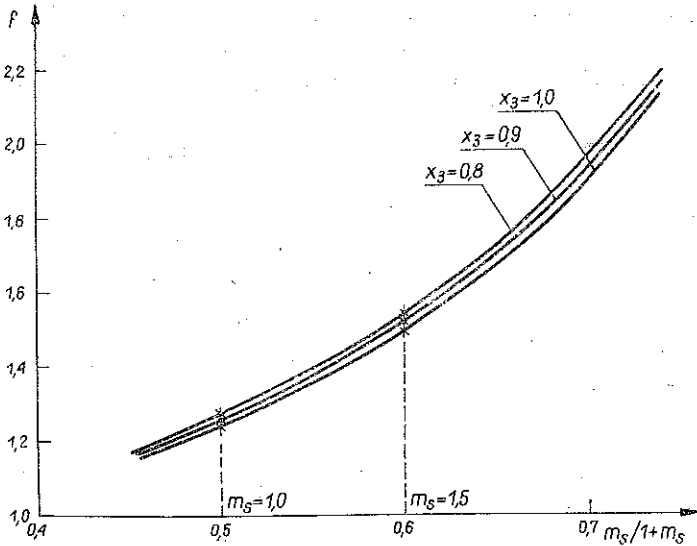
W poprzednich rozważaniach założyliśmy, że istnieje graniczna wartość \bar{m}_s dzieląca cały przedział m_s na dwa przedziały. A zatem dla $m_s = \bar{m}_s$ powinny być spełnione równocześnie warunki optymalności sformułowane dla zakresu pierwszego i dla zakresu drugiego. Rozwiązując więc układy równań (4.1)–(4.3) przy założeniu $g_1(\delta, \varepsilon) = 0$ wyznaczono numerycznie wartość graniczną $\bar{m}_s = 0,84173$ oraz odpowiadające jej wartości $\delta = 1,53647$ i $\varepsilon = 1,24258$.

W przypadku d) założono, że ograniczenie ze względu na stateczność środnika jest ograniczeniem biernym, tj. $x_3 < 1$. Przy takim założeniu oraz przy $g_2(\delta, x_3) = 0$ w obu przedziałach obliczono wartości $f = F/C$ (por. wzór (2.20)) charakteryzujące



Rys. 5

przekrój i porównano je z wartościami otrzymanymi dla $x_3 = 1$. Jak wynika z przeprowadzonej analizy numerycznej, najmniejsze wartości funkcji f otrzymano dla $x_3 = 1$. Funkcję tę, tzn. $f = f(\delta, \epsilon)$ dla trzech wartości x_3 i dla wybranej wartości m_s w przedziale $m_s < \bar{m}_s$ przedstawiono na rysunku 5 linią ciągłą, natomiast dla przedziału $m_s \geq \bar{m}_s$ na rys. 6. Ponadto na rys. 5 linią przerywaną przedstawiono ograniczenie $g_2(\delta, \epsilon)$. Z wykresów jasno wynika, że w obu przedziałach m_s funkcja f osiąga minimum dla $x_3 = 1$. Poza tym uwidoczniają one nieciągłość ograniczenia $g_2(\delta, \epsilon)$, która nie pozostaje bez wpływu na wartość funkcji f .



Rys. 6

5. WZORY OKREŚLAJĄCE OPTYMALNE WYMIARY PRZEKROJU

Końcowe wzory określające optymalne wymiary przekroju można przedstawić w postaci (przy $k_s=24$, $k_v=4$, $k_t=5,35$):

$$(5.1) \quad h = \frac{(3\pi M)^{1/3}}{R^{1/2}} \left[\frac{2E}{(1-\nu^2)j} \right]^{1/6} \left(\frac{\delta}{3+\delta} \right)^{1/3} \frac{[1+y^2 r^2]^{1/4}}{[1+y^2 a_2^2]^{1/12}},$$

$$(5.2) \quad g_s = \left[\frac{3(1-\nu^2)jM}{2\pi^2 E} \right]^{1/3} [1+y^2 a_2^2]^{1/6} \left(\frac{\delta}{3+\delta} \right)^{1/3},$$

$$(5.3) \quad b = \gamma h,$$

$$(5.4) \quad g_p = g_s \frac{1}{\gamma \delta},$$

gdzie

$$(5.5) \quad y = \frac{m_s(\delta+3)}{6\gamma\delta},$$

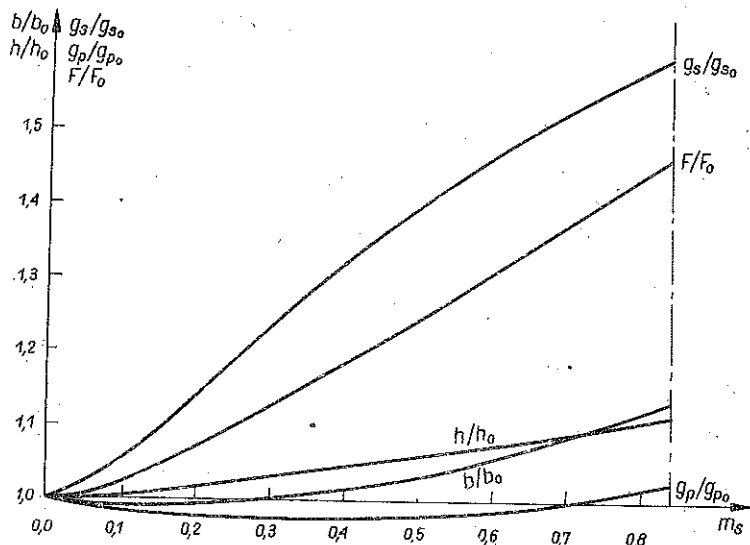
$$a_2 = \frac{B_1}{A_2} = \frac{24,0}{5,35}, \quad r = \frac{R}{R_t} = \frac{1}{0,6}.$$

Funkcje (5.1)-(5.5) zależą od wielkości γ i δ wyznaczonych numerycznie i zestawionych w tabelicy 1.

Warto zauważyć, że w przedziale drugim, tzn. przy $m_s \geq 0,84173$, $g_p = g_s$, gdyż $\gamma\delta = 1$. Przekrój będzie więc posiadał ścianki o równej grubości. Otrzymane wzory pozwalają nie tylko na wyznaczenie optymalnych wymiarów przekroju, ale również

na badanie wpływu momentu skręcającego na zmianę przekroju i poszczególnych wymiarów.

Na rys. 7 przedstawiono graficznie dla przedziału $m_s \leq 0,8417$ wymiary określone na podstawie wzorów (5.1)–(5.3) odniesione do wymiarów dla zginania prostego [2]



Rys. 7

oznaczonych indeksem «0». Jak widać, moment skręcający w większym stopniu wpływa na zmianę grubości średnika niż na pozostałe wymiary. Dla $m_s = 0,8417$ przekrój wzrośnie w przybliżeniu o 46,5% w stosunku do przekroju wyznaczonego dla czystego zginania.

6. ZAKOŃCZENIE

W naszych rozważaniach założono skręcanie swobodne, mimo że w praktyce inżynierskiej mamy bardzo często do czynienia ze skręcaniem skrepowanym. Wpływ skrepowania można pominąć w przypadkach, gdy profil zamknięty odznacza się dużą sztywnością skręcania, a więc wówczas, gdy tylko w niewielkim stopniu ulega deplanacji.

Deplanacja przekroju zamkniętego zależy od współczynnika μ określonego następującym wzorem [7]:

$$\mu = 1 - \frac{J_s}{J_k},$$

gdzie moment bezwładności przy swobodnym skręcaniu wynosi

$$J_s = \frac{2b^2 h^2 g_s g_p}{bg_s + hg_p},$$

a kierunkowy moment bezwładności przekroju

$$J_k = \frac{bh}{2} (bg_s + hg_p).$$

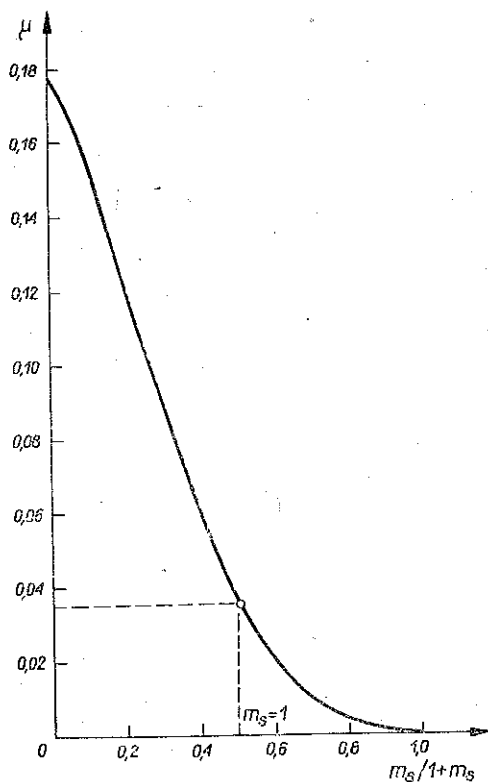
Z rozważań przeprowadzonych przez A. UMAŃSKIEGO [7] wynika, że jeżeli $J_s = J_k$, tzn. gdy $\mu = 0$, przekrój nie ulega deplanacji. A więc nie ulegają spaceniu przekroje o odpowiednio dobranych wymiarach. Np. w przypadku przekroju skrzynkowego, gdy spełniają równość

$$\frac{b}{h} = \frac{g_p}{g_s}.$$

W rozważanym przypadku po uwzględnieniu wzorów (2.13) współczynnik spaczenia można przedstawić w postaci

$$\mu = 1 - \frac{4\delta\gamma^2}{(\delta\gamma^2 + 1)}.$$

Funkcje $\mu = \mu(m)$, $m = m_s / (m_s + 1)$ przedstawiono graficznie na rys. 8.



Rys. 8

Współczynnik μ osiąga największą wartość dla $m_s = 0$, równą 0,1766. Wraz ze wzrostem m_s szybko maleje i tak dla $m_s = 1$ ($m = 0,5$) $\mu < 0,04$. Dla czystego skręcania, tzn. dla $m = 1$, $\mu = 0$, gdyż jak wspomniano wcześniej, optymalny przekrój jest

skrzynką kwadratową o równych grubościach ścianek. A zatem gdy dominuje moment skręcający, wskaźnik spaczenia na pomijalnie małe wartości; natomiast gdy dominuje moment zginający, wpływ naprężeń pochodzących od deplanacji przekroju na naprężenia całkowite można uznać również za pomijalnie mały. Wyprowadzone wzory będą więc dostatecznie dokładne dla skręcania skrępowanego.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. E. BLEICH, *Ustrojčivost metaličeskich konstrukcij*, Moskwa 1959.
2. T. GIBCYŃSKA, *Ogólna analiza optymalnego kształtowania belki zginanej o przekroju skrzynkowym*, Arch. Bud. Masz., 25, 2, 1978.
3. C. F. KOLLBRUNNER, M. MEISTER, *Ausbeulen — Theorie und Berechnung von Blechen*, Springer—Verlag, Berlin, (Göttingen) Heidelberg 1958.
4. W. KRZYŚ, M. ŻYCKOWSKI, *Pewna metoda tzw. parametrycznego kształtowania wytrzymałościowego*, Rozpr. Inż., 11, 4, 643–664 1963.
5. J. RUTECKI, *Cienkościemne konstrukcje nośne. Obliczenia wytrzymałościowe*, PWN, Warszawa 1966.
6. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
7. A. A. UMAŃSKI, *Stroitel'naja mekhanika samoleta*, Oborongiz Moskwa 1961.
8. W. J. ZANGWILL, *Programowanie nieliniowe*, NT, Warszawa 1974.

Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ЯЩИКОВОГО СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ ОДНОВРЕМЕННО ИЗГИБАЕМОГО И СКРУЧИВАЕМОГО

Проведена оптимизация, из-за веса, стержня с ящичковым сечением нагруженного изгибным M и скручивающим M_s моментами. В рассуждениях принято сечение с двумя осями симметрии, неизменяющейся вдоль длины стержня и характеризующееся четырьмя параметрами (h , b , g_s и g_p). Как ограничения приняты условия прочности и локальной устойчивости стенки и сжимаемой полосы. Функция цели, т.е. поле поверхности сечения, представлена при помощи трех безразмерных величин β , γ , δ и одной размерной h . Задача решена, применяя метод линеаризации ограничивающих условий, затем метод Лагранжа и теорему Куна—Такера. Формулы, определяющие оптимальные размеры сечения, представлены как функции параметров γ , δ , и $\gamma(\gamma, \delta)$, которые определены численно и составлены в таблицах 1 и 2.

SUMMARY

OPTIMUM DESIGN OF A BOX SECTION OF A BEAM SUBJECT TO SIMULTANEOUS BENDING AND TORSION

The beam of a box section loaded by a bending moment M and torque M_s is optimized with respect to its weight. The cross-section characterized by four parameters h , b , g_s , g_p is assumed to have two symmetry axes, and the beam is prismatic. The constraining conditions are represented by the strength and local stability conditions of the web and the compressed flange. The aim function, i.e. the cross-sectional area, is expressed in terms of three dimensionless quantities β , γ , δ and a dimensional value h .

The problem is solved by the method of linearization of the constraining conditions, and then by Lagrange method and the Kuhn-Tucker theorem. The formulae which determine the optimal dimensions of the cross-section are written in terms of the parameters γ , δ and $\nu(\gamma, \delta)$ which are determined numerically and presented in Tables 1 and 2.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 września 1978 r.
