

DYNAMIKA PRZESTRZENNYCH UKŁADÓW USZTYWIAJĄCYCH W BUDYNKACH WYSOKICH

PIOTR R A P P (POZNAŃ)

W pracy wyprowadzono równania opisujące sprzężone drgania pionowe i poziome przestrzennych układów usztywniających w budynkach wysokich o konstrukcji ścianej. Przyjęto model ciągły układu usztywniającego. Rozważane w pracy układy składają się ze ścianowych elementów usztywniających dowolnie rozmieszczonych w rzucie budynku i połączonych ze sobą za pomocą nadproży oraz tarcz stropowych. Zakłada się, że elementy usztywniające wykonane są z materiału lepko-sprężystego. W pracy podano przykład liczbowy.

OZNACZENIA

Oznaczenia dla układu usztywniającego

- p liczba elementów usztywniających ($i=1, \dots, p$),
 w liczba pasm nadproży ($j=1, \dots, w$),
 m liczba obciążeń pionowych n_{nk} ($k=1, \dots, m$),
 H wysokość układu usztywniającego,
 $OXYZ$ główny układ współrzędnych, którego płaszczyzna OXY , leży w poziomie posadowienia, a OZ jest osią pionową,
 V_x, V_y, Φ przemieszczenia poziome układu usztywniającego mierzone w układzie osi OXY ,
 Q_x, Q_y, Q_ϕ obciążenia poziome rozłożone wzdłuż osi OZ ,
 F_x, F_y, F_ϕ tłumienia poziome rozłożone wzdłuż osi OZ ,
 M_p masa obudowy układu usztywniającego na jednostkę wysokości,
 J_{op} moment bezwładności masy M_p względem jej pionowej osi ciężkości,
 x_p, y_p współrzędne osi ciężkości masy M_p w układzie OXY .

Oznaczenia dla i -tego elementu usztywniającego

- $O_{si} x_{si} y_{si} z_{si}$ układ współrzędnych, którego oś $O_{si} z_{si}$ jest osią ciężkości elementu, a $O_{si} x_{si}, O_{si} y_{si}$ są głównymi osiami bezwładności przekroju elementu,
 $O_i x_i y_i z_i$ układ współrzędnych, którego oś $O_i z_i$ jest osią ścinania elementu, a osie $O_i x_i, O_i y_i$ są równoległe do osi $O_{si} x_{si}, O_{si} y_{si}$,
 r_{xi}, r_{yi} współrzędne punktu O w układzie osi $O_i x_i y_i$,
 α_i kąt nachylenia osi $O_i x_i$ do osi OX ,
 v_{xi}, v_{yi}, ϕ_i przemieszczenia poziome w układzie osi $O_i x_i y_i$,
 u_{si} przemieszczenie pionowe wzdłuż osi $O_{si} z_{si}$,
 n_{nk} obciążenie pionowe rozłożone wzdłuż wysokości,
 F_{si} tłumienie pionowe rozłożone wzdłuż osi $O_{si} z_{si}$,
 M_{pi} masa obudowy przypadająca na jednostkę wysokości elementu,
 γ_i masa właściwa,
 N_{si} siła normalna w przekroju elementu,

- M_{xi}, M_{yi} momenty zginające w przekroju elementu,
 B_i bimoment w przekroju elementu,
 A_i pole przekroju elementu,
 J_{xi}, J_{yi} główne momenty bezwładności przekroju elementu,
 J_{oi} główny wycinkowy moment bezwładności przekroju elementu
 e_{xi}, e_{yi} współrzędne punktu O_{xi} w układzie osi $O_i x_i y_i$

$$r_i^2 = e_{xi}^2 + e_{yi}^2 + \frac{J_{xi} + J_{yi}}{A_i}$$

Oznaczenia dla j -tego pasma nadproży

- h_j pionowy rozstaw osi nadproży
 δ_j podatność nadproża

1. WSTĘP

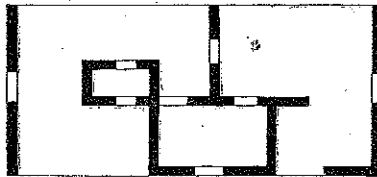
Najważniejsze wyniki dotyczące drgań sprężystych budynków o konstrukcji ścianowej przedstawione są w pracach [1–20]. Sprężenie drgań pionowych i poziomych w konstrukcjach przestrzennych uwzględniono w pracach [4, 14, 18]. W tej pracy, w odróżnieniu od prac cytowanych, uwzględniono tłumienie materiałowe drgań przyjmując, że układ usztywniający wykonany jest z materiału lepko-sprężystego.

2. OGÓLNE RÓWNANIA DRGAŃ

2.1. Budowa układów usztywniających

Rozważane w pracy układy usztywniające składają się ze ścianowych elementów usztywniających połączonych między sobą za pomocą pionowych pasm sprężystych nadproży oraz poziomych tarcz stropowych.

Elementy usztywniające posadowione są na tym samym poziomie, mają jednakową wysokość i stały przekrój poprzeczny. Są sztywno utwierdzone w fundamencie i swobodne w górnych przekrojach. Nadproża są belkami połączonymi z elementami usztywniającymi wzdłuż pionowych prostych. Zakładamy, że nadproża występujące w jednym paśmie mają jednakową sztywność na zginanie, są w identyczny sposób połączone z elementami usztywniającymi oraz są rozmieszczone w równych odstępach wzdłuż wysokości. Przykładowy rzut układu usztywniającego przedstawiony jest na rys. 1.



Rys. 1

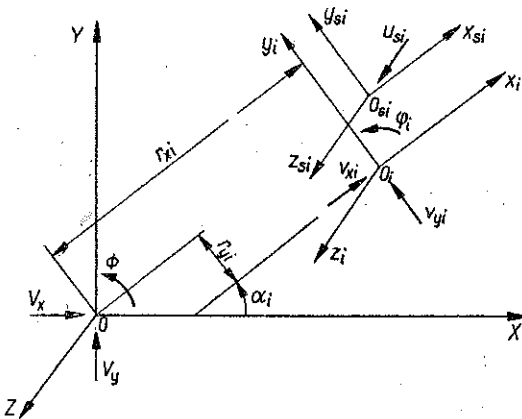
2.2. Założenia obliczeniowe

Przyjmujemy następujące założenia: a) elementy usztywniające są prętami cienkościennymi o profilu otwartym i spełniają założenia teorii W. Z. Własowa, b) rozkład masy jest stały wzdłuż wysokości, c) stropy traktowane są jako tarcze nieskończenie sztywne w swej płaszczyźnie i wiotkie w kierunku prostopadłym do płaszczyzny, d) oddziaływanie stropów i nadproży na elementy usztywniające można zastąpić siłami rozłożonymi w sposób ciągły wzdłuż wysokości, e) momenty zginające w każdym paśmie nadproży zerują się wzdłuż pionowej prostej, której położenie zależy od sztywności łączonych elementów usztywniających, f) pomijamy wpływ drgań nadproży na drgania układu usztywniającego, g) pomijamy wpływ czystego skręcania elementów usztywniających, h) dla i -tego elementu usztywniającego przyjmujemy zależność między naprężeniami normalnymi σ_i i odkształceniami podłużnymi ε_i w postaci

$$\sigma_i = \psi_i \left(\varepsilon_i, \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^s \varepsilon_i}{\partial t^s} \right),$$

gdzie ψ_i jest daną funkcją dla $i=1, \dots, p$.

Z założenia c. wynikają następujące równania zgodności przemieszczeń poziomych (rys. 2):



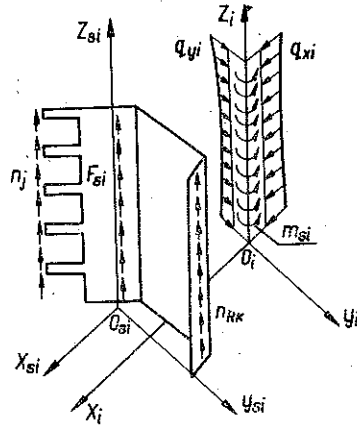
Rys. 2

$$(2.1) \quad \begin{aligned} v_{xi} &= V_x \cos \alpha_i + V_y \sin \alpha_i + r_{yi} \Phi, \\ v_{yi} &= -V_x \sin \alpha_i + V_y \cos \alpha_i - r_{xi} \Phi, \\ \varphi_i &= \Phi. \end{aligned}$$

2.3. Układ podstawowy

Układ podstawowy stanowi zespół elementów usztywniających zamocowanych w fundamencie, otrzymany po usunięciu tarcz stropowych i rozcięciu nadproży

wzdłuż linii zerowych momentów zginających. W związku z tym elementy usztywniające w układzie podstawowym obciążone są następującymi siłami (rys. 3):

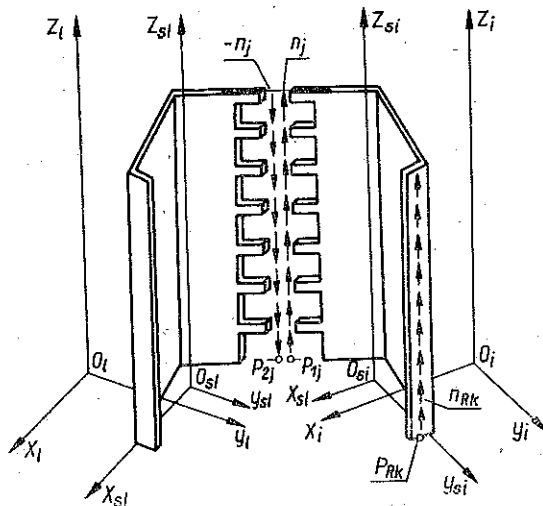


Rys. 3

- a) Obciążeniami rozłożonymi q_{xi} , q_{yi} , m_{si} zastępującymi oddziaływanie stropów,
 b) siłami stycznymi n_j rozłożonymi wzdłuż linii rozcięcia nadproży zastępującymi siły poprzeczne w nadprożach, c) danymi obciążeniami pionowymi n_{RK} , d) obciążeniami pionowymi F_{si} określającymi zewnętrzne tłumienie drgań.

2.4. Warunki zgodności przemieszczeń nadproży

Wprowadzamy dwa układy liczb s_{1ij} oraz s_{2ij} , które określamy następująco (rys. 4):



Rys. 4

$$s_{1ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy na } i\text{-ty element usztywniający w układzie} \\ & \text{podstawowym działa obciążenie } n_j, \\ 0 & \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases}$$

oraz

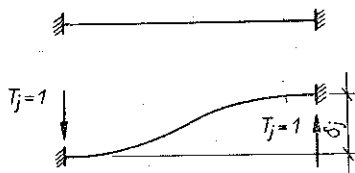
$$s_{2ij} = \begin{cases} -1, & \text{gdy na } i\text{-ty element usztywniający w układzie} \\ & \text{podstawowym działa obciążenie } -n_j, \\ 0 & \text{w przypadku przeciwnym.} \end{cases}$$

Jeśli $s_{1ij}=1$, to przez x_{1ij} , y_{1ij} oznaczamy współrzędne punktu P_{1j} (rys. 4) w układzie osi $O_{si} x_{si} y_{si}$, a przez ω_{1ij} oznaczamy współrzędną wycinkową tego punktu względem bieguna O_i . Gdy $s_{1ij}=0$, to przyjmujemy, że $x_{1ij}=y_{1ij}=0$, $\omega_{1ij}=0$. Jeśli $s_{2ij}=-1$, to przez x_{2ij} , y_{2ij} oznaczamy współrzędne punktu P_{2j} (rys. 4) w układzie osi $O_{si} x_{si} y_{si}$, a przez ω_{2ij} oznaczamy współrzędną wycinkową tego punktu względem bieguna O_i . Gdy $s_{2ij}=0$, to przyjmujemy, że $x_{2ij}=y_{2ij}=0$, $\omega_{2ij}=0$.

Niech pasmo nadproży j łączy się z elementami usztywniającymi i oraz l (rys. 4). Przez u_{ij} oraz u_{lj} oznaczamy pionowe przemieszczenia elementów usztywniających wzdłuż linii działania odpowiednio obciążeń n_j oraz $-n_j$. Warunek zgodności przemieszczeń nadproży w paśmie j przyjmuje postać

$$(2.2) \quad n_j = -\frac{1}{h_j \delta_j} (u_{ij} - u_{lj}),$$

gdzie δ_j oznacza podatność nadproży w paśmie j , a h_j oznacza pionowy rozstaw nadproży w paśmie j . Przez podatność δ_j rozumiemy takie przemieszczenie się końców nadproża, które wywołuje w nim siłę poprzeczną $T_j=1$ (rys. 5).



Rys. 5

Po wyrażeniu przemieszczeń u_{ij} oraz u_{lj} przez przemieszczenia elementów usztywniających i oraz l , wzór (2.2) można napisać w postaci

$$(2.3) \quad n_j = -\frac{1}{h_j \delta_j} \sum s_{ij} u_{si} + \frac{1}{h_j \delta_j} \left[\left(x_{1ij} \frac{\partial v_{xi}}{\partial z} + y_{1ij} \frac{\partial v_{yi}}{\partial z} + \omega_{1ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) - \left(x_{2ij} \frac{\partial v_{xl}}{\partial z} + y_{2ij} \frac{\partial v_{yl}}{\partial z} + \omega_{2ij} \frac{\partial \varphi_l}{\partial z} \right) \right],$$

gdzie

$$s_{ij} = s_{1ij} + s_{2ij}.$$

2.5. Równania drgań elementów usztywniających

Wprowadzamy liczby η_{ik} określone następująco:

$$\eta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{gdy obciążenie } n_{Rk} \text{ działa na element,} \\ & \text{usztywniający } i, \\ 0 & \text{w przypadku przeciwnym.} \end{cases}$$

Jeśli $\eta_{ik}=1$, to przez x_{Rik} , y_{Rik} oznaczamy współrzędne punktu P_{Rk} (rys. 4) w układzie osi $O_{si} x_{si} y_{si}$, a przez ω_{ik} oznaczamy współrzędną wycinkową tego punktu względem bieguna O_i . Jeśli $\eta_{ik}=0$, to przyjmujemy, że $x_{Rik}=y_{Rik}=0$, $\omega_{Rik}=0$. Ponadto oznaczamy

$$x_{ij}=x_{1ij}-x_{2ij}, \quad y_{ij}=y_{1ij}-y_{2ij}, \quad \omega_{ij}=\omega_{1ij}-\omega_{2ij}.$$

Po uwzględnieniu powyższych oznaczeń oraz obciążeń działających na elementy usztywniające w układzie podstawowym — otrzymamy następujące równania drgań i -tego elementu usztywniającego:

$$(2.4) \quad \frac{\partial N_{si}}{\partial z} - (\gamma_i A_i + M_{\rho i}) \frac{\partial^2 u_{si}}{\partial t^2} = - \sum_{j=1}^w s_{ij} n_j - \sum_{k=1}^m \eta_{ik} n_{Rk} + F_{si},$$

$$(2.5) \quad \frac{\partial^2 M_{yi}}{\partial z^2} + \gamma_i J_{yi} \frac{\partial^4 v_{xi}}{\partial z^2 \partial t^2} - \gamma_i A_i \frac{\partial^2 v_{xi}}{\partial t^2} + \gamma_i e_{yi} A_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = \\ = -q_{xi} - \sum_{j=1}^w x_{ij} \frac{\partial n_j}{\partial z} - \sum_{k=1}^m x_{Rik} \frac{\partial n_{Rk}}{\partial z},$$

$$(2.6) \quad \frac{\partial^2 M_{xi}}{\partial z^2} + \gamma_i J_{xi} \frac{\partial^4 v_{yi}}{\partial z^2 \partial t^2} - \gamma_i A_i \frac{\partial^2 v_{yi}}{\partial t^2} - \gamma_i e_{xi} A_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = \\ = -q_{yi} - \sum_{j=1}^w y_{ij} \frac{\partial n_j}{\partial z} - \sum_{k=1}^m y_{Rik} \frac{\partial n_{Rk}}{\partial z},$$

$$(2.7) \quad \frac{\partial^2 B_i}{\partial z^2} + \gamma_i J_{\omega i} \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial z^2 \partial t^2} + \gamma_i e_{yi} A_i \frac{\partial^2 v_{xi}}{\partial t^2} - \gamma_i e_{xi} A_i \frac{\partial^2 v_{yi}}{\partial t^2} - \\ - \gamma_i r_i^2 A_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = -m_{si} - \sum_{j=1}^w \omega_{ij} \frac{\partial n_j}{\partial z} - \sum_{k=1}^m \omega_{Rik} \frac{\partial n_{Rk}}{\partial z}$$

gdzie

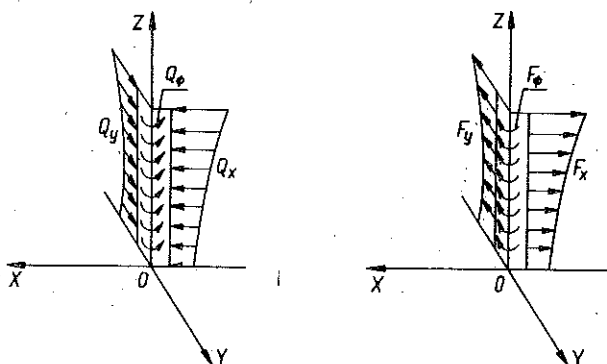
$$(2.8) \quad N_{si} = \int_{A_i} \sigma_i dA_i, \quad M_{xi} = \int_{A_i} \sigma_i y dA_i, \quad M_{yi} = \int_{A_i} \sigma_i x dA_i, \quad B_i = \int_{A_i} \sigma_i \omega dA_i,$$

$$(2.9) \quad \sigma_i = \psi_i \left(\varepsilon_i, \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^s \varepsilon_i}{\partial t^s} \right),$$

$$(2.10) \quad \varepsilon_i = \frac{\partial u_{si}}{\partial z} - x \frac{\partial^2 v_{xi}}{\partial z^2} - y \frac{\partial^2 v_{yi}}{\partial z^2} - \omega \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2}.$$

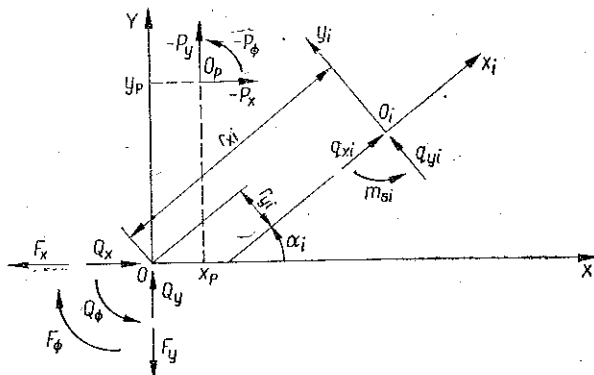
2.6. Równania równowagi dynamicznej układu usztywniającego

Obciążenie poziome układu usztywniającego oznaczamy przez Q_x , Q_y , Q_ϕ , a tłumienie poziome przez F_x , F_y , F_ϕ (rys. 6). Siły bezwładności masy obudowy



Rys. 6

układu usztywniającego na jednostkę wysokości układu oznaczamy przez P_x , P_y , P_ϕ . Na rys. 7 przedstawione są siły działające na układ usztywniający będący w ruchu zgodnie z zasadą d'Alemberta. Stąd równania równowagi dynamicznej mają postać



Rys. 7

$$(2.11) \quad \begin{aligned} Q_x &= \sum_{i=1}^p [q_{xi} \cos \alpha_i - q_{yi} \sin \alpha_i] - P_x + F_x, \\ Q_y &= \sum_{i=1}^p [q_{xi} \sin \alpha_i + q_{yi} \cos \alpha_i] - P_y + F_y, \\ Q_\phi &= \sum_{i=1}^p [q_{xi} r_{yi} - q_{yi} r_{xi} + m_{si}] + y_p P_x - x_p P_y - P_\phi + F_\phi. \end{aligned}$$

Siły bezwładności P_x , P_y , P_Φ są równe (rys. 7)

$$(2.12) \quad P_x = -M_p \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial t^2} - y_p \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right), \quad P_y = -M_p \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial t^2} + x_p \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right),$$

$$P_\Phi = -J_{op} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}.$$

2.7. Macierzowe sformułowanie związków między siłami w nadprożach i przemieszczeniami układu usztywniającego

Wprowadzamy następujące macierze i wektory:

$$S = [s_{ij}], \quad C = \begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ \omega_{ij} \end{bmatrix}, \quad K_w = \text{diag} \left[\frac{1}{h_j \delta_j} \right],$$

$$N_n = \text{col} [n_1, \dots, n_w], \quad U_s = \text{col} [u_{s1}, \dots, u_{sp}],$$

$$v = \text{col} [v_{x1}, \dots, v_{xp}, v_{y1}, \dots, v_{yp}, \varphi_1, \dots, \varphi_p].$$

Po ułożeniu równania (2.3) dla każdego pasma nadproży otrzymamy układ równań, który w zapisie macierzowym ma postać

$$(2.13) \quad N_n = -K_w S^T U_s + K_w C^T \frac{\partial v}{\partial z},$$

gdzie S^T i C^T oznaczają macierze transponowane macierzy S i C . Na podstawie warunków zgodności przemieszczeń (2.1) mamy

$$(2.14) \quad v = LV,$$

gdzie

$$L = \left. \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & r_{y1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \cos \alpha_p & \sin \alpha_p & r_{yp} \\ -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & -r_{x1} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\sin \alpha_p & \cos \alpha_p & -r_{xp} \\ 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} p \text{ wierszy}, \quad V = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ \Phi \end{bmatrix}.$$

Po uwzględnieniu wzoru (2.14) równanie (2.13) przedstawiamy w postaci

$$(2.15) \quad N_n = -K_w S^T U_s + K_w C^T L \frac{\partial V}{\partial z}.$$

2.8. Macierzowe równania drgań układu usztywniającego

Wprowadzamy następujące wektory i macierze:

$$N_s = \text{col} [N_{s1}, \dots, N_{sp}], \quad N_R = \text{col} [n_{R1}, \dots, n_{Rm}], \quad F_s = \text{col} [F_{s1}, \dots, F_{sp}]$$

$$S_R = [\eta_{ik}], \quad A_\gamma = \text{diag} [\gamma_i A_i], \quad M_p = \text{diag} [M_{pi}].$$

Po ułożeniu równania (2.4) dla $i=1, \dots, p$ otrzymamy układ równań, którego macierzowa postać jest następująca:

$$\frac{\partial N_s}{\partial z} - (A_\gamma + M_p) \frac{\partial^2 U_s}{\partial t^2} = -S N_n - S_R N_R + F_s.$$

Wstawiając do tego równania wektor N_n ze wzoru (2.15) otrzymamy

$$(2.16) \quad \frac{\partial N_s}{\partial z} - (A_\gamma + M_p) \frac{\partial^2 U_s}{\partial t^2} - S K_w S^T U_s + S K_w C^T L \frac{\partial V}{\partial z} - F_s = -S_R N_R.$$

Jest to równanie drgań pionowych układu usztywniającego.

W celu wyprowadzenia macierzowego równania drgań poziomych określamy następujące wektory i macierze:

$$F_p = \text{col} [F_x, F_y, F_\phi], \quad C_p = M_p \begin{bmatrix} -1 & 0 & y_p \\ 0 & -1 & -x_p \\ y_p & -x_p & -r_p^2 \end{bmatrix}, \quad C_R = \begin{bmatrix} x_{Rik} \\ y_{Rik} \\ \omega_{Rik} \end{bmatrix},$$

$$Q = \text{col} [Q_x, Q_y, Q_\phi],$$

gdzie

$$r_p^2 = x_p^2 + y_p^2 + \frac{J_{Op}}{M_p}$$

$$q = \text{col} [q_{x1}, \dots, q_{xp}, q_{y1}, \dots, q_{yp}, m_{s1}, \dots, m_{sp}],$$

$$M = \text{col} [M_{y1}, \dots, M_{yp}, M_{x1}, \dots, M_{xp}, B_1, \dots, B_p],$$

$$K_{zy} = \begin{bmatrix} \text{diag} [\gamma_i J_{yi}] & 0 & 0 \\ 0 & \text{diag} [\gamma_i J_{xi}] & 0 \\ 0 & 0 & \text{diag} [\gamma_i J_{\phi i}] \end{bmatrix},$$

$$K_{Ay} = \begin{bmatrix} \text{diag} [-\gamma_i A_i] & 0 & \text{diag} [\gamma_i e_{yi} A_i] \\ 0 & \text{diag} [-\gamma_i A_i] & \text{diag} [-\gamma_i e_{xi} A_i] \\ \text{diag} [\gamma_i e_{yi} A_i] & \text{diag} [-\gamma_i e_{xi} A_i] & \text{diag} [-\gamma_i r_i^2 A_i] \end{bmatrix}.$$

Przy tych oznaczeniach układ równań (2.11) po wykorzystaniu wzorów (2.12), można napisać w postaci

$$(2.17) \quad Q = L^T q - C_p \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + F_p,$$

a wektor q po wykorzystaniu równań (2.5)–(2.7) można przedstawić w postaci

$$(2.18) \quad q = -\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} - K_{zy} L \frac{\partial^4 V}{\partial z^2 \partial t^2} - K_{Ay} L \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - C \frac{\partial N_n}{\partial z} - C_R \frac{\partial N_R}{\partial z}.$$

Wstawiając wektor N_n ze wzoru (2.15) do wzoru (2.18), a następnie wektor q ze wzoru (2.18) do równania (2.17) otrzymamy

$$(2.19) \quad L^T \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} + L^T K_{zy} L \frac{\partial^4 V}{\partial z^2 \partial t^2} + (L^T K_{Ay} L + C_p) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \\ + L^T C K_w C^T L \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - L^T C K_w S^T \frac{\partial U_s}{\partial z} - F_v = -Q - L^T C_R \frac{\partial N_R}{\partial z}.$$

Jest to równanie drgań poziomych układu usztywniającego. Własności lepko-sprężyste materiału uwzględniamy wyrażając wektory N_s i M przez funkcje V i U_s . W tym celu ze wzorów (2.8)–(2.10) rugujemy naprężenia σ_i , odkształcenia ε_i oraz funkcje v_{xi} , v_{yt} , φ_i za pośrednictwem wzorów (2.1). Wektory N_s i M można wtedy ogólnie przedstawić następująco:

$$(2.20) \quad N_s = \mathcal{N}_s \left(\frac{\partial U_s}{\partial z}, \frac{\partial^2 U_s}{\partial z \partial t}, \dots, \frac{\partial^{s+1} U_s}{\partial z \partial t^s}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \frac{\partial^3 V}{\partial z^2 \partial t}, \dots, \frac{\partial^{s+2} V}{\partial z^2 \partial t^s} \right),$$

$$(2.21) \quad M = \mathcal{M} \left(\frac{\partial U_s}{\partial z}, \frac{\partial^2 U_s}{\partial z \partial t}, \dots, \frac{\partial^{s+1} U_s}{\partial z \partial t^s}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \frac{\partial^3 V}{\partial z^2 \partial t}, \dots, \frac{\partial^{s+2} V}{\partial z^2 \partial t^s} \right),$$

gdzie postać funkcji \mathcal{N}_s i \mathcal{M} zależy od postaci funkcji ψ_i dla $i=1, \dots, p$. Łącznie równania (2.16), (2.19), (2.20), (2.21) opisują sprzężone drgania pionowe i poziome układu usztywniającego z uwzględnieniem własności lepko-sprężystych materiału.

2.9. Warunki brzegowe i początkowe

Oznaczamy przez $T = \text{col} [T_x, T_y, M_s]$ wektor wypadkowych sił poprzecznych w przekroju poziomym układu usztywniającego, gdzie T_x , T_y są siłami działającymi wzdłuż osi OX , OY , a M_s jest momentem skręcającym. Wektor T można wyrazić wzorem

$$(2.22) \quad T = L^T \frac{\partial M}{\partial z} + L^T K_{zy} L \frac{\partial^3 V}{\partial z \partial t^2} + L^T C K_w C^T L \frac{\partial V}{\partial z} - L^T C K_w S^T U_s + L^T C_R N_R.$$

Z założenia, że układ usztywniający jest sztywno utwierdzony w fundamencie, wynikają warunki

$$(2.23) \quad V(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad U_s(0, t) = 0.$$

Z założenia, że górne przekroje układu są swobodne, mamy

$$(2.24) \quad N_s(H, t) = 0, \quad M(H, t) = 0, \quad T(H, t) = 0.$$

Zakładamy, że wektory tłumienia F_s i F_v zależą od funkcji V i U_s oraz ich pochodnych względem czasu. Niech n_U i n_V oznaczają najwyższe rzędy pochodnych względem czasu odpowiednio funkcji U_s i V występujących w równaniach (2.16), (2.19), (2.20)

(2.21). Wtedy muszą być dane dwa układy funkcji $f_0, f_1, \dots, f_{n_U-1}$ oraz $g_0, g_1, \dots, g_{n_V-1}$, dla których spełnione są warunki początkowe

$$(2.25) \quad \left. \frac{\partial^n U_s}{\partial t^n} \right|_{t=0} = f_n, \quad n=0, 1, 2, \dots, n_U-1,$$

$$(2.26) \quad \left. \frac{\partial^n V}{\partial t^n} \right|_{t=0} = g_n, \quad n=0, 1, 2, \dots, n_V-1.$$

3. RÓWNIANIA DRGAŃ UKŁADÓW USZTYWIAJĄCYCH Z MATERIAŁU OPISANEGO STANDARDOWYM MODELEM REOLOGICZNYM

3.1. Równania przemieszczeń

Zakładamy, że własności lepko-sprężyste materiału opisane są równaniem

$$(3.1) \quad \sigma_i + \tau \frac{\partial \sigma_i}{\partial t} = E' \varepsilon_i + \tau E \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t},$$

gdzie τ, E, E' oznaczają stałe materiałowe betonu. Wykorzystując wzory (2.8) i (2.10) oraz równanie (3.1) związki między wektorami N_s i U_s oraz wektorami M i V wyrażamy następująco:

$$(3.2) \quad N_s + \tau \frac{\partial N_s}{\partial t} = E' K_A \frac{\partial U_s}{\partial z} + \tau E K_A \frac{\partial^2 U_s}{\partial z \partial t},$$

$$(3.3) \quad M + \tau \frac{\partial M}{\partial t} = E' K_J L \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \tau E K_J L \frac{\partial^3 V}{\partial z^2 \partial t},$$

gdzie

$$K_A = \text{diag} [A_i], \quad K_J = \begin{bmatrix} \text{diag} [-J_{vi}] & 0 & 0 \\ 0 & \text{diag} [-J_{st}] & 0 \\ 0 & 0 & \text{diag} [-J_{ot}] \end{bmatrix}.$$

Z równań (3.2) i (3.3) otrzymamy

$$(3.4) \quad \frac{\partial N_s}{\partial z} + \tau \frac{\partial^2 N_s}{\partial z \partial t} = E' K_A \frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2} + \tau E K_A \frac{\partial^3 U_s}{\partial z^2 \partial t},$$

$$(3.5) \quad L^T \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} + \tau L^T \frac{\partial^3 M}{\partial z^2 \partial t} = E' L^T K_J L \frac{\partial^4 V}{\partial z^4} + \tau E L^T K_J L \frac{\partial^5 V}{\partial z^4 \partial t}.$$

Do równania (3.4) wstawiamy wektor $\partial N_s / \partial z$ z równania (2.16), a do równania (3.5) wstawiamy wektor $L^T \partial^2 M / \partial z^2$ z równania (2.19). Otrzymamy wtedy równania drgań układu usztywniającego:

$$(3.6) \quad E' K_A \frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2} + \tau E K_A \frac{\partial^3 U_s}{\partial z^2 \partial t} - \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[(A_\gamma + M_\rho) \frac{\partial^2 U_s}{\partial t^2} + \right. \\ \left. + SK_w S^T U_s - SK_w C^T L \frac{\partial V}{\partial z} + F_s \right] = - \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) S_R N_R,$$

$$(3.7) \quad E' L^T K_J L \frac{\partial^4 V}{\partial z^4} + \tau E L^T K_J L \frac{\partial^5 V}{\partial z^4 \partial t} + \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[L^T K_z L \frac{\partial^4 V}{\partial z^2 \partial t^2} + \right. \\ \left. + (L^T K_{A_\gamma} L + C_\rho) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + L^T C K_w C^T L \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \right. \\ \left. - L^T C K_w S^T \frac{\partial U_s}{\partial z} - F_v \right] = - \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[Q + L^T C_R \frac{\partial N_R}{\partial z} \right].$$

Warunki brzegowe i początkowe określone są wzorami (2.23)-(2.26).

3.2. Równania mieszane

W dotychczasowych rozważaniach drgania układu usztywniającego opisane były równaniami zawierającymi jako niewiadome funkcje przemieszczeń V i U_s . Można sformułować również równania drgań, w których niewiadomymi będą wektor sił w nadprożach N_n i wektor przemieszczeń poziomych V .

Zakładamy, że $\gamma_t = \gamma$ oraz przyjmujemy, że $M_{\rho i} = k_\rho A_i$. Stąd

$$(3.8) \quad K_A^{-1} (A_\gamma + M_\rho) = (\gamma + k_\rho) I.$$

Zakładamy ponadto, że $F_s = 0$, oraz że wektor F_v zależy wyłącznie od funkcji V i jej pochodnych względem czasu. Korzystamy z równań (3.6) i (3.7). Mnożąc równanie (3.6) lewostronnie przez macierz $K_w S^T K_A^{-1}$ i uwzględniając (3.8) otrzymamy

$$E' K_w S^T \frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2} + \tau E K_w S^T \frac{\partial^3 U_s}{\partial z^2 \partial t} - \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) (\gamma + k_\rho) K_w S^T \frac{\partial^2 U_s}{\partial t^2} - \\ - \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) K_w S^T K_A^{-1} S \left[K_w S^T U_s - K_w C^T L \frac{\partial V}{\partial z} \right] = - \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) K_w S^T K_A^{-1} S_R N_R.$$

Wstawiając do tego równania wektor $K_w S^T U_s$ ze wzoru (2.15) otrzymamy

$$(3.9) \quad K_w C^T L \left[E' \frac{\partial^3 V}{\partial z^3} + \tau E \frac{\partial^4 V}{\partial z^3 \partial t} - \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) (\gamma + k_\rho) \frac{\partial^3 V}{\partial z \partial t^2} \right] - \\ - E' \frac{\partial^2 N_n}{\partial z^2} - \tau E \frac{\partial^3 N_n}{\partial z^2 \partial t} + \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) (\gamma + k_\rho) \frac{\partial^2 N_n}{\partial t^2} + \\ + \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) K_w S^T K_A^{-1} S N_n = - \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) K_w S^T K_A^{-1} S_R N_R.$$

Z kolei, wstawiając do równania (3.7) wektor $K_w S^T \frac{\partial U_s}{\partial z}$ wyliczony ze wzoru (2.15), otrzymamy

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad E' L^T K_J L \frac{\partial^4 V}{\partial z^4} + \tau E L^T K_J L \frac{\partial^5 V}{\partial z^4 \partial t} + \\
 + \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[L^T K_{z\gamma} L \frac{\partial^4 V}{\partial z^2 \partial t^2} + (L^T K_{A\gamma} L + C_p) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + L^T C \frac{\partial N_n}{\partial z} - F_v \right] = \\
 = - \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[Q + L^T C_R \frac{\partial N_R}{\partial z} \right].
 \end{aligned}$$

Równania (3.9) i (3.10) określają drgania układu usztywniającego za pomocą funkcji N_n i V .

Warunki brzegowe w poziomie posadowienia określają wzory

$$V(0, t) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad N_n(0, t) = 0.$$

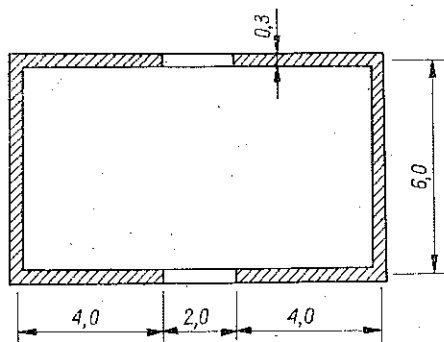
Warunek $N_n(0, t) = 0$ otrzymujemy ze wzoru (2.15) po uwzględnieniu drugiego i trzeciego warunku (2.23). Warunki dla $z = H$ określone są wzorami (2.24). Warunki początkowe dla funkcji V określone są wzorami (2.26). Funkcja N_n musi natomiast spełniać warunki

$$\frac{\partial^r N_n}{\partial t^r} \Big|_{t=0} = y_r, \quad r = 0, 1, 2,$$

gdzie funkcje y_r są dane.

4. PRZYKŁAD

Rozpatrzmy drgania swobodne układu usztywniającego złożonego z dwóch elementów ceowych połączonych dwoma pasmami nadproży utwierdzonych w elementach usztywniających. Rzut układu usztywniającego przedstawiony jest na rys. 8. Zakładamy, że elementy usztywniające wykonane są z tego samego materiału, którego własności lepko-sprężyste opisane są standardowym modelem reologicznym.



Rys. 8

Własności wytrzymałościowe, wymiary i rozstaw nadproży w obu pasmach są jednakowe.

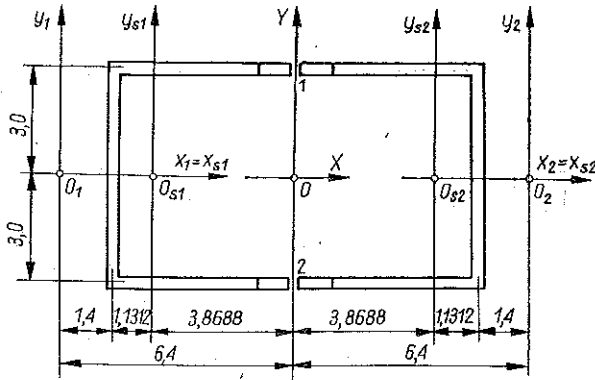
Korzystamy z równań (3.6) i (3.7). Dla ułatwienia rachunków pomijamy masę obudowy układu, tłumienia zewnętrzne i wpływ bezwładności obrotów i deplanacji przekrojów elementów usztywniających. Znaczący to, że w równaniach (3.6) i (3.7) pomijamy składniki M_p , C_p , F_s , F_v oraz $L^T K_{zy} L \partial^4 V / \partial z^2 \partial t^2$. W przypadku drgań swobodnych równania (3.6) i (3.7) przyjmują postać

$$(4.1) \quad E' K_A \frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2} + \tau E K_A \frac{\partial^3 U_s}{\partial z^2 \partial t} - \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[A_y \frac{\partial^2 U_s}{\partial t^2} + S K_w S^T U_s - S K_w C^T L \frac{\partial V}{\partial z} \right] = 0,$$

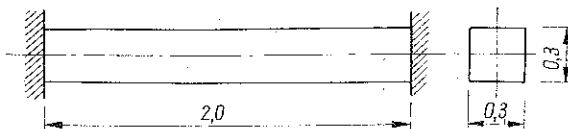
$$(4.2) \quad E' L^T K_J L \frac{\partial^4 V}{\partial z^4} + \tau E L^T K_J L \frac{\partial^5 V}{\partial z^4 \partial t} + \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[L^T K_{A_y} L \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + L^T C K_w C^T L \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - L^T C K_w S^T \frac{\partial U_s}{\partial z} \right] = 0.$$

Układy współrzędnych oraz wymiary układu usztywniającego przedstawione są na rys. 9, a wymiary nadproża przedstawione są na rys. 10. Wysokość układu przyjmujemy $H=60$ m, a pionowy rozstaw nadproży $h=3,0$ m. Stałe materiałowe przyjmujemy następujące: [21]

$$\tau = 5,136 \cdot 10^5 \text{ s}, \quad E = 2,929 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad E' = 1,117 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad \gamma = 2400 \text{ kg/m}^3.$$



Rys. 9



Rys. 10

Wyznamy częstotliwości drgań własnych metodą Galerkina, przyjmując w przybliżeniu, że postać drgań pionowych określona jest funkcją

$$u(z) = \sin \frac{\pi}{2H} z,$$

a postać drgań poziomych określona jest funkcją

$$w(z) = \sin kz - \operatorname{sh} kz - \frac{\sin kH + \operatorname{sh} kH}{\cos kH + \operatorname{ch} kH} (\cos kz - \operatorname{ch} kz),$$

gdzie $k=1,8751/H$. Niech C_1, C_2, D_1, D_2 i D_3 oznaczają dowolne stałe zespolone nie wszystkie równocześnie równe zero. Wektory U_s i V przyjmujemy w postaci zespolonej:

$$(4.3) \quad U_s = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} u(z) e^{\lambda t}, \quad V = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} w(z) e^{\lambda t}.$$

Przyjmując funkcje (4.3) i stosując do równań (4.1) i (4.2) metodę Galerkina otrzymujemy następujące częstotliwości drgań własnych układu usztywniającego:

a) drgania pionowe symetryczne

$$\omega_1 = 91,458 \text{ 1/s};$$

b) drgania pionowe antysymetryczne sprzężone z drganiami poziomymi w kierunku osi OX

$$\omega_2 = 4,2589 \text{ 1/s}, \quad \omega_3 = 108,33 \text{ 1/s},$$

c) drgania poziome w kierunku osi OY

$$\omega_4 = 8,6598 \text{ 1/s};$$

d) drgania skrętne wokół osi OZ

$$\omega_5 = 10,376 \text{ 1/s}.$$

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. G. VERTES, *Natural frequency of the horizontal vibrations of multi-storey buildings with bearing walls*, Acta Techn. Acad. Sci. Hung., **68**, 3-4, 363-382, 1970.
2. A. C. HEIDEBRECHT, R. K. RAINA, *Frequency analysis of thinwalled shear walls*, Journ. of the Engng. Mech. Div., ASCE, **2**, 239-252, Apr. 1971.
3. W. K. TSO, HO-BONG CHAN, *Dynamic analysis of plane coupled shear walls*, Journ. of the Engng. Mech. Div. ASCE, **1**, 33-48, Feb. 1971.
4. J. GLÜCK, M. GELLERT, A. DANAY, *Dynamic of asymmetric multistory structures*, Assoc. Intern. des Ponts et Charp., 32-I, 91-107, Zürich 1972.

5. M. PETYT, W. H. MIRZA, *Dynamic behaviour of in-line shear walls connected by floor slabs*, Journ. of Sound and Vibr., **25**, 3, 349-357, 1972.
6. P. R. MUKHERJEE, A. COULL, *Free vibrations of coupled shear walls*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, **1**, 377-386, 1973.
7. A. COULL, P. R. MUKHERJEE, *Approximate analysis of natural vibrations of coupled shear walls*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, **2**, 171-183, 1973.
8. R. ROSMAN, *Dynamics and stability of shear wall building structures*, Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, **55**, 411-423, 1973.
9. M. PETYT, W. H. MIRZA, *Vibration of asymmetrical coupled shear walls*, Journ. of Sound and Vib. **27**, 4, 573-581, 1973.
10. P. R. MUKHERJEE, A. COULL, *Free vibrations of coupled shear walls on flexible bases*, Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, **57**, 493-511, Sept. 1974.
11. P. R. MUKHERJEE, A. COULL, *Vibrations of coupled shear walls on framed supports*, Proc. Instn. Civ. Engrs, Part 2, **59**, 469-485, Sept. 1975.
12. A. COULL, *Free vibrations of regular symmetrical shear wall buildings*, Build, Sci., **10**, 127-133, 1975.
13. Л. Е. ЛИНОВИЧ, *Собственные колебания тонкостенных призматических систем*, Сопр. Мат. и Теория Соор., XXIII, 140-147, 1974.
14. A. DANAY, J. GLÜCK, M. GELLERT, *A generalized continuum method for dynamic analysis of asymmetric tall buildings*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, **4**, 179-203, 1975.
15. B. BRANDT, *Zum Schwingungsverhalten von Hochhausern*, Beton und Stahlbetonbau, **1**, 20-23, 1976.
16. B. J. GOODNO, J. M. GERE, *Analysis of shear cores using superelements*, Journ. of the Struc. Div., **1**, 267-283, Jan. 1976.
17. H. GLAHN, *Zur Berechnung der Eigenfrequenzen und -formen von Hochhäusern*, Die Bautechnik, **2**, 60-66, 1977.
18. B. FRANSON, *Unsymmetrical multi-storey buildings*, Chalmers University of Technology, Department of Structural Mechanics, 73: 4, Göteborg, Sweden 1973.
19. Б. П. ВОЛЬФСОН, *О распространении волн в моделях зданий с внутренним трением*, Стр. Мех. и Расч. Соор., **5**, 12-19, 1971.
20. Г. М. МИХАЙЛОВ, *Свободные колебания обетно-блочного здания с повышенными диссипативными свойствами*, Стр. Мех. и Расч. Соор., **5**, 50-52, 1974.
21. J. KASPERKIEWICZ, *Dyfuzja i deformacje skurczowe w betonie*, PWN, Warszawa 1972

Резюме

ДИНАМИКА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРИДАЮЩИХ ЖЕСТКОСТЬ СИСТЕМ
В ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЯХ

В работе выведены уравнения, описывающие сопряженные вертикальные и горизонтальные колебания пространственных придающих жесткость систем в высотных зданиях со стеновой конструкцией. Принята сплошная модель придающей жесткость системы. Рассматриваемые в работе системы состоят из стеновых придающих жесткость элементов, произвольно расположенных в проекции здания, и соединенных между собой при помощи перемычек и щитовых перекрытий.

Предполагается, что придающие жесткость элементы изготовлены из вязкоупругого материала. В работе приведен числовой пример.

SUMMARY

DYNAMICS OF SPATIAL STIFFENING STRUCTURES IN TALL BUILDINGS

The equations are derived which describe the coupled, horizontal and vertical vibrations of spatial stiffeners in tall buildings. A continuous model of the stiffening system is assumed. The systems dealt with in the paper consist of wall stiffeners, arbitrarily distributed over the horizontal projection of the building, interconnected by means of heads and floor plates.

The stiffeners are assumed to have visco-elastic properties. A numerical example is given.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 lipca 1978 r.
