

NOŚNOŚĆ ROZDZIELCZA STATYCZNIE NIETYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH UKŁADÓW PRĘTOWYCH Z MATERIAŁU ASYMPTOTYCZNIE IDEALNIE PLASTYCZNEGO

KRZYSZTOF SZUWAŁSKI (KRAKÓW)

Nie zawsze statycznie niewyznaczalny układ prętowy wykonany z materiału idealnie sprężysto-plastycznego ulega zniszczeniu wskutek zamiany w mechanizm. W przypadku niejednorodnego stanu odkształcenia w prętach może wystąpić zjawisko dekohezji wskutek ograniczonej wielkości możliwego wydłużenia prętów. Ten sam efekt może wystąpić również w przypadku pewnych materiałów asymptotycznie idealnie plastycznych. W pracy rozważono takie układy z uwzględnieniem ciężaru własnego prętów oraz zmiany przekroju w prętach zbieżnych. Niejednoznaczności pojawiające się w rozwiązaniu zbadano przy zastosowaniu uogólnionych szeregów potęgowych. Wyniki porównano z uzyskanymi na podstawie kryterium ograniczonych odkształceń. Sformułowano warunek dalszej pracy układu po pierwszej dekohezji i podano przykład.

1. WSTĘP

Przyjęcie schematu ciała idealnie sprężysto-plastycznego dopuszczającego na szczelbu punktu ciała nieograniczony wzrost odkształceń wiąże się na ogół z intuicyjnym dopuszczeniem dowolnie dużych przemieszczeń na szczelbu całego ciała. W większości przypadków jest to w pełni uzasadnione; i tak przykładowo wykres zależności między siłą a wydłużeniem dla rozciąganego pryzmatycznego i jednorodnego pręta — ma ten sam charakter co wykres $\sigma = \sigma(\epsilon)$ dla ciała idealnie sprężysto-plastycznego. Jednakże wprowadzenie jakiegokolwiek czynnika zaburzającego jednorodność stanu odkształcenia w takim pręcie, jak jego niepryzmatyczność lub uwzględnienie ciężaru własnego, zasadniczo zmienia przebieg procesu odkształcenia. Do uplastycznienia dochodzi wtedy tylko w pojedynczych przekrojach. Ponieważ rozszerzanie się stref uplastycznionych jest niemożliwe, nie dochodzi do redystrybucji naprężeń. Wydłużenie pręta jest ograniczone i ewentualny wzrost obciążenia może spowodować tylko zerwanie pręta w przekroju, w którym odkształcenia lokalnie zmierzały do nieskończoności, czyli w przekroju uplastycznym. Taki pręt współpracujący z innymi w pewnym układzie może spowodować, że nie osiągnie ten układ swojej nośności granicznej związanej z odpowiednim schematem zniszczenia plastycznego. Wcześniej może dojść do zerwania pręta, czyli zjawiska dekohezji. Nieuwzględnienie tego zjawiska może prowadzić do niejednoznaczności przy określaniu nośności układu.

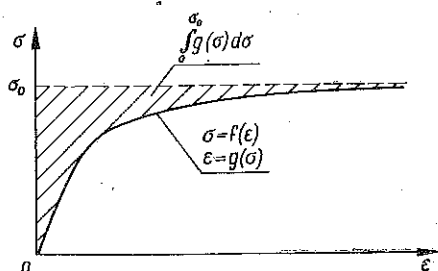
E. M. SHOEMAKER [4] podał przykłady zagadnień, w których rozwiązanie problemu nośności granicznej jest niejednoznaczne lub w ogóle nie istnieje. Ten sam

autor [5] wskazał na pewne problemy, w których do zagadnienia nośności granicznej nie można dojść bez przyjęcia niedopuszczalnych nieciągłości przemieszczeń. Wcześniej W. PRAGER [3] zauważył, że w niektórych przypadkach pod założeniem idealnej plastyczności mogą wystąpić niedopuszczalne nieciągłości prowadzące w efekcie do zniszczenia.

Dokładniejszą analizę problemów, w których nośność graniczna nie wystąpi, gdyż będzie poprzedzona rozdziałem układu na dwie części w wyniku lokalnego zmierzania do nieskończoności odkształceń, podali K. SZUWALSKI i M. ŻYCKOWSKI [6]. Obciążenie, przy którym dochodzi do dekohezji nazwano nośnością rozdzielczą układu. Nie stosuje się do niej większość praw powszechnie stosowanych do nośności granicznej. Szczególnego znaczenia nabiera nośność rozdzielcza w przypadku obciążeń termicznych [8], kiedy, wobec braku nośności granicznej, stwarza ona szansę oszacowania krytycznej wartości tych obciążeń.

2. ASYMPTOTYCZNIE IDEALNA PLASTYCZNOŚĆ

Zjawisko nośności rozdzielczej może wystąpić również przy innym prawie dopuszczającym nieograniczony wzrost odkształceń na poziomie punktu ciała — w przypadku asymptotycznie idealnej plastyczności (rys. 1). Przy tym prawie wzroście odkształceń do nieskończoności odpowiada ciągły wzrost naprężeń, które w sposób asymptotyczny zbliżają się do pewnej ustalonej wartości σ_0 , nazywanej umownie dalej granicą plastyczności.



Rys. 1

Najczęściej stosowane równania opisujące asymptotycznie idealną plastyczność — to prawo zaproponowane przez W. PRAGERA [2]:

$$(2.1) \quad \epsilon = f(\sigma) = \frac{\sigma_0}{E} \operatorname{Ar} \operatorname{tg} h \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)$$

oraz prawo podane przez A. YLINENA [7]

$$(2.2) \quad \epsilon = f(\sigma) = \frac{1}{E} \left[c\sigma - (1-c) \sigma_0 \ln \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_0} \right) \right],$$

w którym c jest bezwymiarową stałą materiałową. Prawo Ylinena pozwala na uzyskanie przejścia granicznego do idealnej sprężysto-plastyczności przy podstawieniu $c=1$.

W przypadku jednorodnego stanu odkształcenia, a zatem dla jednorodnego materiału również jednorodnego stanu naprężenia, pręt wykonany z materiału asymptotycznie idealnie plastycznego będzie się mógł wydłużać nieograniczenie. Wprowadzanie jakiegokolwiek czynnika zaburzającego jednorodność stanu np. siły masowej (uwzględnienie ciężaru własnego pręta lub siły odśrodkowej przy jego wirowaniu) lub niepryzmatyczności pręta na tyle małej, aby było uzasadnione przyjmowanie jednoosiowego stanu naprężenia, może w sposób zasadniczy zmienić pracę pręta. Może się wówczas okazać, że maksymalne wydłużenie, jakie ten pręt może osiągnąć, będzie skończone.

Całkowite wydłużenie pręta można obliczyć jako całkę:

$$(2.3) \quad \Delta l = \int_0^l \varepsilon dx = \int_0^l f(\sigma) dx = \int_{\sigma(0)}^{\sigma(l)} \frac{f(\sigma)}{d\sigma/dx} d\sigma,$$

gdzie l oznacza całkowitą długość pręta, a $f(\sigma)$ odpowiednią funkcję prawa asymptotycznie idealnej plastyczności. Jeżeli założymy, jak to ma miejsce w większości przypadków, $d\sigma/dx \neq 0$, to fakt, czy pręt będzie się mógł wydłużać nieograniczenie, czy też nie, będzie uzależniony od tego, czy całka niewłaściwa

$$(2.4) \quad I = \int_0^{\sigma_0} f(\sigma) d\sigma$$

będzie rozbieżna, czy nie. Całka ta może być interpretowana jako uzupełniająca energia właściwa odkształcenia.

Jak się okazuje w przypadku praw Pragera i Ylinena, całka ta jest zbieżna, a zatem maksymalne wydłużenie prętów wykonanych z materiałów stosujących się do tych praw będzie ograniczone. Jeżeli krzywa $\varepsilon = f(\sigma)$ będzie wolniej zbliżała się do poziomej asymptoty $\sigma = \sigma_0$, to całka niewłaściwa I (2.4) może stać się rozbieżna, co oznacza możliwość nieskończenia wielkich wydłużeń pręta. Przykładowo dla prawa zaproponowanego w pracy [6]

$$(2.5) \quad \varepsilon = f(\sigma) = \frac{\sigma}{E \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n}$$

ma to miejsce dla wykładnika potęgowego $n \geq 1$.

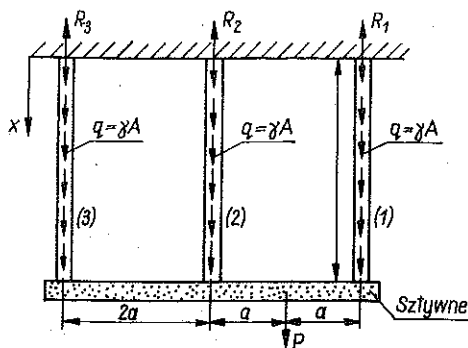
3. UKŁAD PRĘTOWY Z MATERIAŁU YLINENA Z UWZGLĘDNIENIEM CIĘŻARU WŁASNEGO PRĘTÓW

Jeżeli pręt, którego zdolność wydłużania się jest ograniczona, pracuje w układzie, który przy dojściu do nośności granicznej wymagałby wydłużenia większego niż maksymalnie możliwe, to spowoduje on, że układ swojej nośności granicznej nie osiągnie. W chwili gdy największe naprężenie (w jednym tylko przekroju wobec niejednorodności stanu naprężenia) osiągnie wartość σ_0 , tylko w tym przekroju odkształcenie będzie zmierzało do nieskończoności, a we wszystkich pozostałych

przekrojach będzie ono skończone. Prowadzi to do niedopuszczalnych nieciągłości przemieszczeń w tym przecię.

W efekcie spowoduje to zerwanie pręta w przekroju, w którym $\delta u/\delta x \rightarrow \infty$, a zatem obciążenie, przy którym największe naprężenie w prętach takiego układu osiągnie wartość σ_0 , określać będzie nośność rozdzielczą tego układu.

Zajmiemy się analizą pracy statycznie niewyznaczalnego układu prętowego przedstawionego na rys. 2. Trzy jednakowe pręty przyzmatyczne wykonane są z materiału stosującego się do prawa Ylinena (2.2). Niejednorodność stanu naprężenia jest wywołana uwzględnieniem ciężaru własnego prętów.



Rys. 2

Zgodnie z przeprowadzoną powyżej analizą, niedopuszczalne nieciągłości pola przemieszczeń pojawiają się w chwili, gdy największe naprężenie w układzie (w przecię 1 dla $x=0$) osiągnie wartość σ_0 . Odpowiednia nośność rozdzielcza układu będzie równa

$$(3.1) \quad \hat{p} = 2 - 2r_3,$$

gdzie r_3 jest pierwiastkiem równania przestępnego

$$(3.2) \quad c(1 + 6\mu - 7r_3) - (c-1) \left[\ln \frac{\mu(1 + \mu - r_3)}{(3r_3 - 2\mu)^2} + \frac{1 - r_3}{\mu} \ln \frac{1 + \mu - r_3}{1 - r_3} - 6 \frac{r_3 - \mu}{\mu} \ln \frac{3r_3 - 2\mu}{3(r_3 - \mu)} \right] = 0.$$

Wykorzystano tu następujące oznaczenia dla wielkości bezwymiarowych:

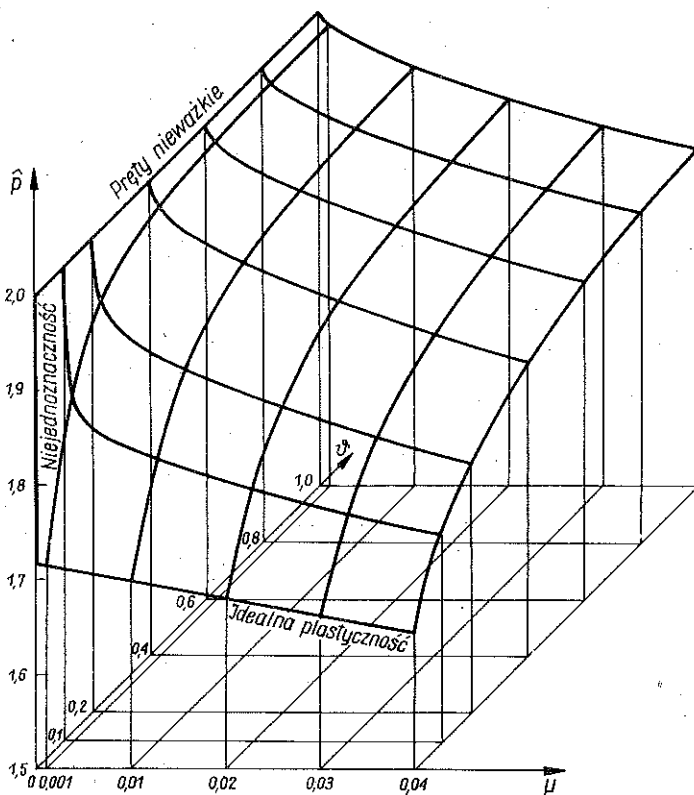
$$(3.3) \quad \hat{p} = \frac{P}{A\sigma_0}, \quad r_3 = \frac{K_1}{A\sigma_0}, \quad \mu = \frac{\gamma l}{\sigma_0},$$

gdzie γ oznacza ciężar właściwy materiału, A pole powierzchni przekroju pręta.

Opierając się na tych równaniach przeprowadzono obliczenia numeryczne, których wyniki przedstawiono na wykresie przestrzennym (rys. 3). Obrazuje on

zależność nośności rozdzielczej układu \hat{p} od ciężaru własnego prętów określonego przez parametr μ i od stopnia odejścia od idealnej plastyczności

$$(3.4) \quad \vartheta = 1 - c.$$



Rys. 3

Charakterystyczna dla tego wykresu jest nieciągłość, odpowiadająca skokowej zmianie nośności rozdzielczej dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego $\vartheta=0$. Jeżeli będziemy zmierzać z ciężarem własnym prętów do zera to będzie ona równa $12/7=1,7143$, natomiast rozwiązując układ bez uwzględnienia tego ciężaru otrzymamy nośność graniczną równą 2. Jest to zgodne z wynikami przedstawionymi w pracy [6]. Nie istnieje tu jednoznaczne przejście graniczne — ze względu na zupełnie różny jakościowo charakter pracy układu.

Dla porównania przytoczymy rozwiązania dla tego samego układu prętowego, w którym przyczyną niejednorodności stanu naprężenia będzie zmienność przekroju (ciężar własny pomijamy). Przyjmujemy następującą liniową zależność opisującą zmianę przekroju:

$$(3.5) \quad A(x) = A_0 \left(1 + \psi \frac{x}{l} \right)$$

zakładając, że ψ jest niewielkie, co pozwoli na przyjęcie jednoosiowego stanu naprężenia w prętach.

Przy wykorzystaniu wielkości bezwymiarowych (3.3) odniesionych do górnego, najmniejszego przekroju prętów A_0 , wykażemy, że nośność rozdzielczą określa wzór (3.1). Reakcję r_3 należy tym razem wyznaczyć z równania

$$(3.6) \quad c(1-7r_3) \ln(1+\psi) - (1-c) \left[\psi \ln \frac{(\psi+3r_3)^2}{\psi(1+\psi-r_3)} + 6r_3 \ln \frac{\psi+3r_3}{3r_3} + (1-r_3) \ln \frac{1-r_3}{1+\psi-r_3} \right] = 0.$$

Wykres 4 przedstawia zależność nośności rozdzielczej \hat{p} od dwóch parametrów: ψ , charakteryzującego zmienność przekroju oraz ϑ , określającego odstępstwo od idealnej plastyczności. Wykres ten ma przebieg zbliżony do uzyskanego poprzednio przy uwzględnieniu ciężaru własnego prętów. Wykazuje on tę samą charakterystyczną nieciągłość dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego ($\vartheta=0$), gdy ψ zmierza do zera. Zasadniczą różnicą w stosunku do poprzedniego wykresu jest to, że dla $\vartheta=0$, z wyjątkiem opisanej niejednoznaczności, nośność rozdzielcza jest niezależna od ψ i jest zawsze równa $\hat{p}=1,7143$.

Warto zaznaczyć, że wykres został sporządzony dla małych wartości parametru ψ . Kończy się on dla $\psi=0,04$, czyli dla prętów, w których jeden końcowy przekrój ma powierzchnię zaledwie o 4% większą niż drugi. Uzasadnia to przyjmowanie jednoosiowego stanu naprężenia w prętach. Najistotniejsze zmiany — szybkie zmniejszanie się wartości \hat{p} w stosunku do obliczonej dla prętów przyrządnych nośności granicznej $\bar{p}=2$, obserwuje się przy jeszcze mniejszych, bliskich zeru wartościach ψ .

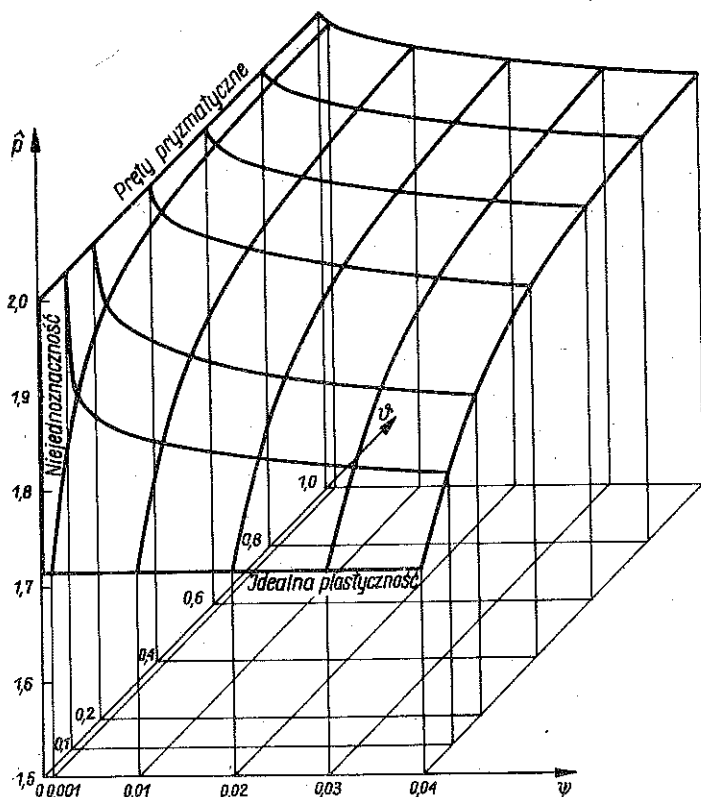
4. BADANIE PRZEJŚĆ GRANICZNYCH UOGÓLNIONYMI SZEREGAMI POTĘGOWYM

Aby dokładniej zbadać niejednoznaczności występujące w uzyskanych rozwiązaniach (zobrazowanych na wykresach 3 i 4), przeanalizujemy przejścia graniczne do punktów $\vartheta=0$ i $\mu=0$, bądź $\psi=0$. W pobliżu tych punktów wykorzystamy rozwinięcie rozwiązań na r_3 równań (3.2) i (3.6) w szeregi potęgowe.

Przedstawiając rozwiązanie równania (3.2) w formie zwykłego szeregu potęgowego parametru ϑ , otrzymamy

$$(4.1) \quad r_3 = \frac{1+6\mu}{7} + \frac{1}{7} \left[\ln \frac{7\mu(6+\mu)}{(3+4\mu)^2} + \frac{6-6\mu}{7} \ln \frac{6+\mu}{2(3+4\mu)} \right] \times \\ \times \left[\vartheta + \left(1 + \frac{1}{7\mu} \ln \frac{6-6\mu}{6+\mu} + \frac{6}{7\mu} \ln \frac{3-3\mu}{3+4\mu} \right) \vartheta^2 \right] + \dots$$

Opierając się na powyższych wzorach, można prowadzić obliczenia dla materiałów niewiele odbiegających od idealnie sprężysto-plastycznych, czyli takich, dla których krzywa $\sigma=f(\varepsilon)$ szybko zbliża się do asymptoty $\sigma=\sigma_0$. Zachodzi to dla niewielkich



Rys. 4

wartości parametru ϑ . Ciekawe jest porównanie wyników przy przejściu granicznym $\vartheta=0$ z uzyskanymi w pracy [5]. Przyjęcie w rozwiązaniu $\gamma \rightarrow 0$ daje skończoną wartość $r_3=1/7$, a więc wynik różny od uzyskanego w drodze analizy układu, w prętach którego panuje jednorodny stan naprężenia, kiedy to $r_3=0$. W miarę wzrostu ciężaru własnego reakcja r_3 rośnie, czyli odpowiednie obciążenie \hat{p} maleje.

Nie udaje się uzyskać rozwinięcia rozwiązania równania (3.2) ze względu na r_3 w formie zwykłego szeregu potęgowego współczynnika μ . Musimy przyjąć uogólniony szereg potęgowy nie zawierający wyrazu wolnego, gdyż jeśli nie uwzględnimy ciężaru własnego prętów, to do dekohezji nie dojdzie, a zniszczenie układu nastąpi w drodze utworzenia się mechanizmu zniszczenia plastycznego, polegającego na osiągnięciu przez naprężenia w całym pręcie 1 i 2 wartości σ_0 , co pozwoli na dowolnie wielkie ich wydłużenie. Wówczas $r_3=0$. Po wyznaczeniu współczynników szereg ten można napisać w postaci

$$(4.2) \quad r_3 = \frac{1}{3} \exp\left(\frac{1-2\vartheta}{2\vartheta}\right) \sqrt{\mu} + \left[\frac{5}{6} + \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{18\vartheta}\right) \exp\left(\frac{1-2\vartheta}{\vartheta}\right) \right] \mu + \dots$$

Rozwiązanie to jest poprawne dla μ bliskich zera i ϑ dostatecznie od zera odległych. Przy ϑ zmierzającym do zera szereg staje się rozbieżny. Widać, że dla ϑ mniejszych reakcja r_3 rośnie szybciej ze wzrostem μ niż dla większych wartości ϑ (bliskich

jedności). Szybciej wtedy więc maleje nośność rozdzielcza \hat{p} . Dochodząc do punktu $\vartheta=0$ i $\mu=0$ poprzez podane wyżej szeregi, otrzymujemy dwa różne rozwiązania. Wychodząc z szeregu ϑ (4.1) otrzymujemy $r_3=1/7$, czyli $\hat{p}=12/7$, natomiast z szeregu μ (4.2) — $r_3=0$, czyli $\hat{p}=2$. Ta niejednoznaczność rozwiązania spowodowana jest wystąpieniem dekohezji.

Rozwiązanie równania (3.6) dla układu prętów niepryzmatycznych przedstawione w formie szeregu parametru ϑ ma postać

$$(4.3) \quad r_3 = \frac{1}{7} + \left[\frac{\psi}{7 \ln(1+\psi)} \ln \frac{7\psi(7\psi+6)}{(7\psi+3)^2} + \frac{6}{7\psi} \ln \frac{7\psi+6}{2(7\psi+3)} \right] \times \\ \times \left\{ \vartheta + \left[1 + \frac{1}{7 \ln(1+\psi)} \left(\ln \frac{6}{7\psi+6} + 6 \ln \frac{3}{7\psi+3} \right) \right] \vartheta^2 \right\} + \dots$$

Charakterystyczna jest tutaj niezależność wyrazu wolnego od ψ . Przy przejściu do materiału idealnie sprężysto-plastycznego ($\vartheta=0$) reakcja r_3 , a co za tym idzie i nośność rozdzielcza, są niezależne od tego, czy przekrój zmienia się szybciej, czy wolniej. Istotny jest sam fakt zmiany przekroju jako przyczyna niejednorodności stanu naprężenia względem

Jeżeli to samo rozwiązanie napiszemy w formie uogólnionego szeregu ψ , to otrzymamy

$$(4.4) \quad r_3 = \frac{1}{3} \exp\left(\frac{1-2\vartheta}{2\vartheta}\right) \sqrt{\psi} + \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{7}{18\vartheta}\right) \exp\left(\frac{1-2\vartheta}{\vartheta}\right) - \frac{1}{6} \right] \psi + \dots$$

Dojście do układu prętowego wykonanego z prętów pryzmatycznych idealnie sprężysto-plastycznych ($\vartheta=0$ i $\psi=0$) od szeregu parametru ϑ (4.3) i szeregu ψ (4.4) daje i w tym przypadku różne wyniki. Brak przejścia granicznego jest efektem innego jakościowo sposobu pracy prętów (dekohezji).

5. PORÓWNANIE Z KRYTERIUM OGRANICZONYCH ODKSZTAŁCEŃ

Uzyskane poprzednio wyniki odpowiadały najłagodniejszemu z możliwych kryteriów dekohezji, dopuszczającemu na szczyblu punktu możliwość nieograniczonego wzrostu odkształcenia.

Dla materiałów rzeczywistych dochodzi do zniszczenia (zerwania) próbki przy pewnej skończonej wartości odkształcenia ε_{gr} — na skutek przekroczenia sił spójności materiału. Kryterium ograniczające największe odkształcenia względne ε zaproponował I. DATSKO [1]. Dla porównania zastosujemy teraz to kryterium, co oznacza dla prawa asymptotycznie idealnej plastyczności wykluczenie możliwości osiągnięcia przez naprężenia σ_0 .

W przypadku układu prętowego z rys. 2 największe odkształcenia wystąpią w przekroju utwierdzonym pręta 1 i one będą podlegały ograniczeniu. Oznaczać to będzie, że bezwymiarowa reakcja r_1 nie będzie mogła osiągnąć wartości 1, jak

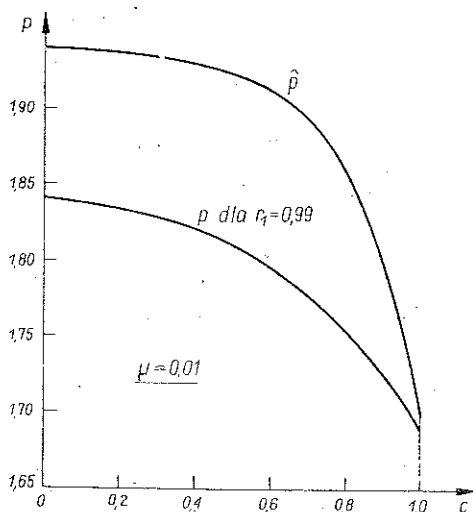
w chwili dekohezji, lecz będzie nieco mniejsza. Związek między tą reakcją a obciążeniem p ma postać

$$(5.1) \quad c \left(6\mu + \frac{7}{2}p - 6r_1 \right) + (c-1) \left[\ln \frac{\left(1 + 2r_1 - 2\mu - \frac{3}{2}p \right)^2}{(1 + \mu - r_1) \left(1 + \mu - r_1 + \frac{1}{2}p \right)} - \frac{1 - r_1 - \frac{1}{2}p}{\mu} \ln \frac{1 + \mu - r_1 + \frac{1}{2}p}{1 - r_1 + \frac{1}{2}p} - \frac{1 - r_1}{\mu} \ln \frac{1 + \mu - r_1}{1 - r_1} + \frac{1 - 3\mu - \frac{3}{2}p + 2r_1}{\mu} \ln \frac{1 - 2\mu - \frac{3}{2}p + 2r_1}{1 - 3\mu - \frac{3}{2}p + 2r_1} \right] = 0.$$

Ze względów rachunkowych wygodniejsze jest postawienie kryterium ograniczającego dopuszczalne naprężenie. Należy przy tym pamiętać, że będzie ono odpowiadać różnym dopuszczalnym odkształceniom w zależności od parametru c w prawie Ylinena.

Dla przykładu przyjęto $\sigma_{\text{dop}} = 0,99\sigma_0$. Z równania (5.1), po podstawieniu za $r_1 = 0,99$, można wyznaczyć odpowiadającą temu ograniczeniu maksymalną wartość obciążenia, jakie układ będzie jeszcze w stanie przenieść. Wyniki obliczeń numerycznych dla $\mu = 0,01$ przedstawiono na wykresie (rys. 5), na którym naniesiono porównawczo krzywą nośności rozdzielczej \hat{p} uzyskaną na podstawie równań (3.1) i (3.2).

Jak wynika z porównania obu krzywych, różnice pomiędzy obciążeniem dopuszczającym nieograniczenie wielkie odkształcenie \hat{p} , a obciążeniem wynikłym z ograniczenia ε nie są zbyt duże.



Rys. 5

Najmniejszą różnicę otrzymujemy dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego ($c=1$). Sięga ona wtedy 0,5%. Co ciekawsze, to najmniejsza różnica odpowiada najostrejszemu kryterium ograniczającemu odkształcenia, $\varepsilon_{gr}=0,99\sigma_0/E$, w miarę odchodzenia od idealnej plastyczności różnica między krzywymi na wykresie staje się coraz większa, ale nawet maksymalna nie przekracza 5%. Jest to stosunkowo niewiele, jeżeli weźmie się pod uwagę, że dopuściliśmy możliwość występowania tylko bardzo niewielkich odkształceń (do $4,605\sigma_0/E$ dla $c=0$).

Nośność rozdzielcza będzie w każdym przypadku kresem górnym rozwiązań, określających nośność układu przy przyjętym dodatkowo kryterium ograniczającym dopuszczalne odkształcenia.

6. UKŁAD PRACUJĄCY PO DEKOHEZJI

W układach omawianych dotychczas zerwanie się pierwszego pręta powoduje natychmiastowe zniszczenie układu, gdyż pozostałe dwa pręty nie są w stanie przenieść obciążenia równego nośności rozdzielczej. Nie jest to jednak reguła, gdyż mogą istnieć układy, które będą mogły nadal pracować, nawet po zerwaniu się jednego pręta.

Zajmiemy się układem prętowym analogicznym do przedstawionego na rys. 2, w którym jednak pręty 2 i 3 będą miały przekrój n razy większy niż pręt 1. Ponieważ przyjęcie materiału Ylinena wniosłoby tutaj spore trudności typu rachunkowego i mogłoby utrudnić wysnucie wniosków końcowych, przeto rozważać będziemy od razu graniczny przypadek $c=1$, a zatem pręty wykonane z materiału idealnie sprężysto-plastycznego. Uwzględnimy wpływ ciężaru własnego prętów.

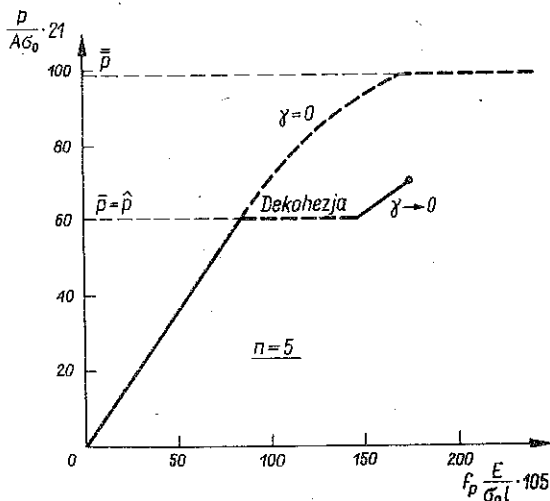
Jak już wykazano w punkcie 3, w układzie tym dojdzie do dekohezji w chwili, gdy naprężenie w górnym przekroju pręta 1 osiągnie wartość σ_0 . Spowoduje to oddzielenie się pręta 1 od ostoi i dalej obciążenie będzie przenoszone tylko przez pręty 2 i 3. Aby układ nie uległ natychmiastowemu zniszczeniu, największe panujące w nim naprężenie (w przecie 2 dla $x=0$) pod wpływem siły β musi być mniejsze od σ_0 . Warunek ten jest spełniony, gdy

$$(6.1) \quad n > \frac{15\sigma_0 - \gamma l}{4(\sigma_0 - \gamma l)}$$

W granicznym przypadku dla $\gamma=0$ wystarczy, aby $n > 15/4$, dla $\gamma \neq 0$ współczynnik ten musi być odpowiednio większy.

Dla przykładu przeprowadzono obliczenia w przypadku, gdy pręty 2 i 3 mają przekrój pięciokrotnie większy niż pręt 1, czyli dla $n=5$. Jeżeli spełniony będzie warunek, że $\gamma l < 5/19\sigma_0$, to taki układ będzie mógł pracować nadal po zerwaniu się pręta 1.

Na wykresie 6 przedstawiono porównawczo zależność pomiędzy wielkością siły działającej P , a przemieszczeniem pionowo w dół punktu przyłożenia siły f_p dla prętów nieważkich i dla granicznego przypadku uwzględnienia ciężaru własnego prętów przy $\gamma \rightarrow 0$.



Rys. 6

Oba wykresy pokrywają się na odcinku prostym odpowiadającym zakresowi pracy sprężystej. Dla prętów nieważkich po przekroczeniu nośności sprężystej wykres zakrzywia się, co jest związane z redystrybucją reakcji, aż do siły \bar{P} , przy której następuje nieograniczone płynięcie prętów 1 i 2, co na wykresie obrazuje prosta pozioma. W drugim przypadku nośność sprężysta pokrywa się z nośnością rozdzielczą i po dekohezji układ złożony już z dwóch prętów pracuje nadal jak w zakresie sprężystym. Wykres jest zatem znowu odcinkiem prostym, lecz bardziej nachylonym do osi f_p , ponieważ układ stał się bardziej podatny.

Po oddzieleniu się drugiego pręta układ zostanie zniszczony i w tym punkcie wykres się kończy.

7. UWAGI KOŃCOWE

Model ciała idealnie sprężysto-plastycznego bywa najczęściej stosowany do analizy pracy konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym oraz do określania jej nośności granicznej. Bezskrytyczne stosowanie tego modelu może jednak prowadzić do pewnych niejednoznaczności, czy też błędnych wyników. Przyczyną tego może być zjawisko dekohezji, będące efektem wystąpienia niedopuszczalnych nieciągłości pola przemieszczeń, które w zasadniczy sposób zmienia dalszą pracę konstrukcji. Należy pamiętać, że charakterystyki rzeczywistych materiałów w istotny sposób różnią się od modelu idealnie sprężysto-plastycznego. Niemal zawsze występuje efekt wzmocnienia materiału, co umożliwia rozwijanie się stref uplastycznionych w prętach rozciąganych i uniknięcie dekohezji. W tym przypadku jednak musi istnieć pewne fizyczne kryterium dekohezji ograniczające dopuszczalną wielkość odkształceń lub naprężeń. W pracy wykazano, że nawet dopuszczając nieograniczony wykres rozciągania (odkształcenia mogą być dowolnie wielkie) można uzyskać efekt dekohezji jako skutek lokalnego zmierzania odkształceń do nieskończoności.

Możliwość wystąpienia dekohezji nie jest charakterystyczna jedynie dla ciała idealnie sprężysto-plastycznego. Również dla niektórych ciał asymptotycznie idealnie plastycznych, które także dopuszczają nieograniczony wzrost odkształceń, może dojść do rozdziału układu na dwie części. Warunkiem jest, aby krzywa $\sigma=f(\epsilon)$ dostatecznie szybko zbliżała się do poziomej asymptoty. Istotnym efektem jest wówczas brak jednoznacznego przejścia do przypadku granicznego — idealnej plastyczności. Ta niejednoznaczność, potwierdzona badaniem przejść granicznych uogólnionymi szeregami potęgowymi, jest wynikiem zupełnie innego jakościowo charakteru pracy układu.

Ponieważ nieciągłość przemieszczeń prowadząca do dekohezji jest efektem lokalnego zmierzania do nieskończoności odkształceń, przeto w celu uściślenia wyników należałoby zastosować dokładniejszą teorię odkształceń skończonych. Jednakże w przypadku dodatnich odkształceń jakościowo nie zajdzie żadna istotna zmiana; wydłużenie pręta będzie nadal ograniczone i do dekohezji dojdzie i to nawet przy mniejszym nieco obciążeniu. Jeżeli ujemne odkształcenia wzrastałyby gwałtownie, to efekt ten będzie kompensowany wyraźnym powiększeniem przekroju poprzecznego i nie dojdzie do dekohezji.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. I. DATSKO, *Material properties and manufacturing process*, New York 1966.
2. W. PRAGER, *On isotropic materials with continuous transition from elastic to plastic state*, Proc. V-th Int. Congr. Appl. Mech. 234–237, 1938.
3. W. PRAGER, *Discontinuous fields of plastic stress and flow*, Proc. Sec. U.S. Congr. Appl. Mech., 21–34, 1955.
4. E. M. SHOEMAKER, *Some paradoxes associated with elastic-plastic limit load analysis*, Arch. Mech. 20, 4, 1968.
5. E. M. SHOEMAKER, *On velocity discontinuities in elastic-plastic boundary value problems*, Arch. Mech. 26, 327–331, 1974.
6. K. SZUWALSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *On the phenomenon of decohesion in perfect plasticity*, Int. J. Solids Structures, 9, 85–98, 1973.
7. A. YLINEN, *A method for determining the buckling stress and required cross-sectional area for centrally loaded straight columns in elastic and inelastic range*, Mem: Ass. Int. Ponts. Charp. 16, 529–550, 1956.
8. M. ŻYCZKOWSKI, K. SZUWALSKI, *Decohesive carrying capacity in thermal stress problems*. Trans. 3-rd Int. Cong. Structural Mechanics in Reactor Technology, 5, part L, paper L 3/4, London 1975.

Резюме

РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНАЯ НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ИЗ АСИМПТОТИЧЕСКИ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Не всегда статически неопределимая стержневая система, изготовленная из идеально упруго-пластического материала, подлежит разрушению вследствие перемены в механизм. В случае неоднородного деформационного состояния в стержнях может выступить явление

декогезии вследствие ограниченной величины возможного удлинения стержней. Этот сам эффект может выступить тоже в случае некоторых асимптотически идеально пластических материалов. В работе рассмотрены такие системы с учетом собственного веса стержней и изменения сечения в сходящихся стержнях. Неоднозначности появляющиеся в решении исследованы при применении обобщенных степенных рядов. Результаты сравнены с полученными на основе критерия ограниченных деформаций. Сформулировано условие дальнейшей работы системы после первой декогезии и приведен пример.

SUMMARY

DECOHESIVE CARRYING CAPACITY FOR STATICALLY INDETERMINATE BAR SYSTEMS MADE OF ASYMPTOTICALLY PERFECT PLASTIC MATERIAL

Not always a statically indeterminate bar system made of perfect elastic-plastic material reaches its mechanism of plastic collapse. In the case of nonhomogeneous state of strain the phenomenon of decohesion may occur as a result of limited possible elongation of bars. The same phenomenon may occur in systems made of certain asymptotically perfect plastic materials. This paper considers such systems loaded by their own weight and made of nonprismatic rods. Nonuniqueness of solution is investigated by means of generalized power series. The results are compared with those obtained from the criterion of limited strains. The condition for extended work of the system after the first decohesion is formulated and illustrated by an example.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW
KONSTRUKCJI MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 lutego 1977 r.
