

STATYKA I DYNAMIKA BELKI NIESKOŃCZENIE DŁUGIEJ NA DYSKRETNYM PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM

JERZY R A K O W S K I (POZNAŃ)

Rozwiązano problem zginania, skręcania oraz drgań poprzecznych i skrętnych nieskończonej belki, której węzły oparte są na liniowych i obrotowych podporach sprężystych dyskretnej podłoża winklerowskiego i dwuparametrowego. Do obliczeń przyjęto dyskretny model układu i zastosowano metodę równań różnicowych, które rozwiązano wykorzystując dyskretną transformację Fouriera. Wyniki określające przemieszczenia węzłów i siły wewnętrzne otrzymano w postaci zamkniętej dla dowolnego obciążenia belki. Podano również rozwiązania dla belek półnieskończonych dla różnych warunków brzegowych. W analizie ustalonych drgań poprzecznych belki uwzględniono wpływ momentów bezwładności obrotowej mas węzłów przyjmując, że każdy z węzłów ma 2 stopnie swobody dynamicznej. W opisie drgań wykorzystano ujęcie falowe zjawiska, określając zakresy częstości drgań dla różnych typów rozchodzenia się zaburzeń. Rozwiązanie problemu harmonicznych drgań wymuszonych (poprzecznych i skrętnych) sformułowano również w postaci analitycznej.

1. Wstęp

Problem zginania i drgań belki nieskończenie długiej opartej na winklerowskim podłożu sprężystym ma bogatą literaturę. Szczegółowe omówienie tych zagadnień można znaleźć m.in. w pracy W. NOWACKIEGO [10] i R. ŚWITKI [14]. Przedstawione tam rozwiązania dotyczą belek i podłoża sprężystego traktowanego jako układy ciągłe.

W pierwszej części niniejszej pracy rozważano zginanie nieskończenie długiej belki opartej punktowo na liniowych i obrotowych podporach sprężystych (układy takie o budowie dyskretnej spotyka się w praktyce inżynierskiej w postaci na przykład szyn kolejowych, belek podsuwnicowych itp.). Do rozwiązania problemu zastosowano metodę równań różnicowych, którą rozwinął ostatnio W. GUTKOWSKI [6] i R. ŚWITKA [13]. Dzięki zastosowaniu dyskretnej transformacji Fouriera podanej przez I. BABUŠKĘ [1 i 2] otrzymano wyniki w postaci zamkniętej, pozwalające na określenie przemieszczeń pionowych i kątów obrotu węzłów belki dla dowolnego jej obciążenia. Omawiany problem rozszerzono o przypadek zginania belki półnieskończonej dla różnych warunków brzegowych. Określono również sposób uzyskania rozwiązania dla belki opartej na dyskretnej podłożu dwuparametrowym, zdefiniowanym przez R. ŚWITKĘ [12]. W drugiej części pracy rozwiązano problem ustalonych, nietłumionych drgań harmonicznych nieskończonej belki w ujęciu dyskretnej przyjmując, że ruchowi podlegają węzły, w których skupiona jest cała masa belki. W procesie drgań uwzględniono, że każdy z węzłów ma moment bez-

władności obrotowej masy różny od zera (węzły mają po dwa stopnie swobody dynamicznej: niezależny przesuw i obrót).

W pracach omawiających drgania układów dyskretnych jak np. w monografii L. BRILLIOUNA i M. PARODIEGO [4], w artykule J.I. BOBROWNICKIEGO i W.P. MASŁOWA [3] oraz D.J. MEADA [9] układ traktowany jest jako ciągły z okresowymi niejednorodnościami. Modele takie użyteczne są przy analizie drgań o wysokich częstotliwościach. Ujęcie dyskretne zaś, jak zauważył M. HECKL [7], jest szczególnie przydatne w przypadku, gdy długość fali rozchodzącego się zaburzenia jest rzędu odstepu między węzłami, co odpowiada drganiom w konstrukcjach inżynierskich. W niniejszej pracy w opisie drgań wykorzystano ujęcie falowe zjawiska podane m.in. przez F. C. CRAWFORDA w monografii [5]. Przeprowadzono szczegółową analizę postaci drgań wymuszonych przez dowolne obciążenie harmonicznym zmiennym w czasie określając zakresy częstości drgań, dla których generowane drgania przyjmują postać fali eksponencjalnej i bieżącej. Określono również wpływ wartości momentów bezwładności obrotowej mas węzłów na postać i charakter drgań. Wszystkie wyniki uzyskano i podano w postaci zamkniętej.

W pracy podano również rozwiązanie problemu skręcania i ustalonych drgań skrętnych regularnej belki o nieskończonej długości.

2. ZGINANIE BELKI

Rozważmy pręt nieskończenie długi, który w wyodrębnionych punktach, nazywanych węzłami, obciążony jest skupionymi siłami P_r i momentami \mathfrak{M}_r . Węzły o stałym rozstawie a są sprężyste utwierdzone i oparte na dyskretnym podłożu sprężystym. Fragment omawianego układu przedstawia rys. 1.

Wzory transformacyjne metody przemieszczeń, po wprowadzeniu do nich operatora przesunięcia Boole'a [$E_r^n(f_r) = f_{r+n}$], mają postać (dodatnie kierunki sił wewnętrznych zaznaczono na rys. 2):

$$\begin{aligned}
 M_r &= -\frac{2EI}{a^2} [(E_r^{-1} + 2) \Phi_r + 3(E_r^{-1} - 1) w_r], \\
 M_r &= \frac{2EI}{a^2} [(E_r + 2) \Phi_r - 3(E_r - 1) w_r], \\
 Q_r &= -\frac{6EI}{a^3} [(E_r^{-1} + 1) \Phi_r + 2(E_r^{-1} - 1) w_r], \\
 \bar{Q}_r &= -\frac{6EI}{a^3} [(E_r + 1) \Phi_r - 2(E_r - 1) w_r].
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Wykorzystując (2.1) w równaniach równowagi sił działających na węzeł r otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 (E_r + E_r^{-1} + 4) \Phi_r - 3(E_r - E_r^{-1}) w_r + 2K_\phi \Phi_r - \frac{a^2}{2EI} \mathfrak{M}_r &= 0, \\
 (E_r - E_r^{-1}) \Phi_r - 2(E_r + E_r^{-1} - 2) w_r + 4K_w w_r - \frac{a^3}{6EI} P_r &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

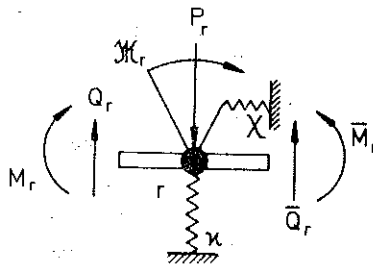
gdzie EI oznacza sztywność belki na zginanie,

$$K_\varphi = \frac{a\chi}{4EI},$$

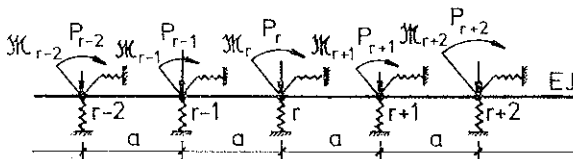
przy czym χ oznacza współczynnik podatności obrotowej sprężystego utwierdzenia węzła,

$$K_w = \mu\kappa, \quad \mu = \frac{a^3}{24EI},$$

przy czym κ oznacza współczynnik podatności liniowej dyskretnego podłoża sprężystego, oraz gdzie w_r oznacza przemieszczenie pionowe węzła r belki oraz φ_r kąt obrotu węzła r ($\Phi_r = a\varphi_r$).



Rys. 1



Rys. 2

Niech rozważana belka obciążona jest tak dobranymi siłami i momentami, że zapewniona jest zbieżność szeregu $\sum_{-\infty}^{\infty} |w_r|$, tzn. że $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} w_r = 0$. Wówczas układ równań różnicowych (2.2) można rozwiązać stosując dyskretną transformację Fouriera [1, 2] zdefiniowaną następująco:

$$(2.3) \quad \tilde{f}(\alpha) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} f_r e^{ir\alpha}, \quad f_r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\alpha) e^{-ir\alpha} d\alpha.$$

Wykonując na układzie równań (2.2) transformację Fouriera zgodnie z (2.3) otrzymuje się następujące transformaty ugięć i kątów obrotów:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \tilde{w}(\alpha) &= 2\mu B(\alpha) \left[[(\cos \alpha + 2 + K_\varphi) \tilde{P}(\alpha) + \frac{3}{a} i \sin \alpha \tilde{M}(\alpha)] \right], \\ \tilde{\varphi}(\alpha) &= 6\mu B(\alpha) \left[-i \sin \alpha \tilde{P}(\alpha) + \frac{2}{a} (1 - \cos \alpha + K_w) \tilde{M}(\alpha) \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$B(\alpha) = [(1 - \cos \alpha)^2 + 2K_\varphi(1 - \cos \alpha) + 2K_w(\cos \alpha + 2 + K_\varphi)]^{-1}.$$

2.1. Belka nieskończona

Wzory na ugięcia i kąty obrotów węzłów belki nieskończenie długiej uzyskuje się wykonując na wzorach (2.4) transformację odwrotną.

Tak więc

$$(2.5) \quad \begin{aligned} w_r &= \frac{\mu}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[(\cos \alpha + 2 + K_\varphi) \tilde{P}(\alpha) + \frac{3}{a} i \sin \alpha \tilde{\mathfrak{M}}(\alpha) \right] B(\alpha) e^{-i r \alpha} d\alpha, \\ \varphi_r &= -\frac{3\mu}{a\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[i \sin \alpha \tilde{P}(\alpha) - \frac{2}{a} (1 - \cos \alpha + K_w) \tilde{\mathfrak{M}}(\alpha) \right] B(\alpha) e^{-i r \alpha} d\alpha. \end{aligned}$$

Zaznacza się, że wzory (2.5) mają zastosowanie również dla dowolnego, międzywęzłowego obciążenia belki: P_r i \mathfrak{M}_r stanowią wówczas sumy reakcji brzegowych w węzle r przecięci $[r-1; r]$ i $[r; r+1]$ obustronnie utwierdzonych.

Przyjmijmy dla przykładu, że na belkę działa obciążenie w postaci jednej siły skupionej $P_r = P\delta_{r,p}$ i momentu $\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}\delta_{r,p}$ ($\delta_{r,p}$ oznacza deltę Kroneckera). Wówczas

$$(2.6) \quad \tilde{P}(\alpha) = P e^{i p \alpha}, \quad \tilde{\mathfrak{M}}(\alpha) = \mathfrak{M} e^{i p \alpha}.$$

Podstawiając (2.6) do (2.5) otrzymamy

$$(2.7) \quad \begin{aligned} w_r &= \frac{2\mu}{\pi} \int_0^\pi \left[P (\cos \alpha + 2 + K_\varphi) \cos(r-p)\alpha + \frac{3}{a} \mathfrak{M} \sin \alpha \sin(r-p)\alpha \right] B(\alpha) d\alpha, \\ \varphi_r &= -\frac{6\mu}{a\pi} \int_0^\pi \left[P \sin \alpha \sin(r-p)\alpha - \frac{2}{a} \mathfrak{M} (1 - \cos \alpha + K_w) \cos(r-p)\alpha \right] B(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Funkcje (2.7), po przyjęciu tam odpowiednio $P=1$ i $\mathfrak{M}=1$, można uważać jako analogony funkcji Greena dla jednowymiarowego układu dyskretnego.

Jeżeli wszystkie węzły belki obciążone są równymi siłami $P_r = P = \text{const}$ ($\mathfrak{M}_r = 0$), to ugięcia i kąty obrotów węzłów oblicza się ze wzoru

$$(2.8) \quad \{w_r; \varphi_r\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \{w_r(P=1); \varphi_r(P=1)\} P_j.$$

Korzystając z twierdzeń o zbieżności szeregów trygonometrycznych w sensie dystrybucyjnym [8] otrzymuje się

$$(2.9) \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \cos(r-j)\alpha = 2\pi \cos r\alpha \delta(\alpha), \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sin(r-j)\alpha = 2\pi \sin r\alpha \delta(\alpha),$$

gdzie $\delta(\alpha)$ oznacza funkcję Diraca.

Uwzględniając (2.9) we wzorach (2.8) i (2.7) i wykorzystując pierwszą własność dystrybucji [8] uzyskuje się

$$(2.10) \quad w_r = \frac{P}{K_w} \mu = \frac{P}{\kappa}, \quad \varphi_r = 0,$$

co zgodne jest z definicją dyskretnego podłoża winklerowskiego.

W przypadku działania na węzły belki równych momentów $\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M} = \text{const}$ ($P_r = 0$), otrzymuje się wyniki w postaci

$$(2.11) \quad w_r = 0, \quad \varphi_r = \frac{6\mu\mathfrak{M}}{(3 + K_\varphi) a^2}.$$

Rozwiązanie problemu zginania belki nieskończenie długiej można rozszerzyć na przypadek, gdy belka opiera się na dyskretnym podłożu dwuparametrowym [12]. W równaniu (2.2) w miejscu wyrażenia κ należy podstawić operator $[C_n - C_t (E_r + E_r^{-1} - 2)]$, czyli we wzorach końcowych zamiast K_w wyrażenia

$$[K_1 + 2K_2 (1 - \cos \alpha)], \quad \text{gdzie } K_1 = \mu C_n, \quad K_2 = \mu C_t,$$

a (C_n i C_t) są danymi parametrami podłoża.

W tablicach 1-3 zestawiono wyniki obliczeń dla wybranych przykładów numerycznych. Obliczenia przeprowadzono dla różnych parametrów K_w i K_φ podłoża winklerowskiego.

Tablica 1. Wartości $\frac{w_r}{\mu}$ dla obciążenia $P_r = 1\delta_r, 0$

K	K	$r=0$	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$
0,5	0	1,2717	0,4341	-0,0338	-0,0364	-0,0025	0,0023
0,5	0,2	1,2196	0,4268	-0,0060	-0,0278	-0,0042	0,0010
1,0	0,5	0,6905	0,1730	-0,0119	-0,0066	0,0000	0,0002
2,0	0,5	0,3953	0,0634	-0,0104	-0,0009	0,0002	0,0000

Tablica 2. Wartości $\frac{a\varphi_r}{\mu}$ ($P_r = 1\delta_r, 0$) oraz wartości $\frac{-aw_r}{\mu}$ ($\mathfrak{M}_r = 1\delta_r, 0$)

K_φ	K_w	$r=0$	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$
0,5	0	0	-0,9469	-0,1291	0,0517	0,0165	-0,0015
0,5	0,2	0	-0,8053	-0,1334	0,0285	0,0131	0,0004
1,0	0,5	0	-0,4161	-0,0270	0,0122	0,0017	-0,0003
2,0	0,5	0	-0,2454	0,0096	0,0045	-0,0004	-0,0001

Tablica 3. Wartości $\frac{a^2 \varphi_r}{\mu}$ dla obciążenia $\mathfrak{M}_r = 1\delta_r, 0$

K_w	K_φ	$r=0$	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$
0,5	0	4,9254	-1,0101	-0,4979	0,0060	0,0372	0,0046
0,5	0,2	4,1751	-0,7693	-0,3900	-0,0162	0,0218	0,0046
1,0	0,5	3,1320	-0,5817	-0,1427	0,0102	0,0054	0,0000
2,0	0,5	2,9282	-0,5843	-0,0357	0,0131	0,0002	-0,0003

2.2. Belka półnieskończona

Rozwiązania dla belki półnieskończonej, ograniczonej z lewej strony węzłem $r=0$, otrzymuje się wykorzystując wzory dla belki nieskończonej wyprowadzone w p. 2.1. W celu spełnienia żądanych warunków brzegowych w węźle $r=0$ wprowadza się do belki nieskończonej dodatkowe obciążenie kompensacyjne F_j ($j \leq 0$) zależne od danego obciążenia. I tak np. rozwiązanie dla belki podpartej przegubowo na końcu $r=0$ (warunki brzegowe: $w_0=0$, $M_0=0$) i obciążonej siłą $P_r=P\delta_{r,p}$ i momentem skupionym $\mathfrak{M}_r=\mathfrak{M}\delta_{r,q}$ otrzymuje się z rozwiązania dla belki nieskończenie długiej obciążonej dodatkową siłą F' i grupą momentów F'' :

$$(2.12) \quad F' = -P\delta_{r,-p}, \quad F'' = \mathfrak{M}\delta_{r,-q} + \mathfrak{M}_0,$$

gdzie

$$\mathfrak{M}_0 = -2K_\varphi \frac{\int_0^\pi [Pa \sin \alpha \sin p\alpha + 2\mathfrak{M}(1 - \cos \alpha + K_w) \cos q\alpha] B(\alpha) d\alpha}{\pi + 2K_\varphi \int_0^\pi (1 - \cos \alpha + K_w) B(\alpha) d\alpha}.$$

Warunki brzegowe sztywnego utwierdzenia węzła $r=0$ ($w_0=0$, $\varphi_0=0$) zostaną spełnione w przypadku wprowadzenia do belki dodatkowego obciążenia w postaci

$$(2.13) \quad F' = -P\delta_{r,-p}, \quad F'' = \mathfrak{M}\delta_{r,-q} + \mathfrak{M}_0,$$

gdzie

$$\mathfrak{M}_0 = - \left[\int_0^\pi (1 - \cos \alpha + K_w) B(\alpha) d\alpha \right]^{-1} \int_0^\pi [Pa \sin \alpha \sin p\alpha + 2\mathfrak{M}(1 - \cos \alpha + K_w) \cos q\alpha] B(\alpha) d\alpha.$$

Obciążenie kompensacyjne dla określenia rozwiązania dla belki półnieskończonej o swobodnym końcu w węźle $r=0$ wyznacza się z warunków brzegowych $Q_0=0$ i $M_0=0$.

3. DRGANIA POPRZECZNE BELKI NIESKOŃCZENIE DŁUGIEJ

W rozdziale niniejszym rozważane będą nietłumione, ustalone drgania nieskończonej belki, wymuszone działaniem skupionych sił i momentów harmonicznie zmiennych w czasie [11]. Przyjęto, że wszystkie węzły belki mają jednakowe masy m o równych momentach bezwładności obrotowej I_0 . Równania równowagi sił działających na nieobciążony węzeł r uzyskuje się z (2.2) po wprowadzeniu tam sił bezwładności:

$$(3.1) \quad P_r(t) = -m\ddot{w}_r(t), \quad \mathfrak{M}_r(t) = -I_0 \ddot{\varphi}_r(t).$$

Przyjmując $\varphi_r(t) = \varphi^0 e^{i\omega t}$, $w_r(t) = w^0 e^{i\omega t}$, gdzie ω oznacza częstotść kołową drgań wymuszających, otrzymuje się

$$(3.2) \quad \begin{aligned} (E_r + E_r^{-1} + 4) \Phi_r^0 - 3(E_r - E_r^{-1}) w_r^0 - 2 \left(\frac{I_0 a \omega^2}{4EI} - K_\phi \right) \Phi_r^0 &= 0, \\ (E_r - E_r^{-1}) \Phi_r^0 - 2(E_r + E_r^{-1} - 2) w_r^0 - 4 \left(\frac{ma^3 \omega^2}{24EI} - K_w \right) w_r^0 &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązań układu równań jednorodnych (3.2) szukamy w postaci

$$(3.3) \quad w_r^0 = C e^{\delta r}, \quad \Phi_r^0 = C' e^{\delta r}.$$

Podstawiając (3.3) do (3.2) i przyrównując do zera wyznacznik układu równań, otrzymuje się następujące równanie charakterystyczne:

$$(3.4) \quad z^2 - 2(B - A)z + 2A(B - 3) = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} z &= 1 - ch\delta, \\ A &= \alpha^2 - K_w, \quad B = \eta\alpha^2 - K_\phi, \\ \alpha^2 &= \frac{ma^3 \omega^2}{24EI}, \quad \eta = \frac{6I_0}{ma^2}. \end{aligned}$$

Analiza pierwiastków równania (3.4) pozwala na określenie charakteru drgań belki, uzależnionego od wartości parametrów A i B . Jeżeli $z < 0$ ($ch\delta > 1$, δ jest rzeczywiste) lub jeżeli z jest liczbą zespoloną (δ zespolone), to drgania mają charakter fali eksponencjalnej, gdy zaś $z > 2$ fali eksponencjalnej przemiennej. Dla $0 \leq z \leq 2$ (δ urojone) drgania mają charakter fali bieżącej [5].

3.1. Symetryczna postać drgań

Niech na belkę działa siła $P_r(t) = P\delta_{r,0} e^{i\omega t}$. Zakładając ograniczoność przemieszczeń w nieskończoności, rozwiązań równania (3.2) będziemy poszukiwali w postaci

$$(3.5) \quad \begin{aligned} r > 0 \quad \bar{w}_r(t) &= \bar{w}_r^0 e^{i\omega t}, & \bar{w}_r^0 &= \sum_{j=1}^2 \bar{C}_j e^{-\delta_j r}, \\ \bar{\Phi}_r(t) &= \bar{\Phi}_r^0 e^{i\omega t}, & \bar{\Phi}_r^0 &= \sum_{j=1}^0 \bar{C}'_j e^{-\delta_j r}, \\ r < 0 \quad w_r(t) &= w_r^0 e^{i\omega t}, & w_r^0 &= \sum_{j=1}^2 C_j e^{\delta_j r}, \\ \Phi_r(t) &= \Phi_r^0 e^{i\omega t}, & \Phi_r^0 &= \sum_{j=1}^2 C'_j e^{\delta_j r}. \end{aligned}$$

Na podstawie (3.2) łatwo otrzymuje się wzory

$$(3.6) \quad \bar{C}'_j = -b_j \bar{C}_j, \quad C'_j = b_j C_j, \quad b_j = \frac{3\text{sh } \delta_j}{\text{ch } \delta_j + 2 - B}, \quad j=1, 2.$$

Stałe \bar{C}_j i C_j wyznacza się z warunków ciągłości przemieszczeń i równowagi sił w węzle $r=0$. Dla każdego t spełnione są zależności

$$(3.7) \quad \bar{w}_0 = w_0, \quad \bar{\Phi}_0 = \Phi_0 = 0, \quad Q_0 - \bar{Q}_0 - P = 0.$$

Podstawiając (3.5) i (3.6) do (3.7) po przekształceniach otrzymuje się

$$(3.8) \quad \bar{C}_j = C_j = \frac{6\mu P}{b_j (\text{ch } \delta_k - \text{ch } \delta_j)}, \quad \bar{C}'_j = -C'_j = \frac{6\mu P}{\text{ch } \delta_j - \text{ch } \delta_k},$$

$$j, k=1, 2, \quad \delta_k \neq \delta_j.$$

Jeżeli oba pierwiastki równania (3.4) są mniejsze od zera, tzn. $z < 0$ ($\text{ch } \delta > 1$), to ruch drgający węzłów opisują równania (3.9). Są to drgania o charakterze fali eksponencjalnej

$$(3.9) \quad w_r(t) = 2\mu P \left[\frac{\text{ch } \delta_1 + 2 - B}{\text{sh } \delta_1 (\text{ch } \delta_2 - \text{ch } \delta_1)} e^{-\delta_1 |r|} - \frac{\text{ch } \delta_2 + 2 - B}{\text{sh } \delta_2 (\text{ch } \delta_2 - \text{ch } \delta_1)} e^{-\delta_2 |r|} \right] e^{i\omega t},$$

$$\varphi_r(t) = \frac{6\mu P}{a} \frac{H_r}{\text{ch } \delta_1 - \text{ch } \delta_2} (e^{-\delta_1 |r|} - e^{-\delta_2 |r|}) e^{i\omega t},$$

gdzie

$$H_r = \begin{cases} 1, & r > 0, \\ 0, & r = 0, \\ -1, & r < 0. \end{cases}$$

Jeżeli $0 \leq z_j \leq 2$ ($-1 \leq \text{ch } \delta_j \leq +1$, δ_j jest liczbą urojoną), to drgania mają charakter fali bieżącej [5]. Częstotści kołowe drgań ω odpowiadające wartościom pierwiastków $z=0$ lub $z=2$ ($\sin i\delta=0$) są częstotściami krytycznymi, którym towarzyszy zjawisko rezonansu rozpatrywanego układu ($w_r \rightarrow \infty$).

Drgania belki mają charakter fali eksponencjalnej przemiennej przy częstotści drgań wymuszenia, dla których pierwiastek równania (3.4) $z_j > 2$. We wzorach (3.6) i (3.8) należy wówczas podstawić na miejsce $\text{ch } \delta_j$ ($-\text{ch } \gamma_j$), a w miejsce $\text{sh } \delta_j$ ($-\text{sh } \gamma_j$), przy czym

$$(3.10) \quad \gamma_j = \text{arch}(z_j - 1).$$

Postać drgań opisują równania (3.5), gdzie w tym przypadku należy przyjąć składnik sumy odpowiadający pierwiastkowi $z_j > 2$ w następującej postaci:

$$(3.11) \quad \bar{w}_{r,j}^0 = \bar{C}_j (-1)^r e^{-\gamma_j r}, \quad w_{r,j}^0 = C_j (-1)^r e^{\gamma_j r},$$

$$\bar{\Phi}_{r,j}^0 = \bar{C}'_j (-1)^r e^{-\gamma_j r}, \quad \Phi_{r,j}^0 = C'_j (-1)^r e^{\gamma_j r}.$$

Jeżeli z_j będzie liczbą zespoloną (z_1, z_2 są liczbami sprzężonymi, to aktualne są wzory (3.9), gdzie δ_1 i δ_2 są również liczbami sprzężonymi.

Oddzielnej analizy wymaga przypadek, gdy $z_1 = z_2$ ($\delta_1 = \delta_2 = \delta$). Wówczas rozwiązanie przyjmuje postać

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \bar{w}_r^0 &= \bar{C}_1 e^{-\delta r} - \bar{C}_2 r e^{-\delta r}, & \bar{\Phi}_r^0 &= \bar{C}'_1 e^{-\delta r} - \bar{C}'_2 r e^{-\delta r} \quad \text{dla } r > 0, \\ w_r^0 &= C_1 e^{\delta r} + C_2 r e^{\delta r}, & \Phi_r^0 &= C'_1 e^{\delta r} + C'_2 r e^{\delta r} \quad \text{dla } r < 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 = C_1 &= \frac{2\mu P}{b} \frac{3\text{ch } \delta - b \text{sh } \delta}{\text{sh}^2 \delta}, & b &= \frac{3\text{sh } \delta}{\text{ch } \delta + 2 - B}, \\ \bar{C}_2 = C_2 &= -\frac{6\mu P}{b \text{sh } \delta}, & \bar{C}'_1 = C'_1 &= 0, & \bar{C}'_2 &= -C'_2 = \frac{6\mu P}{\text{sh } \delta}. \end{aligned}$$

3.2. Niesymetryczna postać drgań

Niech na belkę działa moment $\mathfrak{M}_r(t) = \mathfrak{M} \delta_{r,0} e^{i\omega t}$. Rozwiązań równania (3.2) szukać będziemy również w postaci (3.5). Warunki ciągłości przemieszczeń i równowagi momentów w punkcie $r=0$ przyjmują postać

$$(3.13) \quad \bar{w}_0 = w_0 = 0, \quad \bar{\Phi}_0 = \Phi_0, \quad M_0 - \bar{M}_0 + \mathfrak{M} = 0.$$

Podstawiając (3.5) i (3.6) do (3.13) otrzymuje się następujące wzory na wartości stałych C :

a) $\delta_1 \neq \delta_2$; $z_j \leq 2$ lub z_j są zespolone ($j=1, 2$),

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \bar{C}_1 = -C_1 &= -\bar{C}_2 = C_2 = \frac{2\mu \mathfrak{M}}{a} \frac{(\text{ch } \delta_1 + 2 - B)(\text{ch } \delta_2 + 2 - B)}{(1 - B)(3 - B)(\text{ch } \delta_2 - \text{ch } \delta_1)}, \\ \bar{C}'_1 = C'_1 &= -\frac{6\mu \mathfrak{M}}{a} \frac{\text{sh } \delta_1 (\text{ch } \delta_2 + 2 - B)}{(1 - B)(3 - B)(\text{ch } \delta_2 - \text{ch } \delta_1)}, \\ \bar{C}'_2 = C'_2 &= \frac{6\mu \mathfrak{M}}{a} \frac{\text{sh } \delta_2 (\text{ch } \delta_1 + 2 - B)}{(1 - B)(3 - B)(\text{ch } \delta_2 - \text{ch } \delta_1)}. \end{aligned}$$

Dla $z_j > 2$ funkcja γ_j ma postać (3.10); należy ją podstawić do (3.14) i do rozwiązania o postaci zgodnej z (3.11):

b) $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ [por. (3.12)],

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \bar{C}_1 = C_1 &= 0, & \bar{C}_2 &= -C_2 = -\frac{2\mu \mathfrak{M}}{a} \frac{(\text{ch } \delta + 2 - B)^2}{(1 - B)(3 - B) \text{sh } \delta}, \\ \bar{C}'_1 = C'_1 &= \frac{6\mu \mathfrak{M}}{a} \frac{1 + (2 - B) \text{ch } \delta}{(1 - B)(3 - B) \text{sh } \delta}, \\ \bar{C}'_2 = C'_2 &= \frac{6\mu \mathfrak{M}}{a} \frac{(\text{ch } \delta + 2 - B)}{(1 - B)(3 - B)}. \end{aligned}$$

Zjawisko rezonansu ($w_r \rightarrow \infty$, $\varphi_r \rightarrow \infty$) wystąpi w przypadku, gdy częstość drgań osiągnie wartości, dla których $B=1$ lub $B=3$.

3.3. Analiza postaci drgań

Analizę postaci ustalonych drgań, wymuszonych obciążeniem harmonicznym w czasie najłatwiej można przeprowadzić przez badanie pierwiastków równania dyspersyjnego (3.4). Równanie to ma dwa pierwiastki, co świadczy o tym, że w procesie drgań belki generowane są jednocześnie dwie fale poprzeczne. W widmie częstości drgań ω można wyróżnić pasma przenoszenia, to znaczy widmo częstości, dla których generowane drgania będą miały charakter fali bieżącej. Odpowiada to przypadkowi, gdy przynajmniej jeden z pierwiastków równania (3.4) spełnia nierówność $0 \leq z_j \leq 2$ [5]. W przypadku uwzględnienia w procesie drgań momentów bezwładności obrotowej mas węzłów układu dyskretnego ($I_0 \neq 0$, $\eta \neq 0$) pojawiają się dwa różne pasma przenoszenia. W tabelicy 4 zestawiono wartości α^2 odpowiadające częstościom progowym drgań (częstości progowe są wartościami granicznymi pasm przenoszenia I i II: α_d^2 oznacza granicę dolną, α_g^2 granicę górną) dla różnych wartości η . Obliczenia przeprowadzono dla $K_w=1,0$ i $K_\phi=0,5$ ($\alpha^2 = = ma^3 \omega^2 / 24EI$, $\eta = 6I_0 / ma^2$). Wykres funkcji $\alpha^2 = f(\eta)$ obrazującej wpływ udziału momentów bezwładności obrotowej mas węzłów na częstości drgań pasm przenoszenia (α^2 oznaczają wartości $\alpha^2(\omega)$ odpowiadające pasmom przenoszenia) przedstawiono na rys. 3.

Tabela 4. Wartości graniczne pasm przenoszenia

$\alpha_p^2 \backslash \eta$		0	0,2	0,5	0,8	1,0	1,3	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
		I	α_d^2	1,0	1,0	1,0	0,98	0,95	0,88	0,82	0,68	0,57	0,48
α_g^2	3,0		3,0	3,0	1,88	1,5	1,15	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,88
II	α_d^2	—	7,5	3,0	3,0	3,0	2,69	2,33	1,75	1,4	1,17	1,0	1,0
	α_g^2	—	17,5	7,0	4,38	3,55	3,07	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0

Drgania o częstościach ω spoza pasm przenoszenia generują w układzie fale ekspanencyjne lub ekponencyjne przemienne. Częstościom krytycznym ($z_j=0$ lub $z_j=2$) towarzyszy zjawisko rezonansu, bądź drgania o charakterze pewnego typu fali stojącej (przy niesymetrycznej postaci drgań, gdy $A=0$ lub $A=2$), w czasie których $|w_r(t)| = \text{const}$ i $\phi_r=0$ (drgania nie zanikają w nieskończoności). Poniżej zestawiono warunki konieczne i dostateczne (w układzie zbiorów parametrów A i B), które muszą być spełnione, aby w układzie powstała fala określonego typu:

- 1) częstości krytyczne ($z_j=0$ lub $z_j=2$):

$$A=0, \quad A=2, \quad B=1, \quad B=3.$$

- 2) fala bieżąca pojedyncza ($0 \leq z_j \leq 2$):

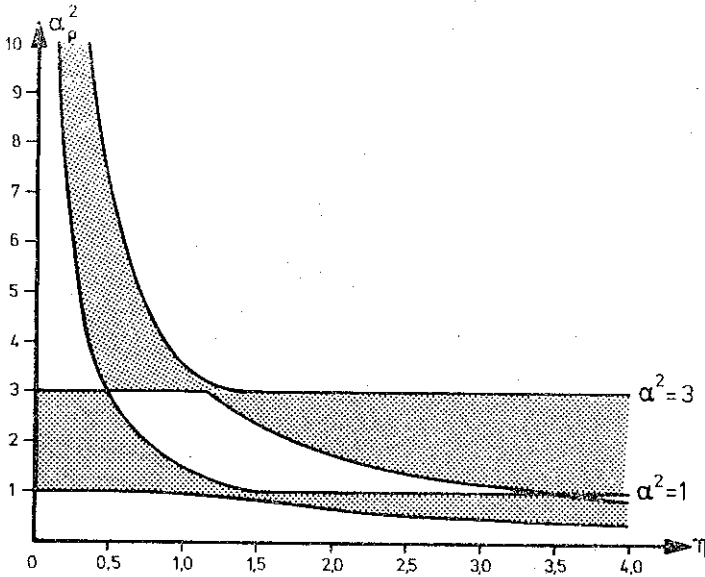
$$0 \leq A \leq 2 \cap B \geq 3, \quad 0 \leq A \leq 2 \cap B \leq 1,$$

$$A \geq 2 \cap 1 \leq B \leq 3, \quad A \leq 0 \cap 1 \leq B \leq 3,$$

3) fala bieżąca podwójna ($0 \leq z_1 \leq 2$ i $0 \leq z_2 \leq 2$):

$$-1 \leq A \leq 0 \cap 0 \leq B \leq 1 \cap B \geq 2A + \sqrt{3A(A-2)},$$

$$2 \leq A \leq 3 \cap 3 \leq B \leq 4 \cap B \leq 2A - \sqrt{3A(A-2)};$$



Rys. 3

4) fala eksponencjalna

a) $z_j < 0$:

$$A > 0 \cap B < 3, \quad A > 3 \cap 3 < B \leq 2A - \sqrt{3A(A-2)},$$

$$A < 0 \cap B > 3, \quad A < 0 \cap B < 0 \cap B \leq 2A - \sqrt{3A(A-2)},$$

b) z_1, z_2 są zespolone:

$$A > 2 \cap B > 3 \cap 2A - \sqrt{3A(A-2)} < B < 2A + \sqrt{3A(A-2)},$$

$$A < 0 \cap B < 1 \cap 2A - \sqrt{3A(A-2)} < B < 2A + \sqrt{3A(A-2)}.$$

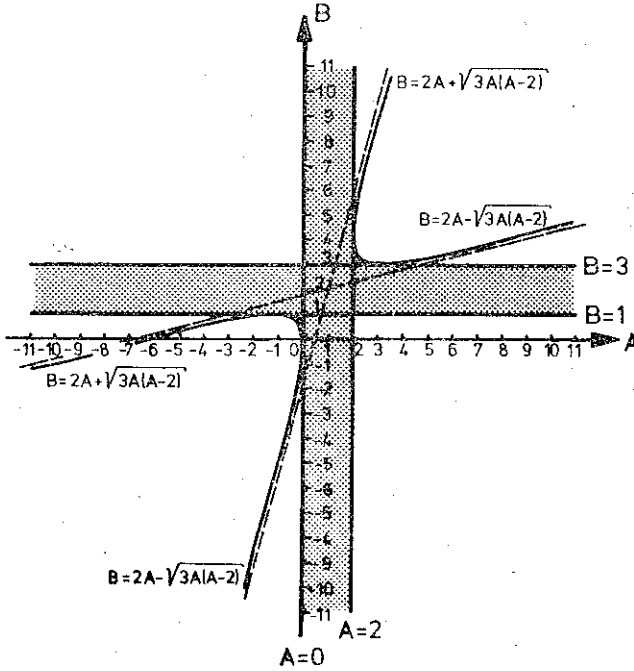
5) fala eksponencjalna przemienna ($z_j > 2$):

$$A > 2 \cap B < 1, \quad A > 2 \cap B > 4 \cap B \geq 2A + \sqrt{3A(A-2)},$$

$$A < 2 \cap B > 1, \quad A < -1 \cap 2A + \sqrt{3A(A-2)} \leq B < 1.$$

Granice obszarów występowania drgań o charakterze różnych typów fal w układzie zmiennych A i B przedstawiono na rys. 4.

W przypadku działania na belkę dowolnego obciążenia harmonicznym zmiennym w czasie, rozwiązanie problemu drgań znajduje się z superpozycji rozwiązań szczegółowych przedstawionych w p. 3.1 i 3.2. Rozwiązania dla belki półnieskończonej otrzymuje się superponując skutki działania danego obciążenia i obciążenia kompensacyjnego wyznaczanego analogicznie jak w zadaniu statycznym (por. p. 2.2).



Rys. 4

4. SKRĘCANIE BELKI

Niech na nieskończenie długi pręt o sprężystości utwierdzonych węzłach (9) działają skręcające momenty skupione \mathfrak{M}_r (rys. 5). Wykorzystując wzory transformacyjne metody przemieszczeń (na rys. 6 zaznaczono momenty o dodatnich zwrotach)

$$(4.1) \quad T_r = \frac{GI_s}{a} (E_r^{-1} - 1) \psi_r, \quad \bar{T}_r = \frac{GI_s}{a} (1 - E_r) \psi_r,$$

otrzymuje się następujące równanie różnicowe równowagi statycznej węzła r :

$$(4.2) \quad (E_r + E_r^{-1} - 2) \psi_r - 2K_\psi \psi_r + \frac{a}{GI_s} \mathfrak{M}_r = 0,$$

gdzie GI_s oznacza sztywność pręta na skręcanie oraz

$$K_\psi = \frac{a\vartheta}{2GI_s},$$

ϑ oznacza współczynnik podatności obrotowej na skręcanie sprężystego utwierdzenia węzła, ψ_r kąt skręcania węzła r .

Równanie (4.2) rozwiążemy stosując dyskretną transformację Fouriera. Przyjmując w (4.2) wzory zgodne z (2.3) otrzymuje się

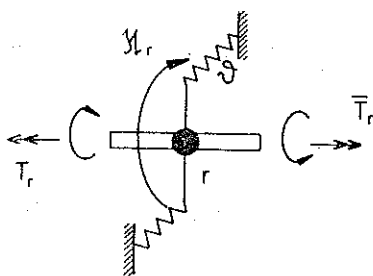
$$(4.3) \quad \psi_r = \frac{a}{4\pi GI_s} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{\mathfrak{M}}(\alpha)}{1 - \cos \alpha + K_\psi} e^{-ir\alpha} d\alpha.$$

Jeżeli na belkę działa obciążenie w postaci pojedynczego momentu skręcającego $\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}\delta_{r,p}$, to kąty skręcania węzłów ψ_r określone są wzorem

$$(4.4) \quad \psi_r = \frac{a\mathfrak{M}}{2\pi GI_s} \int_0^\pi \frac{\cos(r-p)\alpha}{1 - \cos \alpha + K_\psi} d\alpha.$$



Rys. 5



Rys. 6

Rozwiązanie dla belki półnieskończonej otrzymuje się z rozwiązania dla belki nieskończonej, obciążonej dodatkowo momentem skręcającym \mathfrak{M}_0 o wartości tak dobranej, aby spełniony został żądany warunek brzegowy:

- 1) $\psi_0 = 0$ dla belki sztywno utwierdzonej,
- 2) $T_0 = 0$ dla belki o końcu $r=0$ swobodnym.

5. DRGANIA SKRĘTNE BELKI

Niech rozważana belka wykonuje ustalone, nietlumione skrętne drgania harmoniczne. Równanie amplitud ma postać ($\psi_r(t) = \psi_r^0 e^{i\omega t}$):

$$(5.1) \quad (E_r + E_r^{-1} - 2)\psi_r^0 + 2\left(\frac{I_{0s} a \omega^2}{2GI_s} - K_\psi\right)\psi_r^0 = 0,$$

gdzie I_{0s} oznacza moment skrętnej bezwładności obrotowej każdego węzła, ω częstotaść kołową drgań.

Rozwiązań równania (5.1) szukamy w postaci

$$(5.2) \quad \psi_r^0 = C e^{er}.$$

Podstawiając (5.2) do (5.1) otrzymuje się równanie charakterystyczne:

$$(5.3) \quad \text{ch } \varepsilon = 1 - (\beta^2 - K_\psi), \quad \beta^2 = \frac{I_{0s} a \omega^2}{2GI_s}.$$

Postać drgań określa się ze wzorów

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \bar{\psi}_r(t) &= \bar{C} \exp(-\varepsilon r + i\omega t) \quad \text{dla } r > 0, \\ \psi_r(t) &= C \exp(\varepsilon r + i\omega t) \quad \text{dla } r < 0. \end{aligned}$$

W zależności od wartości częstości drgań wymuszenia ω drgania przyjmują postać: 1) fali bieżącej, dla $K_\psi \leq \beta^2 \leq K_\psi + 2$, (ε -urojone); 2) fali eksponencjalnej, dla $\beta^2 < K_\psi$; 3) fali eksponencjalnej przemiennej dla $\beta^2 > K_\psi + 2$ [wówczas rozwiązanie amplitud ma postać $\psi_r^0 = C(-1)^r e^{\nu r}$, gdzie $\nu = \text{arch}(\beta^2 - K_\psi - 1)$].

Jeżeli obciążenie belki stanowi pojedynczy moment skręcający $\mathfrak{M}_r(t) = \mathfrak{M} \delta_{r,0} e^{i\omega t}$, to po wyznaczeniu stałych \bar{C} i C z warunku ciągłości przemieszczeń i równowagi węzła $r=0$, rozwiązania problemu drgań na podstawie (5.4) uzyskują postać:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \bar{\psi}_r(t) = \psi_r(t) &= \frac{a\mathfrak{M}}{2GI_s} \frac{1}{\text{sh } \varepsilon} \exp(-\varepsilon|r| + i\omega t), \quad \text{dla } \beta^2 \leq K_\psi + 2, \\ \bar{\psi}_r(t) = \psi_r(t) &= -\frac{a\mathfrak{M}}{2GI_s} \frac{(-1)^r}{\text{sh } \nu} \exp(-\nu|r| + i\omega t), \quad \text{dla } \beta^2 > K_\psi + 2. \end{aligned}$$

Rozwiązanie zadania statycznego otrzymuje się podstawiając do wzoru (5.5)₁ $\omega = 0$.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. I. BABUŠKA, *Note of the theory of the rail*, Arch. Mech., **12**, 3, 305-312, 1960.
2. I. BABUŠKA, *the Fourier transform in the theory of difference equations and its applications*, Arch. Mech., **11**, 4, 349-381, 1959.
3. Ю. И. Бобровницкий, В. П. Маслов, *Распространение изгибных волн по стержню с периодической сосредоточенной нагрузкой*, Акус. Ж., **12**, 2, 167-172, 1966.
4. Л. Бриллионн, М. Пароди, *Распространение волн в периодических структурах*, И. Лит., Москва 1959.
5. F. C. CRAWFORD, *Fale*, PWN, Warszawa 1972.
6. W. GUTKOWSKI, *Regularne konstrukcje prętowe*, PWN, Warszawa 1973.
7. M. HECKL, *Investigations on the vibrations of grillages and other simple beam structures*, J. Acoust. Soc. Am., **36**, 7, 1335-1343, 1964.
8. M. J. LIGHTHILL, *Wstęp do analizy Fouriera i teorii dystrybucji*, PWN, Warszawa 1963.
9. D. J. MEAD, *Free wave propagation in periodically supported, infinite beams*, J. Sound and Vibr., **11**, 2, 181-197, 1970.
10. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, t. II, Arkady, Warszawa 1960.

11. J. RAKOWSKI, *Drgania harmoniczne nieskończenie długiej belki na dyskretnym podłożu sprężystym*, VII Sympozjum PTMTS, Drgania w układach fizycznych, Błażejewko—Poznań, maj 1976.
12. R. ŚWITKA, *Aproksymowana półprzestrzeń sprężysta jako model podłoża sprężystego*, Pol. Pozn., Rozprawy, 31, Poznań 1968.
13. R. ŚWITKA, *Drgania i funkcje własne regularnych układów dyskretnych*, Prace Pozn. Tow. Przyj. Nauk, 2, Warszawa—Poznań 1973.
14. R. ŚWITKA, *Wybrane zagadnienia drgań belki nieskończenie długiej na podłożu sprężystym*, Prace Pozn. Tow. Przyj. Nauk, 2, 1, Warszawa—Poznań 1972.

Резюме

СТАТИКА И ДИНАМИКА БЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКИ НА ДИСКРЕТНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Решена проблема изгиба, скручивания, а также поперечных и скручивающих колебаний бесконечной балки, узлы которой опираются на линейных и вращательных упругих опорах дискретного винклеровского и двухпараметрического оснований. Для расчетов принята дискретная модель системы и применен метод разностных уравнений, которые решены, используя дискретное преобразование Фурье. Результаты, определяющие перемещения узлов и внутренние силы, получены в замкнутом виде для произвольного нагружения балки. Приведены также для полубесконечных балок для разных граничных условий. В анализе установившихся поперечных колебаний балки учтено влияние моментов вращательной инерции масс узлов, принимая, что каждый из узлов имеет 2 степени динамической свободы. В описании колебаний использован волновой подход к явлению, определяя интервалы частот колебаний для разных типов распространения возмущений. Решение проблемы гармонических вынужденных (поперечных и скручивающих) колебаний сформулировано также в аналитическом виде.

SUMMARY

STATICS AND DYNAMICS OF AN INFINITE BEAM RESTING ON A DISCRETE ELASTIC FOUNDATION

The problem is solved of bending, torsion, transversal and torsional vibrations of an infinite beam, the nodes of which rest on linear and rotational spring supports of a Winkler and two-parameter type discrete elastic foundations. The discrete model of the system is solved by means of the finite difference and equations discrete Fourier analysis. Displacements of the nodes and internal forces are expressed in closed forms for arbitrary loading. The solutions concerning semi-infinite beams under various boundary conditions are also given. In the analysis of stationary vibrations of the beam the effects of rotary inertia of the nodes are taken into account, each of the nodes being assumed to possess two dynamic degrees of freedom. The wave character of the phenomenon is used to describe the vibrations and to calculate the fields of the vibration frequencies for various types of disturbance propagation. Solution of the harmonic forced vibration (transversal and torsional) is also formulated in an analytical form.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 września 1980 r.