

## WYBOCZENIE TRÓJWARSTWOWEJ POWŁOKI STOŻKOWEJ POZA ZAKRESEM SPRĘŻYSTYM PRZY OBCIĄŻENIU ZŁOŻONYM<sup>(1)</sup>

JERZY ZIELNICA (POZNAŃ)

Praca zawiera rozwiązanie zagadnienia utraty stateczności w obszarze sprężysto-plastycznym trójwarstwowej sandwiczowej powłoki stożkowej. Zakłada się, że w chwili wybooczenia warstwy nośne powłoki są sprężyste lub uplastycznione, podczas gdy rdzeń pozostaje sprężysty. Równania wyprowadzono przy założeniach zarówno deformacyjnej teorii plastyczności jak i teorii plastycznego płynięcia (przyrostowej). Uwzględniono sztywność zginania warstw nośnych. Podstawowy układ równań rozwiązano za pomocą metody ortogonalizacyjnej, uwzględniając koncepcję Shanley'a wzrastającego obciążenia.

Otrzymane rozwiązania pozwalają wyznaczyć obciążenie krytyczne dla powłoki znajdującej się w stanie sprężystym, sprężysto-plastycznym lub plastycznym. Wyniki obliczeń zilustrowano wykresami.

### WSTĘP

Problemom sprężysto plastycznej utraty stateczności powłok trójwarstwowych poświęcono dotychczas niewielką liczbę prac. Wzrost zainteresowania tego typu konstrukcjami, jaki notuje się szczególnie w ostatnich latach, jest spowodowany głównie korzyściami, takimi jak lekkość, przenoszenie stosunkowo dużych obciążeń, możliwości termoizolacji, itp. Dla spełnienia tych wymagań konstruktorowi obecnie nie wystarcza już analiza w zakresie sprężystym: istotna staje się znajomość faz przejścia od pojawienia się pierwszych odkształceń plastycznych do chwili całkowitego wyczerpania nośności. Celem niniejszej pracy jest przeanalizowanie zagadnienia stateczności powłoki stożkowej przy dość ogólnych założeniach, dotyczących zarówno obciążenia jak i parametrów materiałowych i geometrycznych.

Z prac dotychczasowych, tematycznie związanych z niniejszą, należy wymienić prace nad statecznością powłoki walcowej [1, 2, 5 i 7], gdzie autorzy przyjmowali do analizy związki fizyczne teorii odkształceniowej. E. I. GRIGOLUK [3 i 4] wypro-wadził związki dla analizy stateczności powłok mało wyniosłych; pojawiają się jednak trudności przy ich całkowaniu, gdy w powłoce w stanie dokrytycznym panuje niejednorodny (jak np. w powłoce stożkowej) stan naprężeń. Z prac krajowych należy wymienić pracę Z. WASZCZYŻYNA [11]; autor w pełni przeanalizował problem stateczności płyty trójwarstwowej poza zakresem sprężystym według

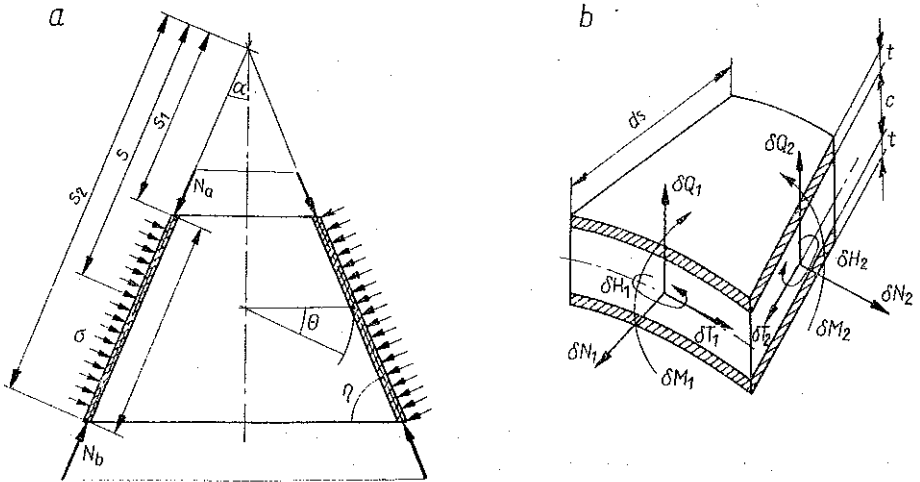
<sup>(1)</sup> Podstawowe tezy pracy zostały przedstawione na III-cim Krajowym Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Łódź, 26-27.X.1979

obydwu podstawowych koncepcji i przyjętych teorii plastyczności, przedstawił porównanie wyników uzyskanych dla różnych wariantów analizy zagadnienia.

W pracy niniejszej przyjmujemy następujące założenia podstawowe: 1) obowiązuje liniowa teoria powłok cienkich; 2) warstwy nośne wykonane są z materiału izotropowego, ściśliwego ze wzmocnieniem i posiadają jednakową grubość; 3) uwzględnia się sztywność na zginanie warstw nośnych i poprawne są dla nich hipotezy Kirchhoffa-Lova'a; 4) warstwa wypełniająca nie uplastycznia się i przenosi wyłącznie ścinanie poprzeczne.

## 2. PODSTAWOWE RÓWNANIA

Rozważmy swobodnie podpartą trójwarstwową powłokę w kształcie stożka ściętego, obciążoną równomiernie rozłożonym obciążeniem poprzecznym i siłą normalną  $N$  skierowaną wzdłuż tworzącej. Na rys. 1 pokazano rozkład sił i momen-



Rys. 1

tów działających na element powłoki, powstających w wyniku utraty stateczności. Zgodnie z przyjętymi założeniami wielkości te są następujące:

$$(2.1) \quad \delta N_{\alpha\beta} = \delta N_{\alpha\beta}^+ + \delta N_{\alpha\beta}^-, \quad \delta M_{\alpha\beta} = \delta M_{\alpha\beta}^+ + \delta M_{\alpha\beta}^-,$$

gdzie znakami „+” i „-” oznaczono wielkości dotyczące odpowiednio zewnętrznej i wewnętrznej warstwy nośnej, wyrażające się następującymi wzorami:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \delta N_{\alpha\beta}^+ &= \int_{\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c+t} \delta \sigma_{\alpha\beta} dx_3, & \delta N_{\alpha\beta}^- &= \int_{-\frac{1}{2}c-t}^{-\frac{1}{2}c} \delta \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \\ \delta M_{\alpha\beta}^+ &= \int_{\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c+t} \delta \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3, & \delta M_{\alpha\beta}^- &= \int_{-\frac{1}{2}c-t}^{-\frac{1}{2}c} \delta \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3. \end{aligned}$$

Przyjmując założenie, że wariacja przemieszczeń wzdłuż grubości powłoki we warstwie wypełniającej jest liniowa, jak i stosowność hipotez Kirchhoffa-Love'a dla warstw nośnych, uzyskamy następujące wzory na przemieszczeniu  $u$  i  $v$  wywołane utratą stateczności odpowiednio w kierunkach wzdłużnym i obwodowym, na powierzchni odległej o  $x_3$  od powierzchni podstawowej całej powłoki:

a) warstwa nośna zewnętrzna  $\left(\frac{1}{2}c \leq x_3 \leq \frac{1}{2}c+t\right)$

$$(2.3) \quad u = u^+ + \left(x_3 - \frac{c+t}{2}\right) \frac{\partial w}{\partial s}, \quad v = v^+ + \left(x_3 - \frac{c+t}{2}\right) \frac{1}{s \cos \eta} \frac{\partial w}{\partial \theta};$$

b) warstwa wypełniająca  $\left(-\frac{1}{2}c \leq x_3 \leq \frac{1}{2}c\right)$

$$(2.4) \quad u = \frac{1}{2} \left[ (u^+ + u^-) + 2 \frac{x_3}{c} \left( u^+ - u^- - t \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right],$$

$$v = \frac{1}{2} \left[ (v^+ + v^-) + 2 \frac{x_3}{c} \left( v^+ - v^- - \frac{t}{s \cos \eta} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right];$$

c) warstwa nośna dolna  $\left(-\frac{1}{2}c-t \leq x_3 \leq -\frac{1}{2}c\right)$

$$(2.5) \quad u = u^- + \left(x_3 + \frac{c+t}{2}\right) \frac{\partial w}{\partial s}, \quad v = v^- + \left(x_3 + \frac{c+t}{2}\right) \frac{1}{s \cos \eta} \frac{\partial w}{\partial \theta}.$$

We wzorach tych  $u^+$  i  $v^+$ ,  $u^-$  i  $v^-$  są przemieszczeniami odpowiednio górnej i dolnej warstwy nośnej.

Wariacje odkształceń w powłoce określimy następująco:

a) warstwy nośne

$$(2.6) \quad \delta \varepsilon_s = \frac{\partial u^\pm}{\partial s} + \left(x_3 \mp \frac{c+t}{2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2},$$

$$\delta \varepsilon_\theta^\pm = \frac{1}{s \cos \eta} \frac{\partial v^\pm}{\partial \theta} - \frac{w}{s} \operatorname{tg} \eta + \left(x_3 \mp \frac{c+t}{2}\right) \left( \frac{1}{s^2 \cos^2 \eta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \right),$$

$$\delta \gamma_{s\theta}^\pm = \frac{1}{s \cos \eta} \frac{\partial u^\pm}{\partial \theta} + \frac{\partial v^\pm}{\partial s} + 2 \left(x_3 \mp \frac{c+t}{2}\right) \left( \frac{1}{s \cos \eta} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \frac{1}{s^2 \cos \eta} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right);$$

b) warstwa wypełniająca

$$(2.7) \quad \delta \gamma_{sz} = \frac{2}{c} \left( u_\beta - \frac{c+t}{2} \frac{\partial w}{\partial s} \right), \quad u_\beta = \frac{u^+ - u^-}{2},$$

$$\delta \gamma_{\theta z} = \frac{2}{c} \left( v_\beta - \frac{c+t}{2} \frac{1}{s \cos \eta} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad v_\beta = \frac{v^+ - v^-}{2}.$$

Wariacje naprężeń w warstwach nośnych wyrażone są za pomocą odkształceń:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \delta\sigma_s &= \frac{1}{t} (b_{11} \delta\varepsilon_s + b_{12} \delta\varepsilon_\theta - b_{13} \delta\gamma_{s\theta}), \\ \delta\sigma_\theta &= \frac{1}{t} (b_{21} \delta\varepsilon_s + b_{22} \delta\varepsilon_\theta - b_{23} \delta\gamma_{s\theta}), \\ \delta\tau_{s\theta} &= \frac{1}{t} (-b_{31} \delta\varepsilon_s - b_{32} \delta\varepsilon_\theta + b_{33} \delta\gamma_{s\theta}). \end{aligned}$$

Współczynniki  $b_{ij}$  odpowiadające elementom macierzy sztywności, określone rodzajem stanu naprężeń we warstwach nośnych przed utratą stateczności, mechanicznymi własnościami materiału i stosowaną teorią plastyczności, zostały podane w pracach [13 i 14].

Warstwa wypełniająca, zgodnie z przyjętymi założeniami, przenosi wyłącznie siły ścinające, stąd

$$(2.9) \quad \delta\tau_{sz} = G_3 \delta\gamma_{sz}, \quad \delta\tau_{\theta z} = G_3 \delta\gamma_{\theta z},$$

gdzie  $G_3$  jest modułem odkształcenia postaciowego materiału warstwy wypełniającej. Zależności (2.2) do (2.8) umożliwiają wyznaczenie sił i momentów wewnętrznych. Zgodnie z (2.1) i (2.2) mamy

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \delta N_1 &= 2b_{11} \frac{\partial U}{\partial s} + 2b_{12} \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial V}{\partial \theta} - 2b_{13} \left( \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial s} \right) - \frac{2b_{12}}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{w}{s}, \\ \delta N_2 &= 2b_{21} \frac{\partial U}{\partial s} + b_{22} \frac{2}{s \sin \alpha} \frac{\partial V}{\partial \theta} - 2b_{23} \left( \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial s} \right) - \frac{2b_{22}}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{w}{s}, \\ \delta T &= -2b_{31} \frac{\partial U}{\partial s} - b_{32} \frac{2}{s \sin \alpha} \frac{\partial V}{\partial \theta} + 2b_{33} \left( \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial s} \right) + 2b_{32} \frac{w}{s \operatorname{tg} \alpha}, \\ \delta M_1 &= -\frac{(c+t)^2}{2} \left[ b_{11} \frac{\partial \alpha_u}{\partial s} + b_{12} \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial \beta_v}{\partial \theta} - b_{13} \left( \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial \alpha_u}{\partial \theta} + \frac{\partial \beta_v}{\partial s} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{t^2}{6} \left[ b_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + b_{12} \left( \frac{1}{s^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2b_{23} \left( \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s^2 \operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right], \\ \delta M_2 &= -\frac{(c+t)^2}{2} \left[ b_{21} \frac{\partial \alpha_u}{\partial s} + b_{22} \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial \beta_v}{\partial \theta} - b_{23} \left( \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial \alpha_u}{\partial \theta} + \frac{\partial \beta_v}{\partial s} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{t^2}{6} \left[ b_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + b_{22} \left( \frac{1}{s^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2b_{23} \left( \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s^2 \operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right], \end{aligned}$$

$$(2.10) \quad \delta H = -\frac{(c+t)^2}{2} \left[ -b_{31} \frac{\partial \alpha_u}{\partial s} - b_{32} \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial \beta_v}{\partial \theta} + b_{33} \left( \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial \alpha_u}{\partial \theta} + \frac{\partial \beta_v}{\partial s} \right) \right] + \frac{t^2}{6} \left[ b_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + b_{32} \left( \frac{1}{s^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \right) - 2b_{33} \left( \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s^2 \operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right],$$

gdzie

$$(2.11) \quad U = \frac{1}{2} (u^+ + u^-), \quad V = \frac{1}{2} (v^+ + v^-),$$

$$\alpha_u = \frac{1}{c+t} (u^+ - u^-), \quad \beta_v = \frac{1}{c+t} (v^+ - v^-).$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(2.12) \quad \delta m_1^* = (\delta N_1^+ - \delta N_1^-) \frac{c+t}{2},$$

$$\delta m_2^* = (\delta N_2^+ - \delta N_2^-) \frac{c+t}{2},$$

$$\delta m_{12}^* = (\delta T^+ - \delta T^-) \frac{c+t}{2},$$

otrzymamy

$$(2.13) \quad \delta m_1^* = \frac{(c+t)^2}{2} \left[ b_{11} \frac{\partial \alpha_u}{\partial s} + b_{12} \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial \beta_v}{\partial \theta} - b_{13} \left( \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial \alpha_u}{\partial \theta} + \frac{\partial \beta_v}{\partial s} \right) \right],$$

$$\delta m_2^* = \frac{(c+t)^2}{2} \left[ b_{21} \frac{\partial \alpha_u}{\partial s} + b_{22} \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial \beta_v}{\partial \theta} - b_{23} \left( \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial \alpha_u}{\partial \theta} + \frac{\partial \beta_v}{\partial s} \right) \right],$$

$$\delta m_{12}^* = \frac{(c+t)^2}{2} \left[ -b_{31} \frac{\partial \alpha_u}{\partial s} - b_{32} \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial \beta_v}{\partial \theta} + b_{33} \left( \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial \alpha_u}{\partial \theta} + \frac{\partial \beta_v}{\partial s} \right) \right].$$

Naprężenia ścinające w warstwie wypełniającej są następujące:

$$(2.14) \quad \delta \tau_{sz} = \frac{c+t}{c} G_3 \left( \alpha_u - \frac{\partial w}{\partial s} \right),$$

$$\delta \tau_{\theta z} = \frac{c+t}{c} G_3 \left( \beta_v - \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right).$$

### 3. RÓWNANIA RÓWNOWAGI I NIEROZDZIELNOŚCI ODKSZTAŁCEŃ

Równania równowagi trójwarstwowej powłoki stożkowej mają postać

$$(3.1) \quad \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \delta N_1) + \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta T) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad [cd.] \quad & \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \delta T) + \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta N_2) = 0, \\
 & \frac{1}{s} \delta m_1^* + \frac{\partial}{\partial s} (\delta m_1^*) - \frac{1}{s} \delta m_1^* + \frac{1}{s \cos \eta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta m_{12}^*) - \\
 & \quad - \frac{(c+t)^2}{c} G_3 \left( \alpha_u - \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0 \\
 & \frac{2}{s} \delta m_{12}^* + \frac{\partial}{\partial s} (\delta m_{12}^*) + \frac{1}{s \cos \eta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta m_2^*) + \\
 & \quad - \frac{(c+t)^2}{c} G_3 \left( \beta_v - \frac{1}{s \cos \eta} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = 0, \\
 & \delta N_2 \sin \eta + 2 \cos \eta \frac{\partial \delta M_1}{\partial s} + s \cos \eta \frac{\partial^2 \delta M_1}{\partial s^2} - \cos \eta \frac{\partial \delta M_2}{\partial s} + \\
 & \quad + \frac{1}{s \cos \eta} \frac{\partial^2 \delta M_2}{\partial \theta^2} + \frac{2}{s} \frac{\partial \delta H}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial^2 \delta H}{\partial s \partial \theta} + s \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} N_{10} \cos \eta + \\
 & \quad + \left( \frac{1}{s \cos \eta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial s} \cos \eta \right) N_{20} + 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) T_{10} + \\
 & \quad + \frac{c+t}{c} \left( \cos \eta \delta Q_{sz} + s \cos \eta \frac{\partial \delta Q_{sz}}{\partial s} + \frac{\partial \delta Q_{sz}}{\partial \theta} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad N_{10} &= 2t\sigma_s = \frac{\sigma}{2 \operatorname{tg} \eta} \left( \frac{s_1^2}{s} - s \right) - N_a \frac{s_1}{s} = -\frac{\sigma s}{2 \operatorname{tg} \eta} f_s, \\
 N_{20} &= 2t\sigma_\theta = -\frac{\sigma s}{\operatorname{tg} \eta}, \quad T_{10} = 0, \quad \sigma_i = \frac{\sigma s}{4t \operatorname{tg} \eta} \sqrt{\Omega},
 \end{aligned}$$

są siłami błonowego przedkrytycznego stanu naprężeń w powłoce dla przyjętego obciążenia zewnętrznego. Tutaj mamy

$$\Omega = f_s (f_s - 2) + 4, \quad f_s = 1 - \left( \frac{s_1}{s} \right)^2 \left( 1 - \frac{2 \operatorname{tg} \eta}{\alpha_N} \right),$$

gdzie  $\alpha_N = \frac{\sigma s_1}{N_a}$  oznacza stały stosunek obciążenia poprzecznego do podłużnego oraz  $\sigma_i$  intensywność naprężeń.

Warto tutaj zauważyć, że dla  $\alpha_N = 2 \operatorname{tg} \alpha$  otrzymujemy  $f_s = 1$ ,  $\Omega = 3$ , a wzory (3.2) przyjmują postać odpowiadającą obciążeniu powłoki wszechstronnym równomiernym ciśnieniem hydrostatycznym. Jeśli  $\alpha_N \rightarrow \infty$ , to  $f_s \approx 1 - \left( \frac{s_1}{s} \right)^2$  i mamy przypadek, gdy powłoka jest obciążona wyłącznie poprzecznym ciśnieniem równomiernym. Dla  $\alpha_N \rightarrow 0$  zbliżamy się do stanu ściskania powłoki siłą wzdłużną  $N$ .

Jak wynika ze wzorów (3.2), z przyjętych założeń i kształtu powłoki (brak początkowych niedokładności kształtu), w powłoce realizowany jest bezmomentowy przedkrytyczny stan naprężeń. Należy również założyć taki rodzaj zamocowania brzegów, który w wyniku narastania obciążenia uniemożliwia powstawanie sił poprzecznych i momentów zginających w miejscu podparcia przed utratą stateczności. Dla innego rodzaju podparcia, które wprowadza stan zgięciowy w okolicy brzegów, przyjęta dalej metoda rozwiązania oraz uzyskane wyniki będą w przybliżeniu poprawne dla powłok o średniej lub dużej długości, ze względu na lokalny charakter zaburzeń brzegowych. Umożliwia to zastosowanie wyników niniejszej pracy do szeregu innych praktycznych przypadków.

Oprócz równań (3.1) należy wziąć pod uwagę równanie nierozdzielności odkształceń

$$(3.3) \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \sin \eta - \frac{\partial^2}{\partial s \partial \theta} [\delta \gamma_{s\theta}^+ + \delta \gamma_{s\theta}^-] - \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \theta} [\delta \gamma_{s\theta}^+ + \delta \gamma_{s\theta}^-] + \\ + s \cos \eta \frac{\partial^2}{\partial s^2} [\delta \varepsilon_\theta^+ + \delta \varepsilon_\theta^-] + \frac{1}{s \cos \eta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [\delta \varepsilon_s^+ + \delta \varepsilon_s^-] + \\ + 2 \cos \eta \frac{\partial}{\partial s} [\delta \varepsilon_\theta^+ + \delta \varepsilon_\theta^-] - \cos \eta \frac{\partial}{\partial s} [\delta \varepsilon_s^+ + \delta \varepsilon_s^-] = 0.$$

Równania (3.1)<sub>1</sub> i (3.1)<sub>2</sub> zostaną tożsamościowo spełnione po wprowadzeniu następującej funkcji sił  $F$ :

$$(3.4) \quad \delta N_1 = \frac{1}{s^2 \cos^2 \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s}, \\ \delta N_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, \quad \delta T = -\frac{1}{s \cos \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial \theta} + \frac{1}{s^2 \cos \eta} \frac{\partial F}{\partial \theta}.$$

Na podstawie pierwszych trzech związków (2.10) łatwo można wykazać, że

$$(3.5) \quad [\delta \varepsilon_s^+ + \delta \varepsilon_s^-] = \bar{b}_{11} \delta N_1 + \bar{b}_{12} \delta N_2 - \bar{b}_{13} \delta T, \\ [\delta \varepsilon_\theta^+ + \delta \varepsilon_\theta^-] = \bar{b}_{21} \delta N_1 + \bar{b}_{22} \delta N_2 + \bar{b}_{23} \delta T, \\ [\delta \gamma_{s\theta}^+ + \delta \gamma_{s\theta}^-] = -\bar{b}_{31} \delta N_1 - \bar{b}_{32} \delta N_2 + \bar{b}_{33} \delta T,$$

gdzie

$$(3.6) \quad \bar{b}_{11} = \frac{b_{22} b_{33} - b_{23}^2}{A}, \quad \bar{b}_{12} = \bar{b}_{21} = \frac{b_{13} b_{23} - b_{12} b_{33}}{A}, \\ \bar{b}_{13} = -\bar{b}_{31} = \frac{b_{12} b_{23} - b_{13} b_{22}}{A}, \\ \bar{b}_{22} = \frac{b_{11} b_{33} - b_{13}^2}{A}, \quad \bar{b}_{23} = -\bar{b}_{32} = \frac{b_{12} b_{13} - b_{11} b_{23}}{A}, \\ \bar{b}_{33} = \frac{b_{12}^2 - b_{11} b_{22}}{A},$$

$$A = b_{11} b_{22} b_{33} - b_{12}^2 b_{33} - b_{13}^2 b_{23} + 2b_{12} b_{13} b_{23} - b_{13}^2 b_{12}.$$

## 4. RÓWNIANIA STATECZNOŚCI

Wprowadzając (2.13) do równań (3.1)<sub>3</sub> i (3.1)<sub>4</sub>, wyrażenia na wariacje momentów (2.10) do równania (3.1)<sub>5</sub> oraz (3.5) do równania nierozdzielności (3.3), uzyskamy układ czterech równań różniczkowych cząstkowych względem ugięcia  $w$ , funkcji sił  $F$  i względnych przemieszczeń sprowadzonych  $\alpha_u$  i  $\beta_v$ . Równania te opisują quasi-eulerowskie wyoboczenie w zakresie sprężysto-plastycznym trójwarstwowej powłoki stożkowej przy złożonym obciążeniu:

$$\begin{aligned}
 & b_{11} \frac{\partial^2 \alpha_u}{\partial s^2} + b_{33} \frac{1}{s^2 \cos^2 \eta} \frac{\partial^2 \alpha_u}{\partial \theta^2} + \left( \frac{1}{s} b_{11} - \frac{1}{s} b_{21} + b_{11,s} \right) \frac{\partial \alpha_u}{\partial s} + \\
 & + \left( b_{12,s} - \frac{1}{s} b_{22} \right) \frac{1}{s \cos \eta} \frac{\partial \beta_v}{\partial \theta} + (b_{12} + b_{33}) \frac{1}{s \cos \eta} \frac{\partial^2 \beta_v}{\partial s \partial \theta} - \\
 & - \frac{2}{c} G_3 \left( \alpha_u - \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0, \\
 & b_{33} \frac{\partial^2 \beta_v}{\partial s^2} + b_{22} \frac{1}{s^2 \cos^2 \eta} \frac{\partial^2 \beta_v}{\partial \theta^2} + (b_{33} + b_{21}) \frac{1}{s \cos \eta} \frac{\partial^2 \alpha_u}{\partial s \partial \theta} + \\
 & + \left( \frac{1}{s} b_{33} + b_{33,s} \right) \frac{\partial \alpha_u}{\partial \theta} + \left( \frac{2}{s} b_{33} + b_{33,s} \right) \frac{\partial \beta_v}{\partial s} - \\
 & - \frac{2}{c} G_3 \left( \beta_v - \frac{1}{s \cos \eta} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = 0, \\
 (4.1) \quad & \frac{6}{t^2} \sin \eta \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \alpha_1 \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \alpha_2 \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + \alpha_3 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \alpha_4 \frac{\partial w}{\partial s} + \alpha_5 \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial \theta^2} + \\
 & + \alpha_6 \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial \theta^2} + \alpha_7 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \alpha_8 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{3(c+t)^2}{t^2} \left[ \alpha_9 \alpha_u + \alpha_{10} \frac{\partial \alpha_u}{\partial s} + \right. \\
 & + \alpha_{11} \frac{\partial^2 \alpha_u}{\partial s^2} + \alpha_{12} \frac{\partial^3 \alpha_u}{\partial s^3} + \alpha_{13} \frac{\partial^2 \alpha_u}{\partial \theta^2} + \alpha_{14} \frac{\partial^3 \alpha_u}{\partial s \partial \theta^2} + \alpha_{15} \frac{\partial \beta_v}{\partial \theta} + \\
 & \left. + \alpha_{16} \frac{\partial^2 \beta_v}{\partial s \partial \theta} + \alpha_{17} \frac{\partial^3 \beta_v}{\partial \theta^3} + \alpha_{18} \frac{\partial^3 \beta_v}{\partial s^2 \partial \theta} \right] = 0, \\
 & 2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \sin \eta + \frac{\partial^4 F}{\partial s^4} \beta_1 + \frac{\partial^4 F}{\partial s^2 \partial \theta^2} \beta_2 + \frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} \beta_3 + \frac{\partial^3 F}{\partial s \partial \theta^2} \beta_4 + \frac{\partial^3 F}{\partial s^3} \beta_5 + \\
 & + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \beta_6 + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \beta_7 + \frac{\partial F}{\partial s} \beta_8 = 0.
 \end{aligned}$$

Zmiennych współczynników równań  $b_{ij}$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  nie podajemy tutaj, ponieważ mają złożoną strukturę. W skład tych współczynników wchodzi elementy macierzy sztywności, a także ich pierwsze i drugie pochodne względem argumentów  $s$  i  $\theta$ . Wynika to z niejednorodnego stanu naprężeń w powłoce przed utratą stateczności, a jak wiadomo elementy macierzy sztywności stanu sprężysto-plastycznego zależą również od aktualnego stanu naprężeń, co nie ma miejsca w zakresie sprężystym.



Celem sprowadzenia układu równań cząstkowych (4.1) do równań różniczkowych zwyczajnych przyjmujemy poszukiwane funkcje w postaci podwójnych szeregów nieskończonych:

$$(4.2) \quad \alpha_u(s, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_u(s) \cos n\theta, \quad \beta_v(s, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_v(s) \sin n\theta,$$

$$w(s, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w(s) \cos m\theta, \quad F(s, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F(s) \cos n\theta,$$

gdzie  $2n$  jest parametrem określającym liczbę półfal powstających na obwodzie powłoki przy wyboczeniu. W pierwszym przybliżeniu weźmy po jednym wyrazie funkcji (4.2). Po podstawieniu do (4.1) uzyskamy układ czterech równań różniczkowych zwyczajnych o poszukiwanych funkcjach  $\alpha_u, \beta_v, w, F$ :

$$(4.3) \quad b_{11} \alpha_u(s)_{,ss} + \left( \frac{1}{s} b_{11} + b_{11,s} - \frac{1}{s} b_{21} \right) \alpha_u(s)_{,s} - \left( n^2 \frac{b_{33}}{s^2 \cos^2 \eta} + \right. \\ \left. + \frac{2}{c} G_3 \right) \alpha_u(s) + \frac{n}{s \cos \eta} \left( b_{12,s} - \frac{1}{s} b_{22} \right) \beta_v(s) + n (b_{12} + b_{33}) \times \\ \times \frac{1}{s \cos \eta} \beta_v(s)_{,s} + \frac{2}{c} G_3 w(s)_{,s} = 0,$$

$$-n (b_{33} + b_{21}) \frac{1}{s \cos \eta} \alpha_u(s)_{,s} - n \frac{1}{s \cos \eta} \left( \frac{1}{s} b_{33} + b_{33,s} \right) \alpha_u(s) + \\ + b_{33} \beta_v(s)_{,ss} + \left( \frac{2}{s} b_{33} + b_{33,s} \right) \beta_v(s)_{,s} - \\ - \left( n^2 \frac{b_{22}}{s^2 \cos^2 \eta} + \frac{2}{c} G_3 \right) \beta_v(s) - n \frac{2}{c} G_3 \frac{1}{s \cos \eta} w(s) = 0,$$

$$- \frac{6}{t^2} \sin \eta F(s)_{,ss} + \alpha_1 w(s)_{,ssss} + \alpha_2 w(s)_{,sss} + (\alpha_3 - n^2 \alpha_5) w(s)_{,ss} + \\ + (\alpha_4 - n^2 \alpha_6) w(s)_{,s} + n^2 (n^2 \alpha_8 - \alpha_7) w(s) + \\ + 3 \frac{(c+t)^2}{t^2} [(\alpha_9 - n^2 \alpha_{13}) \alpha_u(s) + (\alpha_{10} - n^2 \alpha_{14}) \alpha_u(s)_{,s} + \\ + \alpha_{11} \alpha_u(s)_{,ss} + \alpha_{12} \alpha_u(s)_{,sss} + n (\alpha_{15} - n^2 \alpha_{17}) \beta_v(s) + \\ + n \alpha_{16} \beta_v(s)_{,s} + n \alpha_{18} \beta_v(s)_{,ss}] = 0,$$

$$2 \sin \eta w(s)_{,ss} + \beta_1 F(s)_{,ssss} + \beta_5 F(s)_{,sss} + (\beta_7 - n^2 \beta_2) F(s)_{,ss} + \\ + (\beta_8 - n^2 \beta_4) F(s)_{,s} + n^2 (n^2 \beta_3 - \beta_6) F(s) = 0.$$

Układ równań (4.3) scałkujemy w sposób przybliżony stosując metodę ortogonalizacyjną Galerkin-Bubnowa. Funkcje  $\alpha_u(s), \beta_v(s), w(s)$  i  $F(s)$  przyjmujemy w postaci

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \alpha_u(s) &= \alpha_0 \cos \frac{m\pi}{l} (s-s_1), & \beta_v(s) &= \beta_0 \sin \frac{m\pi}{l} (s-s_1), \\ w(s) &= w_0 \sin \frac{m\pi}{l} (s-s_1), & F(s) &= F_0 \sin \frac{m\pi}{l} (s-s_1). \end{aligned}$$

Tutaj  $m$  jest parametrem określającym ilość pólfał wybożenia wzdłuż tworzącej.

Obrane funkcje (4.4) spełniają kinematyczne warunki brzegowe swobodnego podparcia powłoki:  $w(s_1, \theta) = 0$ ,  $w(s_2, \theta) = 0$ . Warunki statyczne spełnione są częściowo. Wobec szybko zanikającego efektu brzegowego, niespełnienie ściśle wszystkich warunków brzegowych nie ma istotnego znaczenia z technicznego punktu widzenia.

Zgodnie z metodą ortogonalizacyjną żądamy, aby

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \int_{s_1}^{s_2} L_1(s) \alpha_u(s) ds &= 0, & \int_{s_1}^{s_2} L_2(s) \beta_v(s) ds &= 0, \\ \int_{s_1}^{s_2} L_3(s) w(s) ds &= 0, & \int_{s_1}^{s_2} L_4(s) F(s) ds &= 0, \end{aligned}$$

gdzie  $L_i(s)$  oznaczają odpowiednio lewe strony równań (4.3).

Nadmienić należy, że nie jest możliwe w pełni scałkowanie analityczne równań (4.3), gdyż nie wszystkie funkcje podcałkowe występują tutaj w jawnej postaci. W przypadku złożonych funkcji dokonamy całkowania numerycznego.

W efekcie uzyskamy układ czterech równań algebraicznych, liniowych względem współczynników  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $w_0$  i  $F_0$ :

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \alpha_0 L_{11} + \beta_0 L_{12} + w_0 L_{13} &= 0, \\ \alpha_0 L_{21} + \beta_0 L_{22} + w_0 L_{23} &= 0, \\ \alpha_0 L_{31} + \beta_0 L_{32} + w_0 L_{33} + F_0 L_{34} &= 0, \\ w_0 L_{43} + F_0 L_{44} &= 0. \end{aligned}$$

Układ powyższy będzie jednoznacznie spełniony, gdy zniknie jego wyznacznik

$$(4.7) \quad \tilde{L}_{ij} = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & 0 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ 0 & 0 & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix} = L_{44} \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} - L_{34} \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ 0 & 0 & L_{43} \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwinięcie  $\tilde{L}_{ij}$  prowadzi do związku, z którego można będzie wyznaczyć obciążenie krytyczne

$$(4.8) \quad \tilde{L}_{ij} = L_{44} \left[ L_{33} A_1 + m \frac{\pi}{c} G_3 (L_{21} L_{32} - L_{22} L_{31}) + L_{23} (L_{31} L_{12} - L_{32} L_{11}) \right] + 3 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^4 \left( \frac{l}{t} \sin \eta \right)^2 A_1 = 0,$$

gdzie

$$A_1 = L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21}.$$

W równaniu (4.8)

$$L_{11} = \tilde{C}_1 \frac{m\pi}{l} - n^2 \frac{1}{\cos^2 \eta} \tilde{C}_2 - \frac{l}{c} G_3,$$

$$\tilde{C}_1 = \int_{s_1}^{s_2} \left[ -\frac{m\pi}{l} b_{11} \sin^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) + \frac{1}{2} (b_{21} - b_{11}) \frac{1}{s} \sin \frac{2m\pi}{l} (s-s_1) \right] ds,$$

$$\tilde{C}_2 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{s^2} b_{33} \cos^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) ds,$$

$$L_{12} = n \frac{1}{\cos \eta} \tilde{C}_3,$$

$$\tilde{C}_3 = \int_{s_1}^{s_2} \left[ \frac{1}{2s^2} (b_{12} - b_{22}) \sin \frac{2m\pi}{l} (s-s_1) - \frac{m\pi}{l} \frac{1}{s} b_{12} \sin^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) + \right. \\ \left. + \frac{m\pi}{l} \frac{1}{s} b_{33} \cos^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) \right] ds,$$

$$L_{21} = n \frac{1}{\cos \eta} \tilde{E}_1$$

(4.9)

$$\tilde{E}_1 = \int_{s_1}^{s_2} \left[ \frac{m\pi}{l} \frac{1}{s} b_{21} \sin^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) + \frac{1}{s} b_{33} \left( -\frac{m\pi}{l} + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \frac{m\pi}{l} \sin^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) + \frac{1}{s} \sin \frac{2m\pi}{l} (s-s_1) \right) \right] ds,$$

$$L_{22} = \frac{m\pi}{l} \tilde{E}_2 - n^2 \frac{1}{\cos^2 \eta} \tilde{E}_3 - \frac{l}{c} G_3,$$

$$\tilde{E}_2 = \int_{s_1}^{s_2} b_{33} \left[ \frac{1}{s} \sin \frac{2m\pi}{l} (s-s_1) - \frac{m\pi}{l} \cos^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) \right] ds,$$

$$\tilde{E}_3 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{s^2} b_{22} \sin^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) ds,$$

$$L_{23} = n \frac{2}{c} \frac{G_3}{\cos \eta} \tilde{E}_4,$$

$$\tilde{E}_4 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{s} \sin^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) ds,$$

$$(4.9) \quad L_{31} = 3 \frac{(c+t)^2}{t^2} \left[ n \left( \tilde{A}_4 \frac{m\pi}{l} + G_3 \frac{l}{c+t} \right) - n^3 \frac{1}{\cos^2 \eta} \tilde{A}_5 \right],$$

[cd].

$$\tilde{A}_4 = \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{m\pi}{l} b_{12} \sin^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) + \frac{1}{2s} b_{22} \sin \frac{2m\pi}{l} (s-s_1) + b_{33} \times \right. \\ \left. \times \left[ -2 \frac{m\pi}{l} \cos^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) + \frac{1}{s} \sin \frac{2m\pi}{l} (s-s_1) \right] \right\} ds,$$

$$\tilde{A}_5 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{s^2} b_{22} \sin^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) ds$$

$$L_{33} = \left[ \tilde{A}_1 + \frac{3}{2} \frac{\sigma l}{t^2 \operatorname{tg} \eta} \left[ s_1^2 \xi_N - \frac{1}{3l} (s_2^3 - s_1^3) - \frac{1}{2} \frac{m\pi}{l} \right] - b_{12} \Big|_{s_1}^{s_2} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \frac{c+t}{t^2} (s_2^2 - s_1^2) G_3 \right] \frac{m\pi}{l} \cos \eta + n^2 \frac{1}{\cos \eta} \left( \tilde{A}_2 - 3 \frac{\sigma l}{t^2 \operatorname{tg} \eta} \right) + \\ + n^4 \frac{1}{\cos^3 \eta} \tilde{A}_3.$$

$$\tilde{A}_1 = \int_{s_1}^{s_2} \left[ \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 s b_{11} \sin^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) - \frac{m\pi}{l} b_{12} \sin \frac{2m\pi}{l} (s-s_1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{s} b_{22} \cos^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) \right] ds,$$

$$\tilde{A}_2 = \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{2}{s} b_{12} \sin^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) - \frac{m\pi}{l} \frac{1}{s^2} b_{22} \sin \frac{2m\pi}{l} (s-s_1) - \right. \\ \left. - \frac{4}{s} b_{33} \left[ \frac{1}{s^2} \sin^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) - \frac{1}{s} \frac{m\pi}{l} \sin \frac{2m\pi}{l} (s-s_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \cos^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) \right] + 6 \frac{c+t}{t^2} G_3 \frac{1}{s} \sin^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) \right\} ds,$$

$$\tilde{A}_3 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{s^3} b_{22} \sin^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) ds,$$

$$L_{44} = (\tilde{B}_1 - \tilde{b}_{21} \Big|_{s_1}^{s_2}) \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \cos \eta + n^2 \frac{1}{\cos \eta} \tilde{B}_2 + n^4 \frac{1}{\cos^3 \eta} \tilde{B}_3,$$

$$\tilde{B}_1 = \int_{s_1}^{s_2} \left[ \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 s b_{22} \sin^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) - \frac{m\pi}{l} \tilde{b}_{21} \sin \frac{2m\pi}{l} (s-s_1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{s} \tilde{b}_{11} \cos^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) \right] ds,$$

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \text{[cd.]} \quad \tilde{B}_2 = & \int_{s_1}^{s_2} \left\{ 2 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{s} \bar{b}_{12} \sin^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) - \frac{m\pi}{l} \frac{1}{s^2} \bar{b}_{11} \sin \frac{2m\pi}{l} + \right. \\ & + \frac{1}{s} \bar{b}_{33} \left[ \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \cos^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) - \frac{1}{s} \frac{m\pi}{l} \sin \frac{2m\pi}{l} (s-s_1) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{s^2} \sin^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) \right] \right\} ds, \\ \tilde{B}_3 = & \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{s^3} \bar{b}_{11} \sin^2 \frac{m\pi}{l} (s-s_1) ds. \end{aligned}$$

Jak widać na podstawie wzorów (4.9) obciążenie krytyczne w równaniu stateczności tkwi w sposób uwikłany i to nie tylko w składnikach zawierających całki numeryczne, lecz również w elementach macierzy sztywności  $b_{ij}$  i  $\bar{b}_{ij}$ . Wyznamy go jako najmniejszy dodatni pierwiastek równania (4.8).

Nadmienić należy, że poprzez całkowanie przez części z całek numerycznych  $\bar{C}_i$ ,  $\bar{E}_i$ ,  $\bar{A}_i$  i  $\bar{B}_i$  wyeliminowano pochodne elementów macierzy sztywności względem argumentów, co umożliwiła rozszerzenie klasy rozwiązań na powłoki sprężyste i sprężysto-plastyczne.

Zakładamy liniową charakterystykę umocnienia materiału [14], dla której

$$(4.10) \quad \varepsilon_i = \frac{\sigma_i + \sigma_H \left( \frac{E_k}{E} - 1 \right)}{E_k},$$

gdzie  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$  oznaczają odpowiednio intensywność naprężeń i odkształceń,  $\sigma_H$  granicę sprężystości materiału oraz  $E_k$  moduł wzmocnienia liniowego (styczny). Moduł szczytny dla przyjętej charakterystyki jest określony następująco:

$$(4.11) \quad E_c = \begin{cases} \frac{E_k}{1 + \frac{k_1}{\sigma_H \sqrt{\Omega}}}, & \sigma_i > \sigma_H; \\ E, & \sigma_i \leq \sigma_H, \quad k_1 = 4 \left( \frac{E_k}{E} - 1 \right) \sigma_H t \operatorname{tg} \eta. \end{cases}$$

Warunek (4.11) należy przy obliczeniach numerycznych uwzględnić za pomocą instrukcji logicznych.

Współczynniki występujące we wzorach (4.9), odpowiadające elementom macierzy sztywności (2.8) i (3.6), są następujące:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} b_{\alpha\beta} = \frac{t}{N} D_{\alpha\beta}, \quad \bar{b}_{11} = \frac{1}{t} \frac{N}{M} D_{22}, \quad \bar{b}_{12} = \bar{b}_{21} = -\frac{1}{t} \frac{N}{M} D_{12}, \\ \bar{b}_{22} = \frac{1}{t} \frac{N}{M} D_{11}, \quad \bar{b}_{33} = \frac{1}{b_{33}}, \\ b_{12} \Big|_{s_1}^{s_2} = b_{12}(s_2) - b_{12}(s_1), \quad \bar{b}_{12} \Big|_{s_1}^{s_2} = \bar{b}_{12}(s_2) - \bar{b}_{12}(s_1). \end{aligned}$$

Elementy  $D_{\alpha\beta}$ ,  $b_{33}$  oraz funkcje  $N$  i  $M$  zależą od przyjętej teorii plastyczności i dla założonego typu obciążenia powłoki i charakterystyki materiału są określone następująco:

a) teoria deformacyjna Nadai'a-Hencky'ego

$$(4.13) \quad \begin{aligned} D_{11}^{TD} &= \begin{cases} \left(1 - \frac{E_k}{E_c}\right) \frac{(f_s - 4)^2}{4\Omega} + \frac{E_k}{E_c}, & \sigma_i > \sigma_H, \\ 1, & \sigma_i \leq \sigma_H \end{cases} \\ D_{12}^{TD} &= \begin{cases} -\left(1 - \frac{E_k}{E_c}\right) \frac{(1-f_s)(f_s-4)}{2\Omega} + \frac{1}{2} E_k \left(\frac{1}{E_c} - \frac{1-2\nu}{E}\right), \\ \nu, \end{cases} \\ D_{22}^{TD} &= \begin{cases} \left(1 - \frac{E_k}{E_c}\right) \frac{(1-f_s)^2}{\Omega} + \frac{E_k}{E_c} & b_{33}^{TD} = \begin{cases} \frac{t}{\frac{3}{E_c} - \frac{1-2\nu}{E}}, \\ \frac{Et}{2(1-\nu)}, \end{cases} \\ 1, \end{cases} \\ N^{TD} &= \begin{cases} \frac{1}{4E} \left\{ [3E + 2(1-2\nu)E_k] \frac{1}{E_c} - \frac{2(1-2\nu)}{\Omega} (1-f_s)(f_s-4) \left(1 - \frac{E_k}{E_c}\right) - \right. \\ \left. -(1-2\nu)^2 \frac{E_k}{E} \right\}, \\ \frac{1}{E} (1-\nu^2), \end{cases} \end{aligned}$$

$$M^{TD} = D_{11} D_{22} - D_{12}^2;$$

b) teoria plastycznego płynięcia Prandtl'a-Reussa

$$(4.14) \quad \begin{aligned} D_{11}^{TPP} &= \begin{cases} 2\Omega + \frac{1}{2} \left(\frac{E}{E_k} - 1\right) (f_s - 4)^2, & \sigma_i > \sigma_H, \\ 2\Omega, & \sigma_i \leq \sigma_H \end{cases} \\ D_{12}^{TPP} &= \begin{cases} 2\nu\Omega - \left(\frac{E}{E_k} - 1\right) (1-f_s)(f_s-4), \\ 2\nu\Omega, \end{cases} \\ D_{22}^{TPP} &= \begin{cases} 2 \left[ \Omega + \left(\frac{E}{E_k} - 1\right) (1-f_s)^2 \right], & b_{33}^{TPP} = \frac{Et}{2(1+\nu)}, \\ 2\Omega, \end{cases} \\ N^{TPP} &= \begin{cases} \frac{1}{E} \left\{ 2(1-\nu^2)\Omega + \frac{1}{2} \left(\frac{E}{E_k} - 1\right) [(5-4\nu)(f_s^2+4) - 4(4-5\nu)f_s] \right\}, \\ \frac{2\Omega}{E} (1-\nu^2), \end{cases} \end{aligned}$$

$$M^{TPP} = D_{11} D_{22} - D_{12}^2.$$

Z przedstawionych powyżej wzorów wynika, że elementy macierzy sztywności przyjmują wartości dwojakiego rodzaju, zależnie od rodzaju procesu w powłoce. Dla odkształceń sprężystych  $E_c = E_k = E$  i współczynniki  $b_{ij}$  i  $\bar{b}_{ij}$  przyjmują wartości jak dla stanu sprężystego. Ponieważ w chwili utraty stateczności część powłoki może znajdować się w stanie sprężystym a część w plastycznym, przeto jednym ze sposobów praktycznej realizacji warunków (3.13) i (3.14) jest sprawdzenie na każdym kroku całkowania warunku  $\sigma_i \geq \sigma_H$ , po czym następuje wybór odpowiedniego współczynnika lub też, co oszczędza pamięć operacyjną komputera, bezpośrednio sprawdzenie, czy  $E_c \geq E$  i podstawienie

$$E_c = \begin{cases} E_c & \text{dla } 0 < E_c < E, \\ E & \text{dla } E_c \geq E. \end{cases}$$

Obciążenie krytyczne ( $\sigma_{krmn}$ ,  $N_{krmn}$ ) tkwi w równaniu stateczności w sposób uwikłany. Wyznamy je iteracyjnie poszukując pierwiastków tego równania, przy czym należy dokonać minimalizacji względem parametrów  $m$  i  $n$ .

## 5. OBLICZENIA NUMERYCZNE I WNIOSKI

Wzorem wyjściowym dla wyznaczenia obciążenia krytycznego jest równanie (4.8). Nie można wyznaczyć go w sposób bezpośredni, ponieważ, jak już wspomniano, tkwi w związku tym w sposób uwikłany; m.in. w funkcjach podcałkowych. Obliczenia przeprowadzimy, poszukując miejsc zerowych równania (4.8) według specjalnie opracowanej procedury iteracyjnej. W procedurze tej przewidziano ustalanie miejsc zerowych metodą interpolacji liniowej, minimalizację według parametrów postaci wyboczenia  $n$  i  $m$ , całkowanie numeryczne, jak również badanie dokładności zarówno dla miejsc zerowych jak i procesu całkowania. Obliczenia przeprowadzono na komputerze ODRA-1305 pod nadzorem systemu operacyjnego. Jako dane podstawowe przyjęto:

a) stałe materiałowe

$$E_k = 9800 \text{ MPa}, \quad E = 2,09 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \quad G_3 = 25,06 \text{ MPa}, \quad \sigma_H = 80 \text{ MPa}, \\ \nu = 0,29;$$

b) wymiary

$$s_1 = 0,8 \text{ m}, \quad l_0 = 0,5 \text{ m}, \quad \eta = 1,047197, \quad c = 0,06 \text{ m}, \quad t = 0,004 \text{ do } 0,006 \text{ m}$$

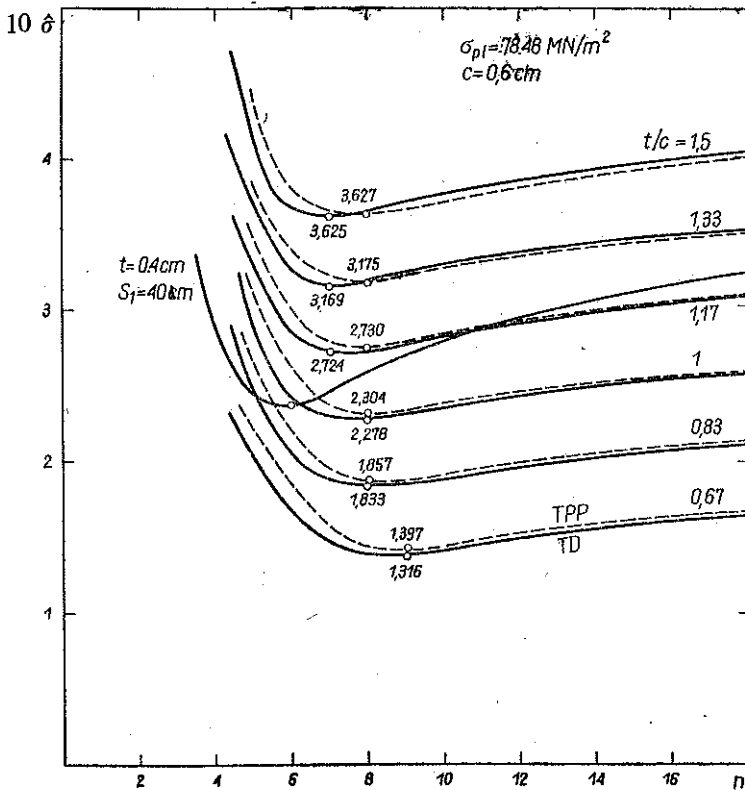
oraz

$$\alpha_N = 3,4625217, \quad i = 20.$$

Jeśli którykolwiek z wymienionych parametrów dla celów analizy ulegnie zmianie, wówczas zostanie zaznaczone to na odpowiednim wykresie.

Na rys. 2 pokazano wykres krzywych obrazujących dyskretny rozkład miejsc zerowych równania (4.8) dla różnych stosunków grubości powłoki  $t/c$  w zakresie 0,67 do 1,5. Minimum każdej krzywej przy określonej wartości parametrów  $n$  i  $m$  odpowiada obciążeniu krytycznemu powłoki dla danej grupy danych. Obliczenia

przeprowadzono zarówno dla teorii deformacyjnej (TD), jak i dla teorii plastycznego płynięcia (TPP). Na wykresie zbiorczym (rys. 3) przedstawiono, jak zmieniają się obciążenia krytyczne



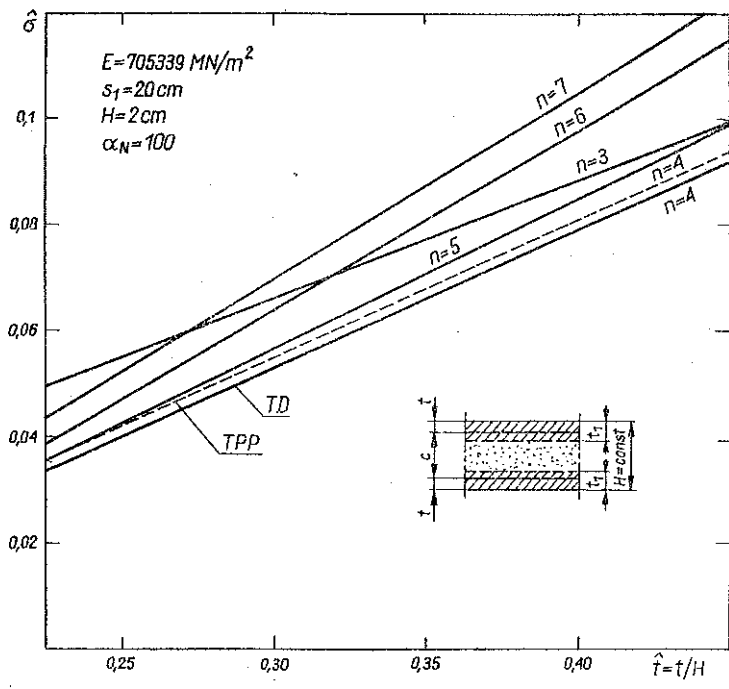
Rys. 2

$$(5.1) \quad \hat{\sigma}_{kr} = \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_H}$$

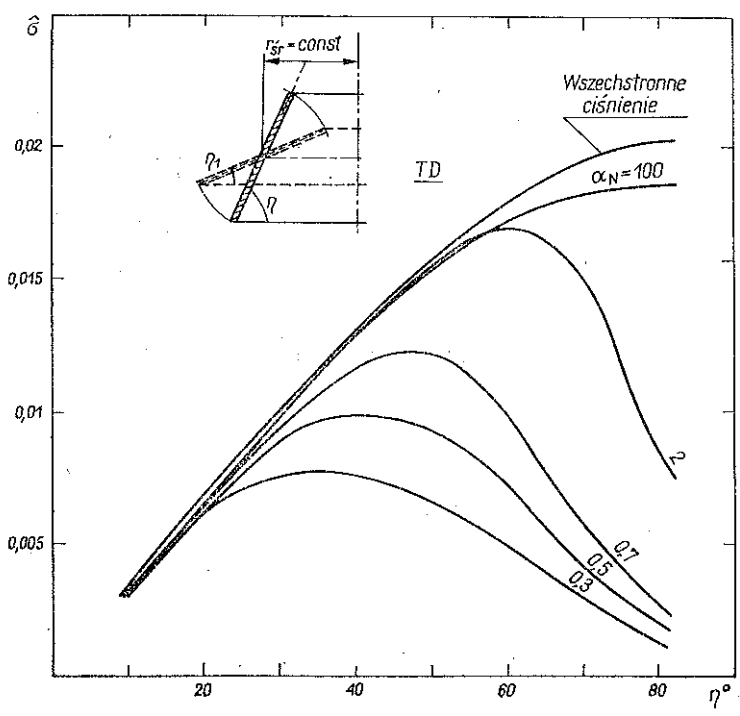
jako funkcja grubości warstw nośnych  $t$ , przy stałej grubości całkowitej  $H = c + 2t$ . Powłoka była obciążona siłą podłużną i bocznym ciśnieniem równomiernym z dużą przewagą obciążenia bocznego ( $\alpha_N = \sigma_{S_1}/N_a = 100$ ); dlatego minimalne wartości obciążenia krytycznego uzyskano tutaj przy  $m = 1$  i  $n$  jak zaznaczono. Stwierdzono, że zmiana grubości powłoki nie wpływa na postać wybożenia, a obciążenia krytyczne według teorii plastycznego płynięcia są nieco wyższe niż dla teorii deformacyjnej. Charakter zmiany obciążenia krytycznego ze zmianą grubości dla badanego zakresu jest liniowy, przy czym ze zwiększeniem grubości obciążenie krytyczne rośnie.

W kolejności zbadano jak zmienia się obciążenie krytyczne powłoki ze zmianą kąta pochylenia tworzącej przy podstawie  $\eta$ . Przy analizie zachowano tutaj stały średni promień powłoki oraz pozostałe parametry. Na rys. 4 przedstawiono wyniki



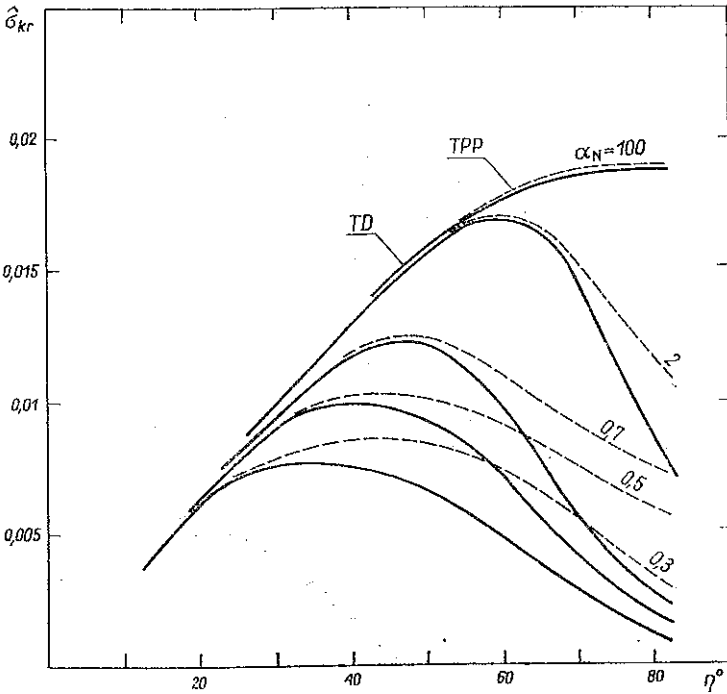


Rys. 3



Rys. 4

obliczeń dla teorii deformacyjnej. Pokazane krzywe odpowiadają różnym kombinacjom obciążenia poprzecznego do podłużnego. Krzywa górna odpowiada obciążeniu powłoki wszechstronnym ciśnieniem równomiernym typu parcia hydrostatycznego. Jak widać, dla tego typu obciążenia uzyskuje się najwyższe obciążenia krytyczne, przy czym ze wzrostem kąta  $\eta$  obciążenie to nieliniowo wzrasta. Przy małych wartościach stosunku obciążenia poprzecznego do podłużnego  $\alpha_N$ , przy pewnej wartości kąta  $\eta$ , występuje maksimum obciążenia krytycznego  $\hat{\sigma}_{kr}$ . Maksimum to maleje ze zmniejszaniem współczynnika  $\alpha_N$  i przemieszcza się w kierunku malejących kątów  $\eta$ . Przy większych wartościach  $\alpha_N$  maksimum obciążenia krytycznego nie występuje. W tym etapie obliczeń numerycznych przeprowadzono porównanie wyników uzyskanych na podstawie dwóch podstawowych teorii plastyczności, co obrazuje rys. 5. Przy dużych wartościach współczynnika  $\alpha_N$  (przewaga obciążenia

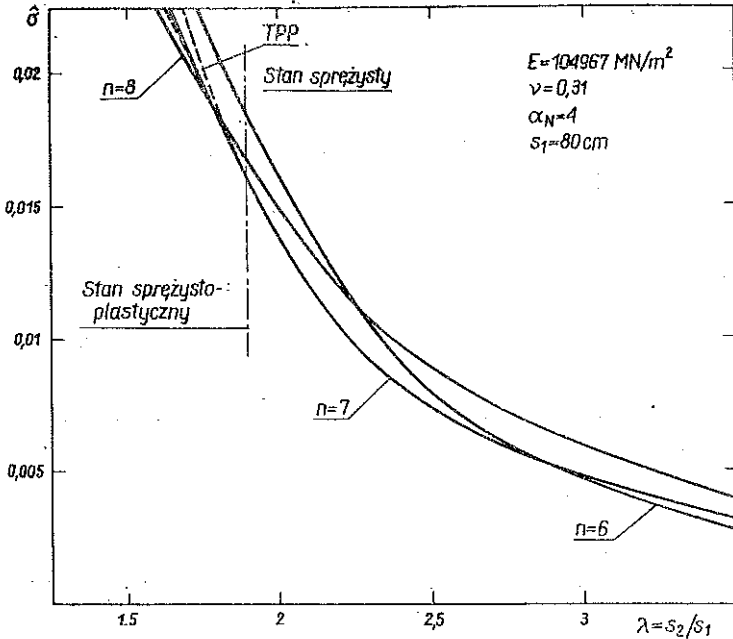


Rys. 5

bocznego), różnice pomiędzy *TPP* i *TD* nie są wielkie. Przy małych wartościach  $\alpha_N$  (przewaga ściskającej siły podłużnej) i małych kątach  $\eta$ , różnice te również nie są wielkie, natomiast rozbieżności rosną i to w sposób istotny, przy większych kątach pochylenia tworzącej. Zaznaczyć należy, że zgodność wyników ulega wyraźnemu pogorszeniu wówczas, gdy w momencie utraty stateczności większa część powłoki przeszła w stan plastyczny i intensywność naprężeń w powłoce przekracza wyraźnie granicę sprężystości materiału. Stan ten właśnie ma miejsce dla omawianych przypadków. Wydaje się, że należałoby tutaj rozważyć możliwość analizy

stateczności według koncepcji ustalonego obciążenia. Napotyka się jednak na duże trudności przy całkowaniu równań wyjściowych ze względu na konieczność ustalania granicy stref obciążenia i odciążenia i to zarówno w kierunku grubości powłoki, jak i w kierunku podłużnym i obwodowym.

Kolejne wykresy rys. 6 i 7 przedstawiają analizę wpływu zmiany długości tworzącej powłoki na obciążenia krytyczne przy wszystkich pozostałych parametrach stałych. Obliczenia prowadzono początkowo dla  $\lambda = s_2/s_1$  w przedziale [1,5; 3,5].

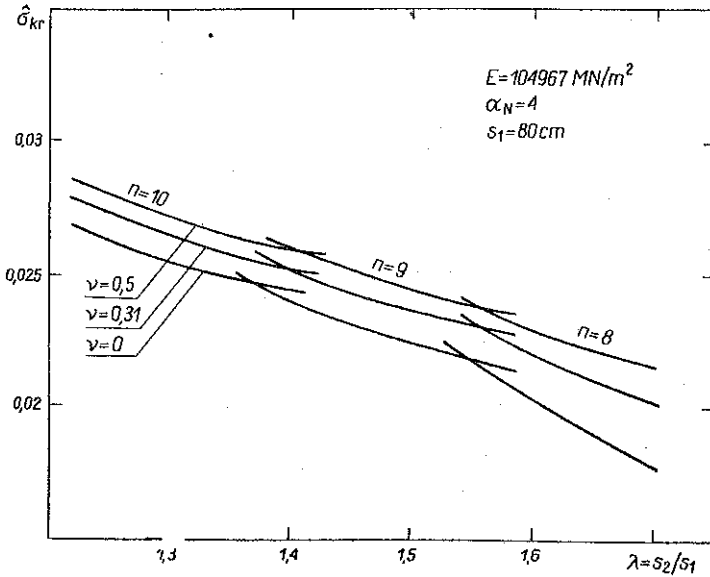


Rys. 6

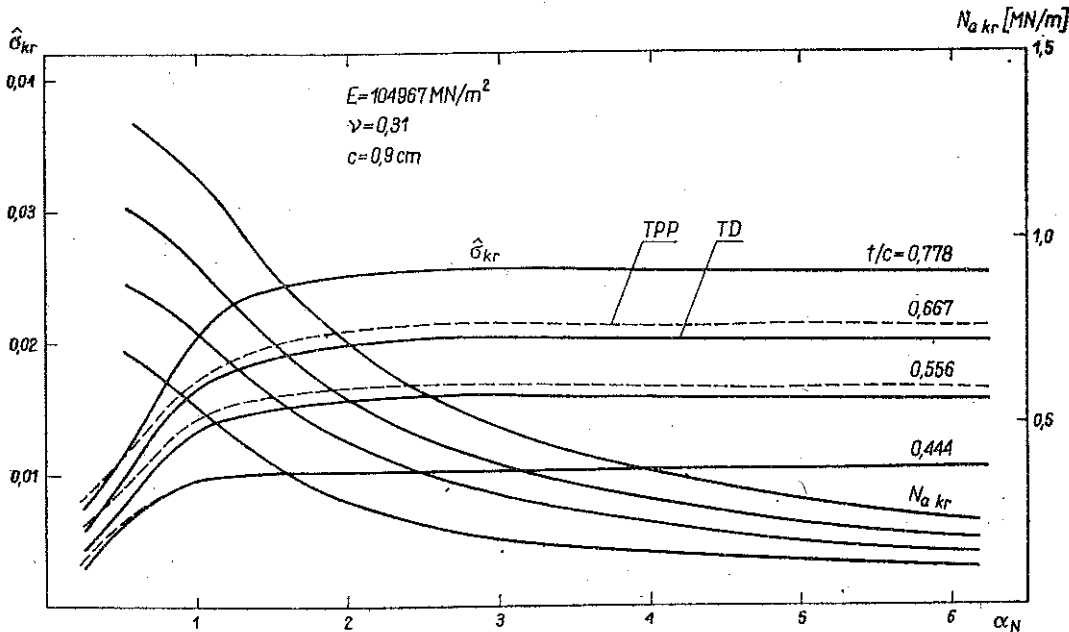
Okazało się, że w miarę wzrostu długości obciążenie krytyczne nieliniowo maleje, przy zmieniającej się liczbie półfal  $n$  przy wyboczeniu. Wymiary powłoki były takie, że począwszy od  $\lambda=1,9$  powłoka przy wyboczeniu nie ulegała uplastycznieniu. Wobec tego zbadano również przedział [1,25; 17] mniejszych długości  $\lambda$ , a wyniki przedstawiono na rys. 7. Dodatkowo zbadano tutaj wpływ ściśliwości materiału na obciążenia krytyczne. Jak widać, różnice w wartościach obciążeń krytycznych przy przyjęciu  $\nu=0; 0,31; 0,5$  wzrastają ze wzrostem długości powłoki, tj. gdy utrata stateczności odbywa się przy mało zaawansowanym procesie uplastycznienia w powłoce. Podobne rezultaty uzyskano przy badaniu sprężysto-plastycznej stateczności płyt trójwarstwowych [11].

Istotnym elementem analizy numerycznej było zbadanie jak kształtują się obciążenia krytyczne powłoki przy różnych kombinacjach siły podłużnej i obciążenia poprzecznego. Cel ten osiągnięto przez zrealizowanie obliczeń przy zmieniającym się współczynnikiem  $\alpha_N$ . Wyniki obliczeń dla obydwu teorii plastyczności przedstawiono

na rys. 8 i 9. Na rys. 8 wykonano wykresy we współrzędnych: obciążenie krytyczne  $\hat{\sigma}_{kr}$ ,  $N_{a kr}$ , współczynnik  $\alpha_N$ , dla  $\alpha_N$  w przedziale [0,3; 6,0]. Stwierdzono, że ze wzrostem  $\alpha_N$  krytyczne obciążenie poprzeczne  $\hat{\sigma}_{kr}$  początkowo szybko rośnie, osiąga maksimum przy pewnej wartości  $\alpha_N$ , następnie nieznacznie spada. Jedno-

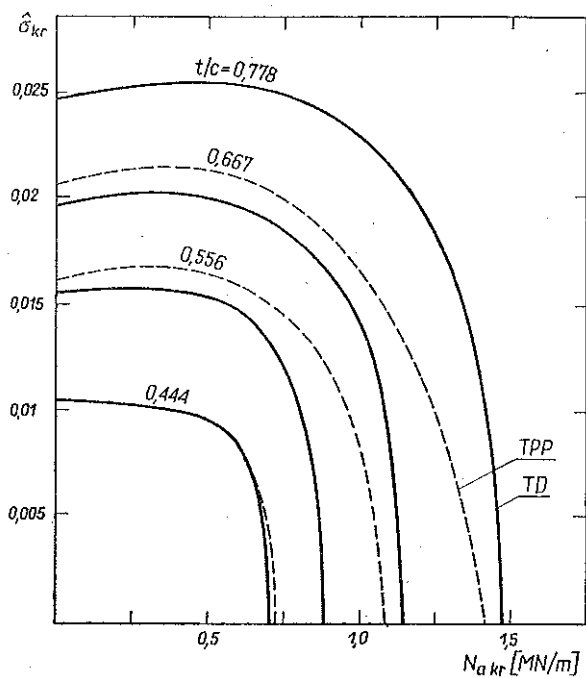


Rys. 7



Rys. 8

częściej krytyczna siła podłużna  $N_{kr}$  nieliniowo maleje. Na wykresie przedstawiono wyniki dla różnych stosunków grubości warstw nośnych do warstwy wypełniającej  $t/c$ , przy zachowaniu stałej grubości całkowitej. Na podstawie uzyskanych poprzednio wyników sporządzono wykres (rys. 9) we współrzędnych  $\hat{\sigma}$ ,  $N$ , określający



Rys. 9

obszary niestateczności powłoki. Punkty zawarte wewnątrz obszaru ograniczonego osiami układu i krzywymi odpowiadają statecznym położeniom powłoki, natomiast przy kombinacjach  $\sigma$  i  $N$  odpowiadających położeniu na krzywej lub na zewnątrz obszaru — powłoka znajdzie się w stanie utraty stateczności. Przedstawione krzywe są wypukłe względem początku układu współrzędnych. Porównanie wyników pomiędzy teorią plastycznego płynięcia i teorią deformacyjną wykazało tutaj, że TPP daje wyższe wartości obciążeń krytycznych, a rozbieżności są większe przy małych wartościach współczynnika  $\alpha_N$  (przewaga ściskającej siły podłużnej), gdzie proces uplastycznienia powłoki w chwili wybooczenia jest w większym stopniu rozwinięty.

Oprócz wyników przedstawionych na wykresach, wykonano również obliczenia przy zmieniających się stałych materiałowych warstw nośnych i wypełniającej:  $E$ ,  $E_k$  i  $G_3$ . Ogólnie można stwierdzić, że wzrostowi tych stałych towarzyszy wzrost obciążeń krytycznych. Powłoka jest bardziej «wrażliwa» na zmianę postaci wybooczenia przy zmianie wartości modułu ścinania  $G_3$ , aniżeli przy zmianie modułu sprężystości podłużnej  $E$  i modułu wzmocnienia  $E_k$  warstw nośnych.

W trakcie obliczeń numerycznych nasunęło się kilka istotnych uwag. Stwierdzono m.in., że duży wpływ na wyniki ma zachowanie odpowiedniej dokładności obliczeń w trakcie procesu iteracyjnego. Należy jednak zdać sobie sprawę z tego, że żądanie większej dokładności jest związane niejednokrotnie ze znacznym zwiększeniem czasu obliczeń komputerowych. Stąd też ograniczona ilość badanych wariantów. Na zakończenie należy jeszcze raz stwierdzić, że oprócz rozwiązania i przebadania przedstawionego zagadnienia—istotnym elementem pracy jest fakt, że wyniki mogą być wykorzystane do analizy powłok sprężystych, sprężysto-plastycznych, jak i całkowicie plastycznych, przy czym procedura została tak opracowana, że oprócz przygotowania danych użytkownik nie musi interesować się, który z tych stanów w rzeczywistości zaistnieje.

W pracy opierano się na klasycznych teoriach plastyczności. Jak wynika z analizy, wyniki obliczeń według teorii deformacyjnej i płynięcia plastycznego nie będą się wiele różniły przy małych odkształceniach plastycznych. Przy wroście tych odkształceń następuje podwyższenie wyników teorii płynięcia w stosunku do teorii deformacyjnej, przy czym ta ostatnia na ogół lepiej zgadza się z wynikami doświadczeń [13]. Zbliżenie wyników teoretycznych można uzyskać przez odpowiednią modyfikację teorii płynięcia (por. [8]).

W dalszych badaniach należałoby przewidzieć analizę powłoki o niesymetrycznej budowie tak pod względem kształtu, jak i materiału poszczególnych warstw, oraz uwzględnienie uplastycznienia warstwy wypełniającej. Takie zagadnienie wymaga jednak przyjęcia odmiennego modelu.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. И. А. ЕФИМОВ, *Устойчивость трехслойной цилиндрической оболочки*, Изв. Высших Уч. Зав., С. Авиаци. Техн., 3, 1962.
2. S. GELLIN, *Effect of an axisymmetric imperfections on the plastic buckling of an axially compressed cylindrical shell*, Trans. ASME, 1, 46, 1979.
3. Э. И. Григोलук, *Об устойчивости трехслойных оболочек и пластин за пределом упругости*, Изв. АН СССР, ОТН, 6, 1958.
4. E. I. GRIGOLUK, *Buckling of sandwich constructions beyond the elastic limit*, Jour. Mech. Ph. Sol., 6, 1958.
5. Л. М. Куршин, *Устойчивость трехслойной цилиндрической оболочки за пределом упругости* Вопр. Расч. Элем. Авиаци. Констр. 2, 1959.
6. Ю. Р. Лепик, *Равновесие упруго-пластических и эластико-пластических пластин и оболочек* Инж. Ж. 4, 601–616 1964.
7. Ю. В. Немировский, *Об устойчивости за пределом упругости слоистых оболочек несимметрического строения*, Мех. Тв. Тела, 4, 1966.
8. C. E. PEARSON, *Bifurcation criterion and plastic buckling of plates and columns*, J. Aeron. Sci., 7, 17, 1950.
9. A. PFLUGER, *Zur plastischen Beulung von Flächenträgern*, ZAMM, 47, 1967.
10. H. RAMSEY, *Plastic buckling of a conical shell under axial compression*, Int. Journ. of Mech. Sci., 19, 5, 1977.
11. Z. WASZCZYŹYŹYN, *Wyboczenie trójwarstwowej płyty kołowej poza zakresem sprężystym*, Mech. Teoret. Stos., 4, 10, 1972.

12. J. ZIELNICA, *Analiza stateczności trójwarstwowej sprężysto-plastycznej powłoki stożkowej*, III Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Materiały, s. 335-342, Łódź 1979.
13. J. ZIELNICA, *Stateczność powłoki stożkowej poza granicą sprężystości*, Rozpr. Inżyn., 20, 3, 1972.
14. J. ZIELNICA, *Stan krytyczny sprężysto-plastycznej powłoki stożkowej przy obciążeniu złożonym*, Rozpr. Inżyn. 28, 3, 1980.
15. M. ŻYCZKOWSKI, *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, PWN, Warszawa 1973.

## Резюме

## ВЫПУЧИВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ ПРИ СЛОЖНОЙ НАГРУЗКЕ

Работа содержит решение задачи потери устойчивости в упруго-пластической области трехслойной конической оболочки. Предполагается, что в момент выпучивания несущие слой оболочки упругие или пластические, тогда как ядро остается упругим. Уравнения введены с учетом как деформационной теории пластичности, так и теории пластического течения приращеня. Учитывалась жесткость изгиба несущих слоев. Основная система уравнений решена с помощью метода ортогонализации.

Полученные решения позволяют определить критическую нагрузку для оболочки находящейся в упругом упруго-пластическом или пластическом состоянии. Результаты расчетов иллюстрируются графиками.

## SUMMARY

## BUCKLING OF A SANDWICH CONICAL SHELL BEYOND THE ELASTIC LIMIT UNDER COMBINED LOAD

In the paper the problem of an elastic-plastic stability loss for the sandwich conical shell is investigated. It is assumed that in the moment of buckling the load-carrying faces are elastic or plastic, and the core remains elastic. The equations are obtained on the basis of both the deformation theory and the plastic flow (incremental) theory. The flexural stiffness of the faces is taken into account. The basic equations are solved by the orthogonalization method, with using the Shanley concept of the growing load. The equations obtained enable the prediction of the critical load for a shell being in the state of buckling in elastic, elastic-plastic, or in fully plastic state of stresses. The results of calculations are presented by graphs.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA  
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 17 kwietnia 1980 r.*