

METODA TRYGNOMETRYCZNYCH SZEREGÓW KONTUROWYCH W ZASTOSOWANIU DO UTWIERDZONYCH PŁYT O DOWOLNYM KONTURZE⁽¹⁾

ANDRZEJ ZIELIŃSKI i MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

W pracy przedstawiono pewną ogólną metodę rozwiązywania zagadnień płyt i powłok o dowolnym konturze. Polega ona na rozszerzeniu danego elementu powierzchniowego do kształtu prostego elementu pomocniczego, poddanego jednakże na danym konturze odpowiednim obciążeniom kompensacyjnym realizującym na nim rzeczywiste warunki brzegowe. Jako przykład ogólnego schematu rozwiązania rozpatrzono płytę o brzegach utwierdzonych. Została ona zastąpiona pomocniczą płytą prostokątną o brzegach swobodnie podpartych, którą poddano działaniu zarówno obciążeń zewnętrznych płyty rzeczywistej, jak i nieznanymi obciążeniami kompensacyjnymi o charakterze dystrybucyjnym, rozwiniętych w podwójne sinusowe szeregi Fouriera. Z warunków brzegowych rzeczywistego elementu otrzymano równania całkowe, które po rozwinięciu funkcji obciążeń kompensacyjnych w pojedynczy szereg Fouriera wzdłuż konturu przeszły w równania algebraiczne na niewiadome współczynniki rozwinięć tych funkcji. Rozwiązano szereg przykładów numerycznych będących zastosowaniem omówionej metody do badania małych ugięć sprężystych i stateczności płyt.

I. PRZEGLĄD STOSOWANYCH W ZAGADNIENIU METOD OBLICZENIOWYCH

Wśród stosowanych dotychczas metod obliczenia elementów konstrukcji powierzchniowych o krzywoliniowym konturze można wyodrębnić pewne grupy charakteryzujące się różnym podejściem do zagadnienia. Pierwszą z nich stanowią rozwiązania oparte na zasadzie dyskretyzacji obiektu zarówno w sensie matematycznym (metoda różnic skończonych i jej liczne modyfikacje [9 i 10]), jak i fizycznym (metoda elementów skończonych [4 i 13]). W obu przypadkach rozwiązywanie problemów płyt i powłok o dowolnym konturze napotyka na trudności obliczeniowe możliwe do pokonania przy zastosowaniu bardziej zaawansowanych wariantów powyższych metod. Stosowanie ich prostej realizacji (np. regularna siatka lub trójkątne elementy) może prowadzić do istotnych błędów.

Druga grupa rozwiązań wiąże się z koncepcją zamiany problemu równań różniczkowych w obszarze o krzywoliniowym konturze na równania całkowe na tym konturze—przy wykorzystaniu funkcji Greena danego problemu oraz zasady wzajemności prac F. Bettiego. Na podstawie powyższej koncepcji rozwinęła się szeroko w ostatnich latach metoda potencjału oraz jej liczne realizacje, jak metoda granicznych równań całkowych [23] czy metoda pól singularnych [5]. W metodzie

⁽¹⁾ Praca wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12-11.4

potencjału pojawia się również koncepcja «rozszerzonego układu», tj. modelowania warunków brzegowych ciała rzeczywistego w przestrzeni rozszerzonej poza jego granice [20].

Ostatnią grupę rozwiązań stanowią metody oparte na specjalnym oryginalnym podejściu do zagadnienia. Należy tu wymienić ciekawą z matematycznego punktu widzenia, lecz kłopotliwą w stosowaniu, metodę odwzorowań konforemnych M. M. BANERJEE [3] oraz metodę linii stałego ugięcia J. MAZUMDARA [11 i 12], dogodną w przypadku, gdy kontur i linie stałego ugięcia należą do tej samej rodziny krzywych. Stosunkowo dużą popularność zdobywa sobie należąca również do tej grupy numeryczna metoda opisujących kontur algebraiczno-logicznych R -funkcji W. Ł. RWACZEWA [25] doprowadzająca do aproksymacji funkcji ugięcia wielomianami Czebyszewa, których współczynniki autor proponuje obliczać przy wykorzystaniu metody Ritz'a.

Na pograniczu wspomnianych wyżej grup rozwiązań znajduje się metoda rozszerzenia danego układu [19 i 22], która powstała w zasadzie odrębnie od wspomnianej wcześniej metody potencjału. Jej ideą jest rozbudowa badanego obiektu poza jego rzeczywiste granice, tak aby nowo powstały, pomocniczy obiekt uzyskał granice o dogodnych warunkach brzegowych. Realizacja granic (warunków brzegowych) rzeczywistego obiektu następuje przez przyłożenie na nich odpowiednio dobranych obciążeń kompensacyjnych, przy czym wartości tych obciążeń są obliczane właśnie z równań określających brzegowe warunki tego obiektu.

Dotychczasowe jej realizacje opierały się na dyskretyzacji zagadnienia. A. M. KAKUSZADZE i J. S. ESADZE rozwiązyali m.in. szereg płyt o złożonym kształcie konturu [21] wykorzystując funkcje Greena dla wprowadzenia kompensujących obciążeń na hipotetyczną płytę kołową o brzegach utwierdzonych lub swobodnie podpartych (nawiązanie do metody potencjału).

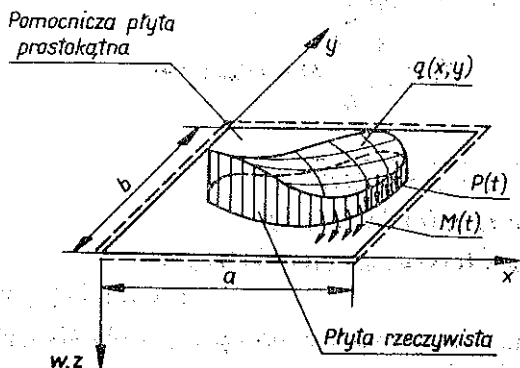
Idea rozszerzenia danego układu jest punktem wyjścia do metody proponowanej w obecnej pracy. Rozwiązanie uzyskano tu na podstawie analitycznej za pomocą pewnej kombinacji podwójnych i pojedynczych szeregów trygonometrycznych, rezygnując z pracochłonnej zazwyczaj dyskretyzacji obiektu. Myśl przewodnia przedstawionej metody została wstępnie zasygnalizowana na konferencjach naukowych w Warnie [18] i Gołuniu [16]. Niniejsza publikacja jest pierwszą zawierającą bardziej kompleksowe jej ujęcie w zastosowaniu do elementów płytowych o brzegach utwierdzonych (realizacja warunków przemieszczeniowych jest w omawianej metodzie najprostsza). Rozwiązania dla innych warunków brzegowych oraz zagadnienia powłokowe będą przedmiotem odrębnych publikacji.

2. MAŁE UGIĘCIA SPRĘŻYSTE UTWIERDZONEJ PŁYTY O DOWOLNYM KONTURZE

2.1. Ogólna koncepcja rozwiązania

Przebieg rozwiązania został przedstawiony na przykładzie zginania płyty utwierdzonej. Rzeczywisty obiekt, płytę o krzywoliniowym brzegu, zastąpiono rozszerzoną pomocniczą płytą prostokątną (rys. 1) swobodnie podpartą o warunkach brzegowych szczególnie korzystnych dla stosowania podwójnych sinusowych szeregów

Fouriera (metoda Naviera). Zdecydowano się stosować za Z. KĄCZKOWSKIM [6] i V. PANCEM [14] lewoskrętny układ współrzędnych. Na rzeczywistym konturze k , określonym parametrycznymi następującymi równaniami:



Rys. 1

$$(2.1) \quad x = x_s(t), \quad y = y_s(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

przyłożono obciążenia kompensujące: normalną do płaszczyzny środkowej siłę $P(t)$ oraz moment $M(t)$ o wektorze stycznym do konturu k . W przypadku stosowania przemieszczeniowego równania w postaci

$$(2.2) \quad \nabla^4 w = \frac{q}{D}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

gdzie ν oznacza współczynnik Poissona i w przypadku idących za tym uproszczeń, powyższe dwa rodzaje obciążeń całkowicie modelują każdy rodzaj warunków brzegowych. Odnośnie znaków obciążeń kompensacyjnych ustalono, że za dodatnie będzie się uważać siłę $P(t)$ o zwrocie zgodnym z osią z oraz moment $M(t)$ o wektorze, którego zwrot jest zgodny ze zwrotem wektora $(dx/dt, dy/dt)$ w danym punkcie.

Pomocnicza płyta prostokątna spełnia warunki brzegowe Naviera. Przedstawienie więc obciążeń w formie ich rozwinięcia w podwójny sinusowy szereg Fouriera

$$q(x, y) = \sum_{mn} a_{mn}^q \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$(2.3) \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}$$

$$a_{mn}^q = \frac{4}{ab} \int_F \int q(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dx \, dy$$

daje odpowiedź w postaci rozwinięcia funkcji ugięć płyty:

$$(2.4) \quad w(x, y) = \frac{1}{D} \sum_{mn} \xi_{mn} a_{mn}^q \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$\xi_{mn} = \frac{1}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}$$

Obciążenia kompensujące $P(t)$ i $M(t)$ są, w sensie obciążeń ciągłych, wielkościami dystrybucyjnymi których współczynniki rozwinięć mają postać [17]:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} a_{mn}^P &= \frac{4}{ab} \int_{t_0}^{t_1} P(t) \vartheta_{mn}(t) \Gamma(t) dt, \\ a_{mn}^M &= \frac{4}{ab} \int_{t_0}^{t_1} M(t) \kappa_{mn}(t) dt, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \Gamma(t) &= \sqrt{[x'_s(t)]^2 + [y'_s(t)]^2}, \\ \vartheta_{mn}(t) &= \sin \alpha_m x_s(t) \sin \beta_n y_s(t), \\ \kappa_{mn}(t) &= \alpha_m y'_s(t) \cos [\alpha_m x_s(t)] \sin [\beta_n y_s(t)] - \\ &\quad - \beta_n x'_s(t) \sin [\alpha_m x_s(t)] \cos [\beta_n y_s(t)]. \end{aligned}$$

Powyższe obciążenia wraz z układem zewnętrznym obciążeń płyty $q(x, y)$ wywołują na krzywej (2.1) ugięcie

$$(2.7) \quad w(t) = \frac{1}{D} \sum_{mn} \xi_{mn} (a_{mn}^q + a_{mn}^P + a_{mn}^M) \vartheta_{mn}(t),$$

oraz następujący kąt ugięcia w kierunku l prostopadłym do niej:

$$(2.8) \quad w'_L(t) = \frac{1}{D\Gamma(t)} \sum_{mn} \xi_{mn} (a_{mn}^q + a_{mn}^P + a_{mn}^M) \kappa_{mn}(t).$$

Składowe tensora momentów w płycie wyrażą się wzorami

$$(2.9) \quad \begin{aligned} m_x(x, y) &= \sum_{mn} (\alpha_m^2 + \tilde{\nu} \beta_n^2) \xi_{mn} (a_{mn}^q + a_{mn}^P + a_{mn}^M) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ m_y(x, y) &= \sum_{mn} (\beta_n^2 + \tilde{\nu} \alpha_m^2) \xi_{mn} (a_{mn}^q + a_{mn}^P + a_{mn}^M) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ m_{xy}(x, y) &= -(1 - \tilde{\nu}) \sum_{mn} \alpha_m \beta_n \xi_{mn} (a_{mn}^q + a_{mn}^P + a_{mn}^M) \cos \alpha_m x \cos \beta_n y, \end{aligned}$$

które są określone poprawnie w całym obszarze płyty poza krzywą (2.1), ponieważ wprowadzony moment kompensacyjny $M(t)$ określony na krzywej wywoła odpowiedni skok funkcji momentów zginających. Na podstawie wzorów (2.9) otrzymamy więc średnią arytmetyczną lewo- i prawostronnej granicy tych funkcji na krzywej k , co wystarczy, jak wykazano, do określenia tych granic. W przypadku płyty utwierdzonej nie jest to konieczne, ponieważ moment kompensacyjny jest jednocześnie momentem utwierdzenia (jeżeli zewnętrzną część płyty pomocniczej pozostawimy nieobciążoną (rys. 1).

Jak wcześniej wspomniano, niewiadome obciążenia kompensacyjne $P(t)$ i $M(t)$ można wyliczyć z warunków brzegowych na konturze płyty. W przypadku utwierdzenia warunki te przyjmują postać

$$(2.10) \quad w(t) = 0, \quad w'_l(t) = 0$$

i tworzą układ równań całkowych Fredholma pierwszego rodzaju na niewiadome funkcje $P(t)$ i $M(t)$. Postać tych równań uwidacznia się po wstawieniu funkcji (2.5), (2.7), (2.8) do warunków (2.10).

W celu rozwiązania układu (2.10) rozwinięto powtórnie funkcje $w(t)$ i $w'_i(t)$, tym razem w pojedynczy szereg Fouriera wzdłuż konturu rzeczywistej płyty. Rozwinięcia te mają postać:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} w(t) &= \sum_{\mu} [w_{c\mu} \cos \mu\gamma(t) + w_{s\mu} \sin \mu\gamma(t)], \\ w'_i(t) &= \sum_{\mu} [w'_{c\mu} \cos \mu\gamma(t) + w'_{s\mu} \sin \mu\gamma(t)], \end{aligned}$$

gdzie

$$\gamma(t) = \frac{2\pi \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau}{\int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau}$$

$\gamma(t)$ jest modyfikowanym parametrem zmieniającym się w granicach $0 \leq \gamma(t) \leq 2\pi$. Występująca tu funkcja podcałkowa jest przykładowo równa $F(t) = \Gamma(t)$ jeżeli stosujemy rozwinięcie bezpośrednio po łuku krzywej, lub $F(t) = 1$, jeżeli rozwinięcie następuje po parametrze t (odwzorowanie na przestrzeń zmienności parametru). Ta druga forma funkcji $F(t)$ jest często korzystna, gdyż upraszcza jej postać, nie wprowadzając z reguły istotnych trudności w przebiegu rozwiązania.

Współczynniki rozwinięcia funkcji $w(t)$ i $w'_i(t)$ w pojedynczy szereg Fouriera wyraża się wzorami

$$(2.12) \quad \begin{aligned} w_{c\mu} &= \frac{1}{D\lambda_{\mu}} \sum_{mn} \xi_{mn} (a_{mn}^q + a_{mn}^p + a_{mn}^M) \int_{t_0}^{t_1} \vartheta_{mn}(t) \cos [\mu\gamma(t)] F(t) dt, \\ w_{s\mu} &= \frac{1}{D\lambda_{\mu}} \sum_{mn} \xi_{mn} (a_{mn}^q + a_{mn}^p + a_{mn}^M) \int_{t_0}^{t_1} \vartheta_{mn}(t) \sin [\mu\gamma(t)] F(t) dt, \\ w'_{c\mu} &= \frac{1}{D\lambda_{\mu}} \sum_{mn} \xi_{mn} (a_{mn}^q + a_{mn}^p + a_{mn}^M) \int_{t_0}^{t_1} \kappa_{mn}(t) \cos [\mu\gamma(t)] \frac{F(t)}{\Gamma(t)} dt, \\ w'_{s\mu} &= \frac{1}{D\lambda_{\mu}} \sum_{mn} \xi_{mn} (a_{mn}^q + a_{mn}^p + a_{mn}^M) \int_{t_0}^{t_1} \kappa_{mn}(t) \sin [\mu\gamma(t)] \frac{F(t)}{\Gamma(t)} dt, \\ \lambda_{\mu} &= \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau \quad \text{dla} \quad \mu = 0, \\ \lambda_{\mu} &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau \quad \text{dla} \quad \mu = 1, 2, 2, \dots \end{aligned}$$

Niewiadome funkcje $P(t)$ i $M(t)$ występujące we współczynnikach a_{mn}^p i a_{mn}^M pod znakiem całki rozwinięto w podobny sposób:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} P(t) &= \sum_{\mu} \{P_{c\mu} \cos [\mu\gamma(t)] + P_{s\mu} \sin [\mu\gamma(t)]\}, \\ M(t) &= \sum_{\mu} \{M_{c\mu} \cos [\mu\gamma(t)] + M_{s\mu} \sin [\mu\gamma(t)]\}. \end{aligned}$$

sinbraxS
stgiodo doyn
ob hassilde

Rozwinięcia te wprowadzone do wzorów (2.5) uwidocznia się we współczynnikach (2.12). Jeżeli ograniczymy je do $\mu = \mu^*$ i napiszemy warunki przyjmowania wartości zero przez $(2\mu^* + 1)$ pierwszych współczynników rozwinięć $w(t)$ i $w'_1(t)$, to otrzymamy układ $(4\mu^* + 2)$ liniowych równań algebraicznych o $(4\mu^* + 2)$ niewiadomych współczynnikach $P_{c\mu}$, $P_{s\mu}$, $M_{c\mu}$, $M_{s\mu}$

$$(2.14) \quad \sum_{mn} \xi_{mn} a_{mn}^{-q} \bar{A}_{jmnv} = \sum_{i=c,s} \sum_{\mu=0}^{\mu^*} P_{i\mu} \sum_{mn} \xi_{mn} A_{imn\mu} \bar{A}_{jmnv} + \sum_{i=c,s} \sum_{\mu=0}^{\mu^*} M_{i\mu} \sum_{mn} \xi_{mn} B_{imn\mu} \bar{A}_{jmnv}$$

$$\sum_{mn} \xi_{mn} a_{mn}^{-q} \bar{B}_{jmnv} = \sum_{i=c,s} \sum_{\mu=0}^{\mu^*} P_{i\mu} \sum_{mn} \xi_{mn} A_{imn\mu} \bar{B}_{jmnv} + \sum_{i=c,s} \sum_{\mu=0}^{\mu^*} M_{i\mu} \sum_{mn} \xi_{mn} B_{imn\mu} \bar{B}_{jmnv}$$

$$j = c, s \quad v = 0, 1, 2, \dots, \mu^*$$

$$\bar{a}_{mn}^q = -\frac{ab}{4} a_{m\mu}^q$$

gdzie

$$(2.15) \quad A_{cmn\mu} = \int_{t_0}^{t_1} \vartheta_{mn}(t) \cos[\mu\gamma(t)] \Gamma(t) dt,$$

$$\bar{A}_{cmn\mu} = \int_{t_0}^{t_1} \vartheta_{mn}(t) \cos[\mu\gamma(t)] F(t) dt,$$

$$A_{smn\mu} = \int_{t_0}^{t_1} \vartheta_{mn}(t) \sin[\mu\gamma(t)] \Gamma(t) dt,$$

$$\bar{A}_{smn\mu} = \int_{t_0}^{t_1} \vartheta_{mn}(t) \sin[\mu\gamma(t)] F(t) dt,$$

$$B_{cmn\mu} = \int_{t_0}^{t_1} \kappa_{mn}(t) \cos[\mu\gamma(t)] dt,$$

$$\bar{B}_{cmn\mu} = \int_{t_0}^{t_1} \kappa_{mn}(t) \cos[\mu\gamma(t)] \frac{F(t)}{\Gamma(t)} dt,$$

$$B_{smn\mu} = \int_{t_0}^{t_1} \kappa_{mn}(t) \sin[\mu\gamma(t)] dt,$$

$$\bar{B}_{smn\mu} = \int_{t_0}^{t_1} \kappa_{mn}(t) \sin[\mu\gamma(t)] \frac{F(t)}{\Gamma(t)} dt.$$

Zasadnicza struktura równań (2.14) odnosi się do różnych kształtów płyty i różnych obciążeń zewnętrznych. Umożliwia to opracowanie uniwersalnego algorytmu obliczeń, do którego obciążenia płyt i równania parametryczne ich konturów

byłyby wprowadzane w formie funkcji zewnętrznych. Jeżeli kontur składa się z kilku odcinków opisywanych różnymi równaniami parametrycznymi, to możemy całki (2.15) traktować jako sumy całek po poszczególnych odcinkach, a pojedyncze szeregi (2.11) i (2.13) wiązać z całością konturu. W przypadku konturów wielospójnych układ (2.14) rozbudowuje się. Korzystając z zasady superpozycji żądamy wówczas spełnienia warunków brzegowych na każdym z konturów. Można również w analogiczny sposób rozwiązywać zagadnienia krzywoliniowych otworów, wzmocnień oraz stanów wymuszonych przemieszczeniem na krzywej.

Niezwykle ważnym elementem rozpatrywanej metody jest badanie zbieżności szeregów—rozwiązań i przybliżone określenie ich granicy. Zastosowanie szeregów Fouriera pozwala z jednej strony oprzeć się na matematycznych kryteriach ich zbieżności, z drugiej—numerycznie określać przybliżone ich granice. W tym celu dogodnie jest sporządzić »mapę zbieżności« szeregów—rozwiązań. Przy rozwiązaniu równań (2.14) zdecydowaną większość czasu procesora maszyny cyfrowej (od 95% do 99%) zajmuje obliczenie wartości całek (2.15). Można więc (po wypełnieniu tablic tych całek) niewielkim nakładem czasu otrzymać wydruki pośrednie (przy mniejszej liczbie wyrazów szeregu) i na podstawie tak sporządzonej mapy określić w przybliżeniu granicę szeregów—rozwiązań.

2.2. Płyty ortotropowe

Uwzględnienie ortotropii w płycie o dowolnym konturze nie wprowadza zasadniczych zmian do podanego wyżej ogólnego toku rozumowania. W przypadku rozważania małych ugięć sprężystych takich płyt równanie przemieszczeniowe przyjmuje postać [15]:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q,$$

gdzie

$$(2.16) \quad \begin{aligned} D_x &= \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}, & D_y &= \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}, \\ H &= D_{12} + 2D_{xy}, \\ D_{12} &= \frac{\nu_x E_y h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} = \frac{\nu_y E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}, \\ D_{xy} &= \frac{G_{xy} h^3}{12}. \end{aligned}$$

Stałych D_x , D_y , H nie można wynieść przed znak sumy (jak we wzorze (2.4)). Otrzymamy więc, uwzględniając powyższe sztywności, zmienioną postać współczynnika operatorowego

$$(2.17) \quad \epsilon_{mn}^{\text{ort}} = \frac{1}{D_x \alpha_m^4 + 2H \alpha_m^2 \beta_n^2 + D_y \beta_n^4},$$

który tutaj zastąpi wielkość ξ_{mn}/D występującą w przypadku płyt izotropowych.

Zmianie ulegną również wzory (2.9) określające składowe tensora momentów. Wyrażą się one w tym przypadku wzorami

$$(2.18) \quad \begin{aligned} m_x(x, y) &= \sum_{mn} (D_x \alpha_m^2 + D_{12} \beta_n^2) \xi_{mn}^{\text{ort}} (a_{mn}^q + a_{mn}^p + a_{mn}^M) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ m_y(x, y) &= \sum_{mn} (D_y \beta_n^2 + D_{12} \alpha_m^2) \xi_{mn}^{\text{ort}} (a_{mn}^q + a_{mn}^p + a_{mn}^M) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ m_{xy}(x, y) &= -2D_{xy} \sum_{mn} \alpha_m \beta_n \xi_{mn}^{\text{ort}} (a_{mn}^q + a_{mn}^p + a_{mn}^M) \cos \alpha_m x \cos \beta_n y. \end{aligned}$$

Całość dalszego rozumowania związanego z wymuszaniem odpowiednich warunków brzegowych na konturze płyty rzeczywistej jest analogiczna do przypadku płyt izotropowych.

2.3. Płyty o zmiennej sztywności

Aby rozważyć płytę o zmiennej sztywności i dowolnym konturze należy najpierw prześledzić takie rozwiązanie dla swobodnie podpartej płyty prostokątnej. Przemieszczeniowe równanie różniczkowe ma w tym przypadku postać

$$(2.19) \quad \nabla^2 (D \nabla^2 w) - (1 - \nu) L(D, w) = q,$$

gdzie

$$L(D, w) = \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Proponuje się rozwiązanie podobne do rozwiązania Z. KĄCZKOWSKIEGO [6], jednakże bez rozwijania danej funkcji sztywności $D(x, y)$ w podwójny szereg Fouriera.

Załóżmy wstępnie, że funkcja $D(x, y)$ jest w obszarze płyty ciągła i różniczkowalna. Po przedstawieniu nieznannej funkcji ugięcia $w(x, y)$ w prostokącie $K_1 (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$ w postaci podwójnego sinusowego szeregu Fouriera

$$(2.20) \quad w(x, y) = \sum_{mn} a_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y)$$

można wciągnąć niezależną od m i n funkcję $D(x, y)$ pod znak sumy

$$(2.21) \quad D(x, y) \nabla^2 w(x, y) = \sum_{mn} \eta_{mn} a_{mn} K_{mn}(x, y),$$

gdzie

$$\begin{aligned} \eta_{mn} &= \alpha_m^2 + \beta_n^2, \\ K_{mn}(x, y) &= -D(x, y) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y). \end{aligned}$$

Podobnie obliczamy

$$(2.22) \quad \begin{aligned} L(D, w) &= - \sum_{mn} a_{mn} H_{mn}(x, y), \\ H_{mn}(x, y) &= [\alpha_m^2 D_{yy}''(x, y) + \beta_n^2 D_{xx}''(x, y)] \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) + \\ &\quad + 2\alpha_m \beta_n D_{xy}''(x, y) \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y). \end{aligned}$$

Równanie (2.19) można więc z kolei napisać w postaci

$$(2.23) \quad \nabla^2 \sum_{mn} \eta_{mn} a_{mn} K_{mn}(x, y) + (1 - \tilde{\nu}) \sum_{mn} a_{mn} H_{mn}(x, y) = q(x, y).$$

Aby rozwiązać to równanie rozwinie my ponownie jego lewą i prawą stronę w podwójny sinusowy szereg Fouriera

$$(2.24) \quad \sum_{rs} \sum_{mn} \eta_{rs} \eta_{mn} a_{mn} F_{mnr s} \sin \alpha_r x \sin \beta_s y + \\ + (1 - \tilde{\nu}) \sum_{rs} \sum_{mn} a_{mn} G_{mnr s} \sin \alpha_r x \sin \beta_s y = \sum_{rs} a_{rs}^q \sin \alpha_r x \sin \beta_s y,$$

gdzie

$$F_{mnr s} = \frac{1}{4ab} \int_{K_1} \int K_{mn}(x, y) \sin(\alpha_r x) \sin(\beta_s y) dx dy, \\ G_{mnr s} = \frac{1}{4ab} \int_{K_1} \int H_{mn}(x, y) \sin(\alpha_r x) \sin(\beta_s y) dx dy.$$

Po porównaniu odpowiednich harmonicznyc h lewej i prawej strony równania (2.24) otrzymamy układy — w liczbie $r^* \times s^*$ — równań algebraicznych na $m^* \times n^*$ niewiadomych współczynników a_{mn}

$$(2.25) \quad \sum_{mn} a_{mn} [\eta_{rs} \eta_{mn} F_{mnr s} + (1 - \nu) G_{mnr s}] = a_{rs}^q, \\ r = 1, 2, \dots, r^*, \quad s = 1, 2, \dots, s^*.$$

Dla danej płyty o dowolnym kształcie konturu (2.1) musimy przyłożyć na nim obciążenie kompensacyjne (2.13). Po wprowadzeniu oznaczeń (2.15) układ równań (2.25) przyjmuje postać

$$(2.26) \quad \sum_{mn} a_{mn} [\eta_{rs} \eta_{mn} F_{mnr s} + (1 - \nu) G_{mnr s}] = a_{rs}^q + \sum_{i=c, s} \sum_{\mu} [P_{i\mu} A_{irs\mu} + M_{i\mu} B_{irs\mu}].$$

Powyższy układ $r^* \times s^*$ równań zawiera $m^* \times n^* + (4\mu^* + 2)$ niewiadomych. Uzupełniający system równań dostarczą nam warunki brzegowe na konturze płyty rzeczywistej. W przypadku utwierdzenia można je będzie napisać w postaci

$$(2.27) \quad w_{j\nu} = \frac{1}{\lambda_\nu} \sum_{mn} a_{mn} A_{jmn\nu} = 0, \quad j = c, s, \\ w'_{j\nu} = \frac{1}{\lambda_\nu} \sum_{mn} a_{mn} B_{jmn\nu} = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \nu^*.$$

Otrzymany układ równań (2.26)–(2.27) jest pełnym układem algebraicznym na niewiadome współczynniki a_{mn} , $P_{i\mu}$ i $M_{i\mu}$.

Aby rozszerzyć powyższe rozwiązania na klasę sztywności nieciągłych lub nieróżniczkowalnych wygodnie jest zrezygnować z wciągnięcia sztywności $D(x, y)$ pod znak sumy (wzór 2.22), ponieważ w dalszym procesie różniczkowania takiego

szeregu (2.23, 2.24) należałoby te nieciągłości uwzględnić (różniczkowanie wyraz po wyrazie daje w tym przypadku szeregi rozbieżne odwzorujące tzw. pochodną dystrybucyjną [7 i 17]). Przedstawimy wówczas pierwszy wyraz równania (2.19) w postaci

$$(2.28) \quad \nabla^2 (D\nabla^2 w) = \nabla^2 D\nabla^2 w + 2 \left(D'_x \frac{\partial}{\partial x} + D'_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla^2 w + D\nabla^4 w,$$

i po rozwinięciu w szeregu otrzymujemy

$$\nabla^2 (D\nabla^2 w) = \sum a_{mn} T_{mn}(x, y),$$

gdzie

$$(2.29) \quad T_{mn}(x, y) = \{ D(x, y) \eta_{mn}^2 - [D''_{xx}(x, y) + D''_{yy}(x, y)] \eta_{mn} \} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) - \\ - 2\eta_{mn} [D'_x(x, y) \alpha_m \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) + \\ + D'_y(x, y) \beta_n \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y)].$$

Równanie (2.23) przyjmuje postać następującą

$$(2.30) \quad \sum_{mn} a_{mn} [T_{mn}(x, y) + (1 - \bar{\nu}) H_{mn}(x, y)] = q(x, y).$$

Dalszy tok postępowania jest analogiczny do poprzedniego, jedynie całki w obszarze prostokąta K , ulegną rozbitcu na całki po odpowiednich obszarach ciągłości funkcji podcałkowych. Omijamy tutaj kłopotliwe różniczkowanie podwójnego szeregu odwzorowującego funkcję ze skokiem (funkcja $D(x, y)$ jest różniczkowana bezpośrednio).

3. STATECZNOŚĆ PŁYT

Problem stateczności pojawia się w płytach przy obciążeniu ich siłami stycznymi do płaszczyzny środkowej. Przy ich uwzględnieniu równanie przemieszczeniowe przyjmuje postać:

$$(3.1) \quad D\nabla^4 w = q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

w której siły N_x, N_y, N_{xy} określają błonowy stan naprężeń płyty. W pracy zajmiemy się przypadkami wyboczenia płyt o dowolnym kształcie konturu obciążonych jednoosiowym lub dwuosiowym jednorodnym ściskaniem w płaszczyźnie środkowej:

$$(3.2) \quad N_x = -N, \quad N_y = -cN, \quad N_{xy} = 0,$$

$$c = \frac{N_y}{N_x} = \text{const.}$$

Rozwiązanie przypadku $N_{xy} \neq 0$ wymaga stosowania pełnych szeregów Fouriera (mieszana pochodna $\partial^2 w / \partial x \partial y$ powoduje przejście szeregu sinusowego w cosinusowy), natomiast przypadki wyboczenia przy różnym od stałego rozkładzie sił

błonowych w stanie podstawowym (przed wyboczeniem) wiążą się z rozwiązaniem stanu tarczowego, co komplikuje zagadnienie.

Biorąc pod uwagę założenia (3.2) oraz fakt, że obciążenia normalne do płaszczyzny środkowej będą wyłącznie obciążeniami kompensacyjnymi modelującymi warunki brzegowe rzeczywistej płyty, otrzymamy równanie (3.1) w postaci

$$(3.3) \quad D \sum_{mn} a_{mn} [m_{mn}^2 - \frac{N}{D} (\alpha_m^2 + c\beta_n^2)] \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) = \\ = \sum_{mn} \sum_{i=c,s} \sum_{\mu} (P_{i\mu} A_{imn\mu} + M_{i\mu} B_{imn\mu}) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y),$$

gdzie wprowadzono rozwinięcie (2.20) oraz oznaczenia (2.13) i (2.15).

Z kolei założymy warunki brzegowe rzeczywistej płyty i otrzymamy na ich podstawie układ równań algebraicznych na niewiadome współczynniki $P_{i\mu}$, $M_{i\mu}$. Układ ten, analogiczny do (2.14), będzie teraz układem nieoznaczonym, ponieważ zeruje się macierz wyrazów wolnych (zewewnętrzne obciążenie normalne do płyty $q(x, y) = 0$). Dla płyty utwierdzonej przesuwnie przyjmie on postać

$$(3.4) \quad \sum_{i=c,s} \sum_{\mu=0}^{\mu^*} P_{i\mu} \sum_{mn} \xi_{mn} A_{imn\mu} \bar{A}_{jmnv} + \sum_{i=c,s} \sum_{\mu=0}^{\mu^*} M_{i\mu} \sum_{mn} \xi_{mn} B_{imn\mu} \bar{A}_{jmnv} = 0, \\ \sum_{i=c,s} \sum_{\mu=0}^{\mu^*} P_{i\mu} \sum_{mn} \xi_{mn} A_{imn\mu} \bar{B}_{jmnv} + \sum_{i=c,s} \sum_{\mu=0}^{\mu^*} M_{i\mu} \sum_{mn} \xi_{mn} B_{imn\mu} \bar{B}_{jmnv} = 0,$$

gdzie

$$\xi_{mn} = \frac{1}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 - \frac{N}{D} (\alpha_m^2 + c\beta_n^2)}.$$

Układ ten ma rozwiązanie niezerowe jedynie w przypadku, gdy jego wyznacznik główny równa się zeru

$$(3.5) \quad W(N) = 0.$$

Otrzymujemy więc równanie na występującą w nim niewiadomą siłę N . Ciąg rozwiązań równania (3.5) przedstawia ciąg obciążeń krytycznych płyty. Należy jednak zwrócić uwagę, że możliwość niezerowych rozwiązań układu (3.4), tzn. możliwość utraty stateczności płyty dotyczy zarówno płyty rzeczywistej, jak również odciętej części płyty pomocniczej. Jeżeli interesują nas niższe (pierwsza lub druga) siły krytyczne, wystarczy dobrać płytę pomocniczą możliwie małą (np. opisaną na płycie rzeczywistej). Natomiast jeśli nie mamy pewności, czy otrzymany wynik dotyczy części rzeczywistej, czy odciętej, konieczny jest dodatkowy test porównujący, np. energię zginania poszczególnych fragmentów płyty, lub inną miarę ich deformacji.

4. ZAGADNIENIA DYNAMICZNE PŁYT

Aby rozważyć zagadnienie dynamiki płyt, gdzie obciążenie i ugięcie są funkcjami czasu należy w równaniu (2.2) uwzględnić dodatkowe obciążenie przypadającą na pole jednostki powierzchni płyty siłą bezwładności

$$(4.1) \quad D\nabla^4 w(x, y, t) + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = q(x, y, t),$$

gdzie γ oznacza ciężar właściwy materiału płyty, g przyspieszenie ziemskie oraz ∇^4 bilaplansjan uwzględniający różniczkowanie względem x i y .

W przypadku płyt o dowolnym kształcie konturu, obciążenie $q(x, y, t)$ będzie składało się z dwóch obciążeń o różnym charakterze:

$$(4.2) \quad q(x, y, t) = q^k(x, y, t) + q^w(x, y, t),$$

gdzie $q(x, y, t)$ oznacza obciążenie kompensacyjne modelujące warunki brzegowe (o charakterze biernym) oraz $q^w(x, y, t)$ obciążenie wymuszające (czynne).

Rozpatrzmy drgania swobodne płyt ($q^w = 0$). Ze względu na bierny charakter obciążeń kompensacyjnych możemy ich zmienność w czasie uwarunkować zmiennością przemieszczeń

$$(4.3) \quad \begin{aligned} w(x, y, t) &= w(x, y) \sin(\omega t + \varphi), \\ q^k(x, y, t) &= Q(x, y) \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

gdzie ω oznacza częstość drgań własnych płyty oraz φ zależne od warunków początkowych przesunięcia fazowe.

Otrzymamy równanie różniczkowe amplitud w postaci

$$(4.4) \quad D\nabla^4 w(x, y) - k^2 \omega^2 w(x, y) = Q(x, y).$$

gdzie

$$k^2 = \frac{\gamma h}{g}.$$

Po rozwinięciu powyższych amplitud ugięć i kompensacyjnych obciążeń w podwójne sinusowe szeregi Fouriera otrzymamy:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} D \sum_{mn} a_{mn} [\eta_{mn}^2 - k^2 \omega^2] \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) &= \\ &= \sum_{mn} \sum_{l=c, s} \sum_{\mu} (P_{l\mu} A_{lmnu} + M_{l\mu} B_{lmnu}) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y). \end{aligned}$$

Powyższe równanie jest z matematycznego punktu widzenia analogiczne do równania (3.3). Dlatego też dalszy tok postępowania będzie podobny do przypadku badania utraty stateczności płyty. Niewiadome współczynniki rozwinięć obciążeń kompensacyjnych wystąpią w układzie równań wynikających z warunków brzego-

wych płyty rzeczywistej. Przykładowo dla płyty utwierdzonej przyjmą one postać (3.4) przy zmienionym współczynniku

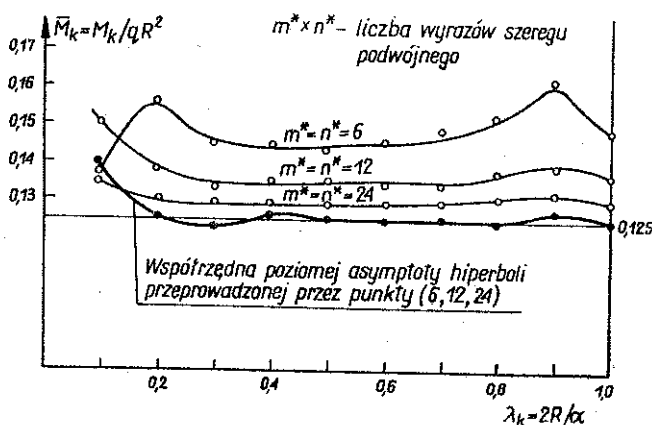
$$(4.6) \quad \zeta_{mn}^* \rightarrow \zeta_{mn}^{\text{dyn}} = \frac{1}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 - \frac{k^2 \omega^2}{D}}$$

Ten nieoznaczony układ równań ma rozwiązania niezerowe przy wyznaczniku głównym równym zeru. Można więc z tak postawionego równania obliczyć ciąg częstości krytycznych płyty. Należy jednak pamiętać, że podobnie jak w przypadku stateczności otrzymujemy rozwiązanie zarówno dla płyty rzeczywistej jak i odciętych fragmentów płyty pomocniczej. Zaleca się więc stosowanie możliwie małych płyt pomocniczych (opisanych na rzeczywistych), a w przypadkach wątpliwych wprowadzenie testów porównujących np. amplitudy energii zginania poszczególnych fragmentów płyty.

5. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

Omówioną metodą rozwiązano kilka przykładów numerycznych tak zazwyczaj dobranych, aby znane były ich rozwiązania w zamkniętej formie. Pozwoliło to w przypadkach szczególnych upewnić się co do prawidłowości ogólnych programów i oszacować dokładność metody. Obliczenia wykonywano w większości na maszynie cyfrowej CYBER 72 w języku FORTRAN IV.

Do przebadania najkorzystniejszych proporcji płyt pomocniczej i rzeczywistej wykorzystano obciążoną jednostajnym obciążeniem ciągłym q płytę kołową rozszerzoną do kwadratowej. Jak widać na rys. 2 proporcje te można dobierać stosunkowo



Rys. 2

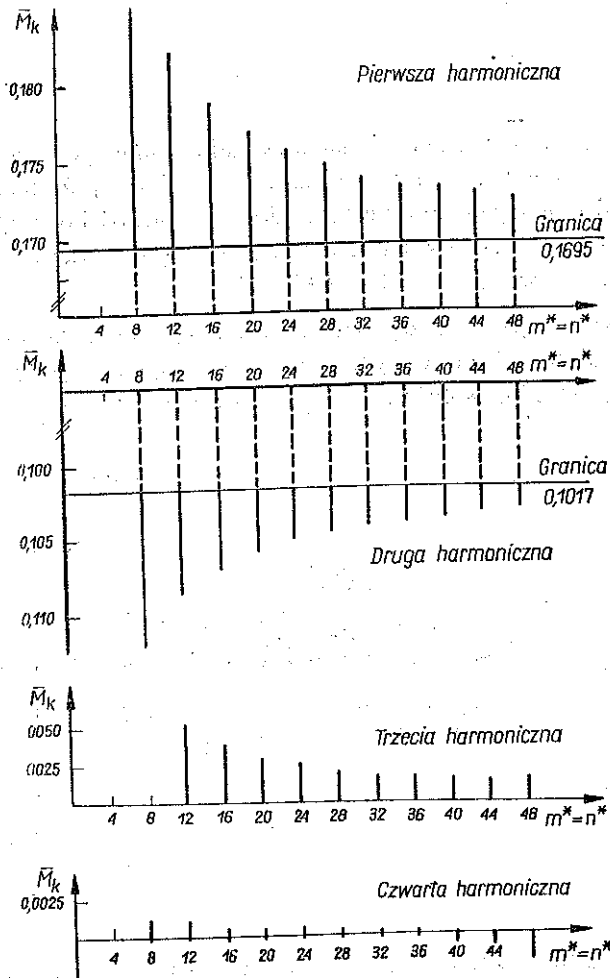
dowolnie ze środkowej części przedziału $\lambda_k = 2R/a$ ($0,3 \leq \lambda_k \leq 0,8$). Dla większych λ_k szeregi stają się nieco wolniej zbieżne, a dla mniejszych mogą być nawet rozbieżne.

Z kolei rozważono obciążoną analogicznie płytę eliptyczną o proporcjach $R_1/R_2=0,5$ rozszerzoną do prostokątnej ($\lambda_e=2R_1/a=2R_2/b=0,5$). Problem ten posiada rozwiązanie zamknięte [15], z którego można wyliczyć:

$$(5.1) \quad \bar{M}_e(t) = \frac{M(t)}{qR_1^2} = 0,1695 - 0,1017 \cos 2t,$$

$$\bar{P}_e(t) = \frac{P(t)}{qR_1} = 1,0 + 0,7625 \cos 2t.$$

Różne od zera są tu więc jedynie zerowa i druga harmoniczna rozwinięcia obciążeń kompensacyjnych względem parametru t . W przykładzie dobrano $m^*=n^*=48$, $\mu^*=4$, co oznacza $m=1, 3, 5, \dots, 95$, $n=1, 3, 5, \dots, 95$, $\mu=0, 2, 4, 6$. Tak więc harmoniczne $\mu=4, 6$ można uważać za zakłócenia wyników i śledzić ich zanikanie (wzory (5.1) wyprowadzono po obserwacji mapy zbieżności przykładu).

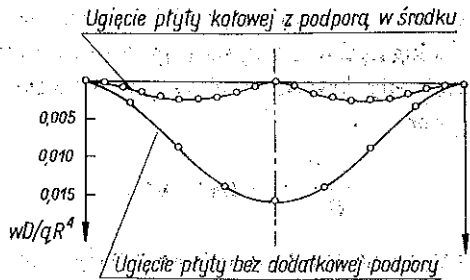


Rys. 3

Rys. 3 przedstawia proces zbieżności poszczególnych harmonicznych (amplitud) bezwymiarowego momentu utwierdzenia płyty. Widać wyraźnie zmierzanie zerowej i drugiej harmonicznej do granic (5.1) oraz oscylację wyższych harmonicznych wokół zera.

Dla rozwiązania zamkniętego maksymalny bezwymiarowy moment utwierdzenia wynosi $M_{\max}=0,2712$. W rozwiązaniu metodą szeregów uzyskano bezpośrednio $M_{\max}=0,2752$, co daje 1,5% błędu. Zastosowanie jednej z procedur określających przybliżoną granicę szeregu pozwala na zmniejszenie błędu poniżej 1% (np. procedura AITKENA [1, 24] przez punkty $m^*=n^*=16, 32, 48$ daje $M_{\max}=0,2719$, tzn. 0,27% błędu).

Ostatnim z przykładów numerycznych dla zginania płyt utwierdzonych na brzegu jest analogiczna do poprzedniej płyta kołowa podparta dodatkowo w środku. Do układu (2.14) dochodzi warunek zerowania się ugięcia w środku płyty pozwalający wyliczyć dodatkową niewiadomą, reakcję środkowej podpory. Jak obliczono, reakcja ta równa jest $F_{sk}=F/q\pi R^2=0,246$ (dla $m^*=n^*=20$), tzn. przejmuje około 1/4 obciążenia. Moment utwierdzenia maleje blisko o połowę — z $M_k=0,125$ do



Rys. 4

$M_{sk}=0,066$. Rys. 4 pokazuje ugięcie płyty na jej średnicy w przypadkach z podporą i bez podpory środkowej.

Płytę kołową wykorzystano również w przykładzie numerycznym rozwiązania zagadnienia stateczności. Założono dwuosiowe ściskanie kwadratowej płyty pomocniczej równoznaczne ze ścisaniem radialnym płyty kołowej obciążeniem $N_r=const$. Z uwagi na charakter rozwiązania jako niewiadome w równaniach (3.4) pozostawiono wyłącznie stałe siły i momenty kompensacyjne. Tak więc równania te przyjęły postać

$$P \sum_{mn} \zeta_{mn} A_{mn} A_{mn} + M \sum_{mn} \zeta_{mn} A_{mn} B_{mn} = 0, \quad (5.2)$$

$$P \sum_{mn} \zeta_{mn} A_{mn} B_{mn} + M \sum_{mn} \zeta_{mn} B_{mn} B_{mn} = 0,$$

$$m, n=1, 3, 5, \dots,$$

gdzie

$$\zeta_{mn} = \frac{1}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2) \left((\alpha_m^2 + \beta_n^2) - \frac{N}{D} \right)},$$

$$A_{mn} = \int_0^{2\pi} \sin [\alpha_m x_s(t)] \sin [\beta_n y_s(t)] dt,$$

$$B_{mn} = \int_0^{2\pi} \{ \alpha_m y'_s(t) \cos [\alpha_m x_s(t)] \sin [\beta_n y_s(t)] - \beta_n x'_s(t) \sin [\alpha_m x_s(t)] \cos [\beta_n y_s(t)] \} dt,$$

$$x_s(t) = \frac{a}{2} + R \cos t, \quad y_s(t) = \frac{a}{2} + R \sin t.$$

Zerowanie się wyznacznika powyższego układu daje równanie na niewiadome siły krytyczne N_i :

$$(5.3) \quad w(N) = \sum_{mn} \zeta_{mn} A_{mn} A_{mn} \sum_{\mu\nu} \zeta_{\mu\nu} B_{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \left(\sum_{mn} \zeta_{mn} A_{mn} B_{mn} \right)^2 = 0.$$

Pierwiastki powyższego równania najkorzystniej znaleźć na podstawie przebiegu funkcji $W(N)$. Jest to wielogałęziowa krzywa (rys. 5 i 6) o pionowych asymptotach w punktach określających siły krytyczne płyty pomocniczej. W przypadku płyty kwadratowej wynoszą one

$$(5.4) \quad \frac{N_k a^2}{D} = \pi^2 (m^2 + n^2),$$

przy czym m i n ze względu na symetrię osiąwą przybierają wartości nieparzyste.

Miejsca zerowe krzywej (5.3) określają siły krytyczne płyt o warunkach brzegowych wymuszonych na krzywoliniowym konturze, «rozcinającym» płytę kwadratową na część wewnętrzną i zewnętrzną. Na rys. 5 widać zerowanie się krzywej $W(N)$ jedynie w miejscach oznaczających dwie pierwsze siły krytyczne utwierdzonej przesuwnie płyty kołowej

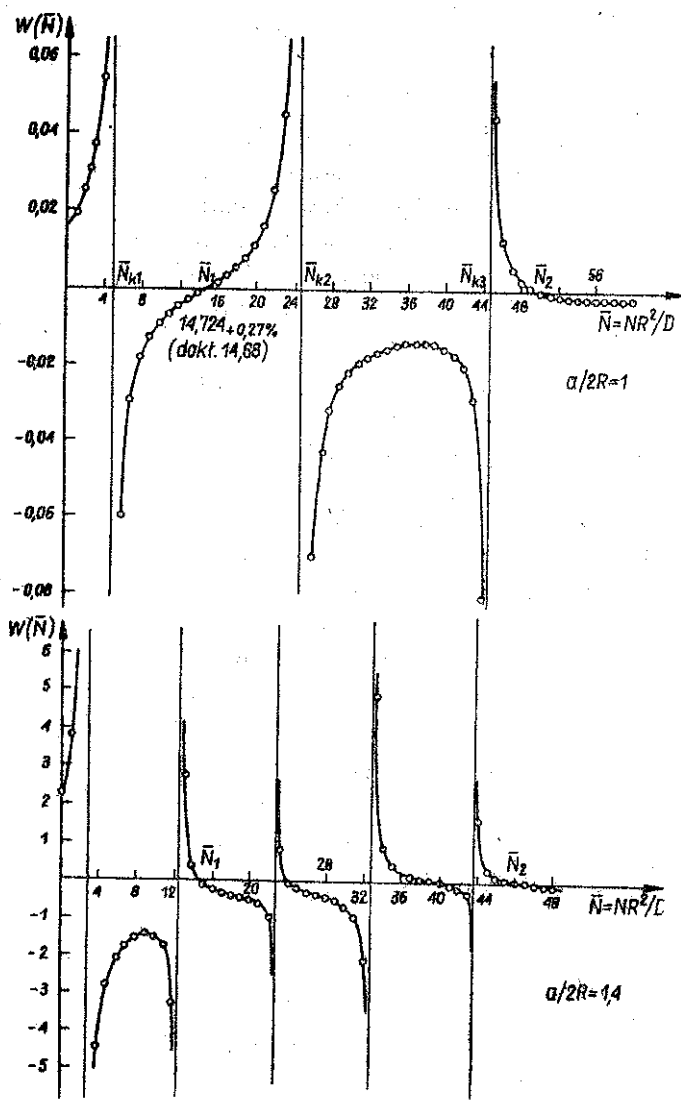
$$(5.5) \quad \bar{N}_1 = \frac{N_1 R^2}{D} = 14,682,$$

$$\bar{N}_2 = \frac{N_2 R^2}{D} = 49,219,$$

natomiast na rys. 6 widzimy dodatkowe pośrednie miejsca zerowe pomiędzy \bar{N}_1 i \bar{N}_2 . Te dodatkowe pierwiastki równania (5.3) wiążą się z utratą stateczności odcinanej zewnętrznej części płyty pomocniczej (w pierwszym przypadku $a=2R$ zjawisko takie nie wystąpi pomiędzy \bar{N}_1 i \bar{N}_2). Dla rozstrzygnięcia, która z części płyty ulega wyboczeniu porównywano całki

$$(5.6) \quad J = \int_F w^2(x, y) dF$$

dla części wewnętrznej ($F=F_w$) i zewnętrznej ($F=F_z$) płyty pomocniczej, przy czym funkcja ugięcia obliczana była z dokładnością do stałej (przyjęto w $(a/2, a/2)=1$). Jedna z powyższych całek była zawsze bliska zeru, co określało obszar wyboczenia.



Rys. 5, 6

6. WNIOSKI KOŃCOWE I PERSPEKTYWY DALSZYCH BADAŃ

Przedstawiona w pracy metoda szeregów konturowych stanowi w zasadzie koncepcję rozwiązywania problemów konstrukcji powierzchniowych o dowolnym kształcie i może być wykorzystana w różnorodnych zagadnieniach zginania, statyczności i dynamiki takich ustrojów. Jej uniwersalność pozwala jednak stosować

ją również do innych typów równań (układów równań) różniczkowych cząstkowych funkcji dwu zmiennych z warunkami brzegowymi określonymi na dowolnej krzywej zamkniętej. Dla rozwiązania danego zagadnienia konieczne jest znalezienie związków przyczynowo-skutkowych pomiędzy wielkościami generującymi stan obszaru (np. obciążenia ciała), a funkcjami stanu wchodzącymi w skład warunków brzegowych. W przypadku trudności ze znalezieniem takich związków można skorzystać np. z analogii matematycznej (zagadnienia skręcania prętów).

Kolejnym warunkiem stosowalności metody jest znalezienie rozszerzonego obszaru (zawierającego w sobie obszar badany), na którym zastosowanie podwójnych szeregów Fouriera pozwoliłoby na łatwe spełnienie zarówno równań różniczkowych zagadnienia, jak i jego warunków brzegowych. Pewnym ułatwieniem jest tutaj fakt, że rozwiązanie nie zależy od rodzaju warunków brzegowych na rozszerzonym obszarze, mogą więc one być dobrane dowolnie, dogodnie dla stosowania szeregów Fouriera.

Spełnienie równania (układu równań) przez wspomniane szeregi jest możliwe w zasadzie przy założeniu stałych jego współczynników. W pewnych przypadkach (rozdział 2.3) udaje się rozwiązać powyższą metodą także i równania o zmiennych współczynnikach, co wywołuje jednakże znaczny wzrost liczby równań algebraicznych w końcowym układzie. Zastosowanie, jak w przypadku płyt i powłok, niepełnych szeregów trygonometrycznych (np. typu sinus-sinus lub sinus-cosinus) jest szczególnie dogodne lecz nie zawsze możliwe. Pociąga bowiem za sobą konieczność uzyskania we wszystkich członach równania, po wykonaniu różniczkowania, analogicznych typów wyrazów szeregów. Przykładowo w przypadku pojedynczego równania o pochodnych cząstkowych ogranicza to stosowalność metody do równań o pochodnych parzystych.

Ze względu na charakter zbieżności szeregów trygonometrycznych niezbyt korzystne jest stosowanie omawianej metody w przypadku obciążeń skupionych punktowo [4], szczególnie w przypadku gdy obciążenia takie przykładane są w pobliżu konturu (miejscu skoku funkcji momentów gnących i sił poprzecznych). Należy jednak zwrócić uwagę, że w rzeczywistych konstrukcjach nie występują obciążenia idealnie skupione, a rozmycie ich na pewnym skończonym obszarze wyraźnie poprawia zbieżność szeregów — rozwiązań.

Pewnym ograniczeniem metody jest również niedogodność jej stosowania w przypadku szybko-zmiennych wzdłuż konturu obciążeń kompensacyjnych, co może być wywołane np. znaczną ilością naroży na konturze lub zmiennych obciążeń skupionych w pobliżu krawędzi rzeczywistego obiektu. Narzuca to bowiem konieczność stosowania dużej liczby wyrazów w pojedynczych szeregach odwzorowujących obciążenia kompensacyjne, co z kolei pociąga za sobą odpowiednią rozbudowę szeregów podwójnych.

Opisane wyżej ograniczenia nie mogą przesłonić istotnych zalet metody szeregów konturowych. Niezwykle łatwy jest tutaj sposób wprowadzania różnorodnych danych: konturów przez ich równania parametryczne oraz obciążeń przez ich rozwinięcia w podwójne szeregi trygonometryczne. Również korzystny jest system

wyprowadzania wyników. Ze względu na otrzymanie ciągłych, funkcyjnych rozwiązań możemy znaleźć interesujące nas wartości funkcji stanu w dowolnym punkcie rozpatrywanego obszaru lub z dowolnym zagęszczeniem siatki punktów (pomijając np. obszary nas nie interesujące). W metodach elementów skończonych lub różnic skończonych dostajemy odpowiedzi na całym rozpatrywanym obszarze, przy czym zagęszczenie punktów kontrolnych musi być w zasadzie z góry narzucone.

Istotną zaletą omawianej metody jest także łatwy sposób badania zbieżności rozwiązań. Sporządzenie map zbieżności szeregów pozwala na szczegółowe przesledzenie ciągów sum częściowych szeregów—rozwiązań i określenia ich przybliżonej granicy z dużą dokładnością. Tego typu szczegółowe badanie zbieżności rozwiązań w konkretnym punkcie rozpatrywanego obszaru jest w przypadku metody elementów skończonych lub różnic skończonych niezwykle kłopotliwe.

Obecna praca przedstawia metodę trygonometrycznych szeregów konturowych na wrywkowym przykładzie zagadnień płyt utwierdzonych. W przygotowaniu znajdują się opracowania dotyczące płyt z innymi warunkami brzegowymi, oraz zagadnień powłokowych. Nie wyczerpuje to jednak wszystkich możliwości metody. Jednym z ciekawych, nie rozpatrywanych w pracy jej zastosowań może być kinematyczne wymuszenie stanu naprężeń w płycie lub paneli spowodowane np. niedokładnościami podpory. W zagadnieniu tym wystąpią niezerowe warunki przemieszczeniowe na krzywej podparcia, co nie komplikuje algorytmu metody.

Omawianą metodę można stosować również do płyt i powłok liniowo lepkosprężystych opierając się na analogii sprężysto-lepkosprężystej T. ALFREYA [2, 8], do elementów powierzchniowych spoczywających na sprężystym podłożu oraz do połączeń konstrukcji odmiennych typów (np. wzmocnień powłok krzywoliniowymi żebrami).

Na koniec zwraca się uwagę, że pełna koncepcja metody obejmuje dwa etapy rozwiązania—budowania konturowych równań całkowych przez rozwinięcie w podwójne szeregi oraz rozwiązanie tych równań za pomocą szeregów pojedynczych. Widać więc możliwości poszukiwania rozwiązań wykorzystujących tylko jeden z powyższych etapów, np. rozwiązywanie równań całkowych otrzymanych w metodzie potencjału za pomocą rozwinięć konturowych w pojedyncze szeregi.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. C. AITKEN, *On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations*, Proc. Roy. Soc., 46, 289-305, Edinburgh 1926.
2. T. ALFREY, *Non-homogeneous stresses in visco-elastic media*, Quart. Appl. Math., 2, 113, 1944.
3. M. M. BANERJEE, *Note on the large deflections of irregular shaped plates by the method of conformal mapping*, Journ. of App. Mech., 43, 356-357, 1976.
4. R. DĄBROWSKI, *Metody inżynierskie w teorii powłok*, Wyd. Pol. Wroc., Wrocław 1975.
5. W. HEISE, *Application of the singularity method for the formulation of plane elastostatical boundary value problems as integral equations*, Acta Mech., p. 33-69, 31, 1978.
6. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty. Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1968.
7. W. KECS, P. P. TEODORESCU, *Applications of the theory of distributions in mechanics*, Abacus Press, Kent 1974.

SUMMARY

THE TRIGONOMETRIC CONTOUR SERIES METHOD IN APPLICATION
TO CLAMPED PLATES WITH ARBITRARY CONTOURS

A general method of solution of problems of elastic plates and shells with arbitrary contours is presented. The method is based on an extension of the given surface structure beyond its boundary so as to obtain a simple auxiliary structure with appropriate compensatory loadings on the given contour, in order to satisfy the actual boundary conditions.

A plate with clamped edges is considered as an example of the general scheme of the solution. The plate given is extended to an auxiliary rectangular, simply supported plate subjected to the external loadings of the real plate and the unknown compensatory loadings of distributional character expanded into double sine series. The boundary conditions along the real contour yield the integral equations which, after expansion of the compensatory loadings into single Fourier series along the contour, change to algebraic equations for the unknown expansions coefficients of the loadings.

A number of numerical examples is solved as an application of the method discussed to small elastic deflections and stability problems of plates.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 stycznia 1980 r.
