

## ZDERZENIE UKOŚNE KULI Z NIERUCHOMĄ PRZEGRODĄ

JULIUSZ LEWIŃSKI (WARSZAWA)

W pracy zaproponowano nową definicję współczynnika restytucji prędkości stycznych. Przedstawiono badania, które potwierdziły poprawność rozważań teoretycznych oraz umożliwiły wyznaczenie wielkości charakteryzujących zderzenie ukośne: współczynnik restytucji prędkości normalnych i stycznych oraz dynamiczny współczynnik tarcia.

### 1. WSTĘP

Zderzenie proste ciał sztywnych rozwiązuje się najczęściej wprowadzając pojęcie współczynnika restytucji prędkości normalnych. Współczynnik ten zdefiniowany przez Newtona określa ujemny stosunek względnych prędkości zderzających się ciał po i przed zderzeniem, przy czym prędkości należy odnosić do punktów zderzenia. Znak minus oznacza, że zwrot względnej prędkości zmienia się na przeciwny. Wprowadzenie współczynnika restytucji pozwala w prosty sposób rozwiązywać przypadki zderzenia, gdy udział energii drgań sprężystych zderzających się ciał jest pomijalnie mały w stosunku do pracy odkształceń lokalnych. Wartość współczynnika restytucji dla tych przypadków zderzenia jest stała dla danej pary materiałów [1, 6 i 7]. Stosowanie współczynnika restytucji jako stałej materiałowej jest obecnie krytykowane. Stwierdzono bowiem duży wpływ na wartość tego współczynnika prędkości oraz kształtu zderzających się ciał. Dotyczy to jednak różnych przypadków zderzenia znacznie odbiegających od założeń Newtona.

Niedoskonałość hipotezy Newtona polega więc przede wszystkim na dosyć wąskim zakresie jej stosowalności, a nie na błędnych założeniach.

### 2. ZDERZENIE UKOŚNE CIAŁ SZTYWNYCH

Podczas zderzenia ukośnego na powierzchni zetknięcia pojawiają się obok impulsów normalnych impulsy styczne. Określenie składowych normalnych prędkości prowadzi się identycznie jak dla zderzenia prostego, wprowadzając współczynnik restytucji prędkości normalnych  $R$ . Prędkości styczne po zderzeniu określa się najczęściej zakładając, że powierzchnie zderzających się ciał w miejscach kontaktu są idealnie gładkie, bądź też idealnie szorstkie. W 1877 r. Routh wprowadził przez analogię do wzoru Coulomba, sformułowanego dla określenia siły tarcia, nierówność

(2.1)

$$S_t \leq f S_n,$$

gdzie  $f$  oznacza dynamiczny współczynnik tarcia,  $S_t$  impuls styczny oraz  $S_n$  impuls normalny.

W wielu publikacjach rozwiązuje się przypadek zderzenia ukośnego wykorzystując zależność  $S_t = fS_n$ . Wykazano jednak, że można w ten sposób rozwiązać tylko zderzenie ukośne dla dużych kątów zderzenia [2 i 3].

W pracy [1] zderzenie ukośne rozwiązano dla dwóch przypadków zderzenia: zderzenie z wystąpieniem poślizgu na całej powierzchni kontaktu wg równości Routha oraz zderzenia bez poślizgu.

W przypadku zderzenia bez poślizgu wprowadzony został tzw. współczynnik restytucji prędkości stycznych  $\theta$  wg wzoru

$$(2.2) \quad \theta = \frac{w'_t}{w_t},$$

gdzie  $w'_t$ ,  $w_t$  oznaczają względne prędkości zderzających się ciał odpowiednio po i przed zderzeniem w punkcie zetknięcia.

### 3. WSPÓLCZYNNIK RESTYTUCJI PRĘDKOŚCI STYCZNYCH

Współczynnik  $\theta$  może zmieniać się w przedziale  $(0, R)$  [1]. Ze wzoru (2.2) wynika zatem, że zwrot względnej prędkości stycznej w miejscu zetknięcia nie zmienia się. Na powierzchni kontaktu obok normalnych odkształceń sprężysto plastycznych występują odkształcenia sprężysto plastyczne styczne. Zjawisku temu towarzyszą jednocześnie mikropoślizgi na części powierzchni kontaktu [4 i 5], co powoduje, że współczynnik  $\theta$  nie jest wielkością stałą, tzn. maleje ze wzrostem kąta zderzenia osiągając wartość 0 z chwilą wystąpienia poślizgu na całej powierzchni kontaktu.

Dla małych kątów zderzenia zwrot względnej prędkości stycznej po zderzeniu powinien zmienić się na przeciwny i dopiero powyżej kąta granicznego (rozdzielającego oba przypadki zderzenia) zwrot ten nie ulega zmianie. W niniejszej pracy proponuje się zatem określenie współczynnika  $\theta$  wg wzoru

$$(3.1) \quad \theta = -\frac{w'_t}{w_t},$$

różniącego się tylko znakiem od (2.2), lecz zakładającej inny przebieg zjawiska zderzenia bez poślizgu. Wzory określające parametry kuli po zderzeniu z nieruchomą przegrodą wyprowadzono podobnie jak w pracy [1] uwzględniając (3.1) zamiast wzoru (2.2); otrzymano dla zderzenia bez poślizgu oraz  $\omega = 0$  następujące wzory:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} V'_t &= \frac{1}{7} (5 - 2\theta) V_t, \\ V'_n &= -R V_n, \\ \omega' &= \frac{5}{7} (1 + \theta) \frac{V \sin \alpha}{r}, \\ \operatorname{tg} \alpha' &= -\frac{5 - 2\theta}{7R} \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

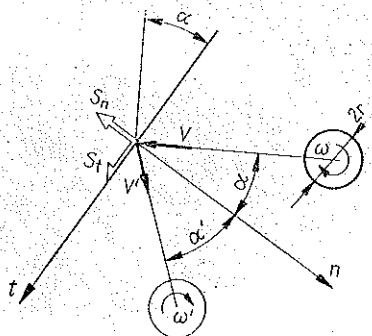
Dla przypadku zderzenia z poślizgiem na całej powierzchni kontaktu wzory są identyczne ze wzorami w pracy [1]:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} V'_t &= V_t - V_n(1+R)f, \\ V'_n &= -RV_n, \\ \omega' &= \frac{5}{2}f(1+R)\frac{V\cos\alpha}{r}, \\ \operatorname{tg}\alpha' &= -\frac{1}{R}\operatorname{tg}\alpha + f\frac{1+R}{R}. \end{aligned}$$

Oznaczenia podano na rys. 1, na którym przedstawiono schematycznie zderzenie kuli z nieruchomą przegrodą.

Kąt graniczny określa się z porównania wzorów (3.2) i (3.3) przy  $\theta=0$

$$(3.4) \quad \operatorname{tg}\alpha_{gr} = \frac{7}{2}f(1+R).$$

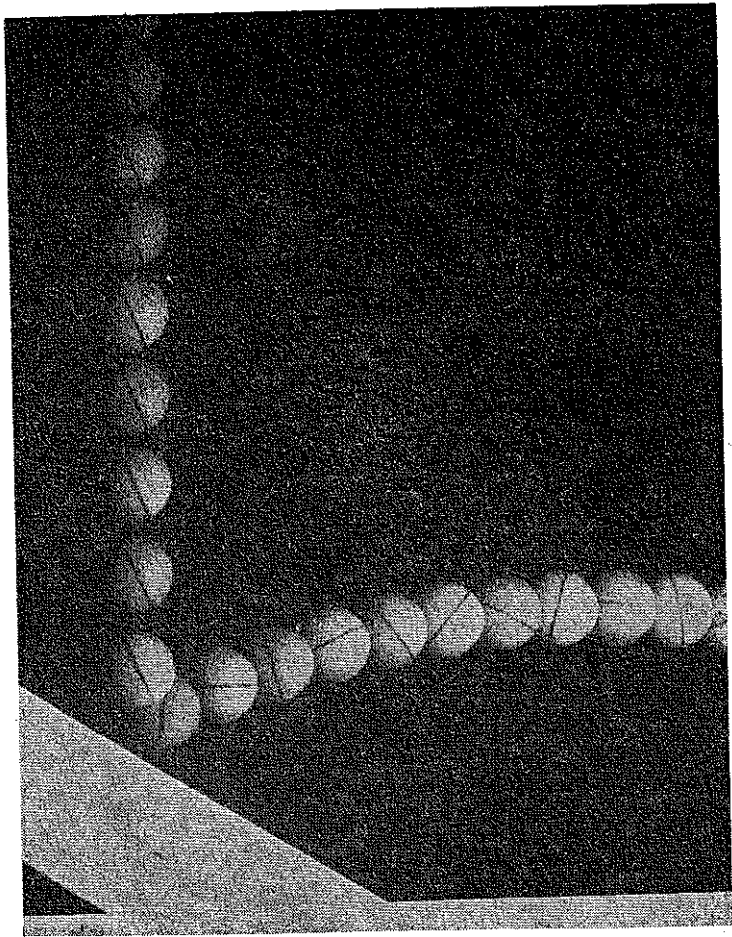


Rys. 1

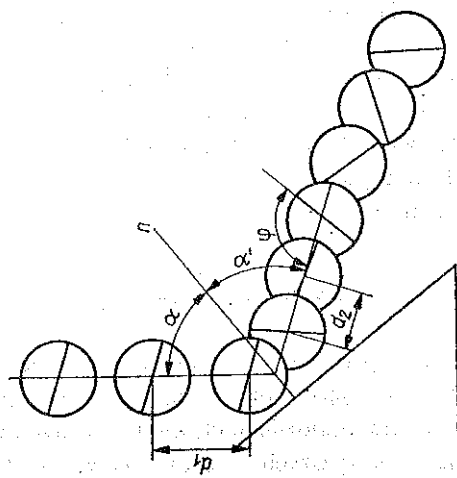
Zmiana wzoru określającego współczynnik restytucji prędkości stycznych spowodowała, że wyniki dla zderzenia bez poślizgu różnią się znacznie od odpowiednich rezultatów zawartych w pracy [1]. Np. dla przypadku zderzenia idealnie sprężystego bez poślizgu  $R=\theta=1$  wg powyższych wzorów prędkość  $V'$  będzie różniła się  $3/7$  razy, prędkość kątowa  $\omega'$  wg wzoru z pracy [1] osiągnie 0, podczas gdy ze wzoru (3.4) osiągnie wartość maksymalną. Również wielkość kąta po zderzeniu będzie inna niż wg cytowanej pracy.

#### 4. CZĘŚĆ DOŚWIADCZALNA

W celu sprawdzenia poprawności zaproponowanej definicji współczynnika  $\theta$  wykonano badania umożliwiające pomiar parametrów kuli po zderzeniu. Znajomość tych parametrów oraz odpowiednich wielkości przed zderzeniem umożliwiła jednocześnie obliczenie z powyższych wzorów wielkości charakteryzujących zderzenie ukośne  $R$ ,  $\theta$ ,  $f$  i  $\alpha_{gr}$  dla danej pary materiałów.



Rys. 2



Rys. 3

Na specjalnym przyrządzie wykonano kuliste próbki o średnicy 24 mm z czterech materiałów skalnych: dolomitu, sienitu, wapienia oraz piaskowca. Próbkę zrzucano swobodnie bez obrotu z trzech wysokości odpowiadających prędkościom zderzenia: 1,98; 3; 4,43 m/s na nieruchomą przegrodę. Przegroda wykonana ze stali 45 i ulepszana cieplnie do twardości 45 HRC ustawiana była w stosunku do poziomu pod kątami: 20°, 30°, 40°, 50° i 60°. Zderzenie rejestrowano metodą fotografii stroboskopowej o częstotliwości błysków  $n=100$  Hz. W celu umożliwienia pomiaru prędkości kątowej na każdej próbce narysowano południk.

Na rys. 2 przedstawiono przykład zarejestrowanego ruchu próbki. Ze zdjęcia określano kąt odbicia kuli  $\alpha'$ , kąt obrotu kuli po zderzeniu w czasie pomiędzy kolejnymi błyskami  $\varphi$ , odległość dwóch kolejnych śladów kuli po i przed zderzeniem  $d_2, d_1$ . Na rys. 3 przedstawiono schematycznie zarejestrowany ruch próbki oraz naniesiono mierzone wartości. Prędkość środka ciężkości kuli po zderzeniu określano z zależności  $V' = 2V/d_1$ .

Prędkość kątową kuli po zderzeniu określano ze wzoru  $\omega' = \varphi n$ .

## 5. WYNIKI

Po wykonaniu pomiarów obliczano współczynnik restytucji prędkości stycznych (3.4), współczynnik restytucji prędkości normalnych (3.3), dynamiczny współczynnik tarcia  $f$  (3.8) oraz graniczny kąt zderzenia. Wyniki przedstawiono w formie wykresów na rys. 4.

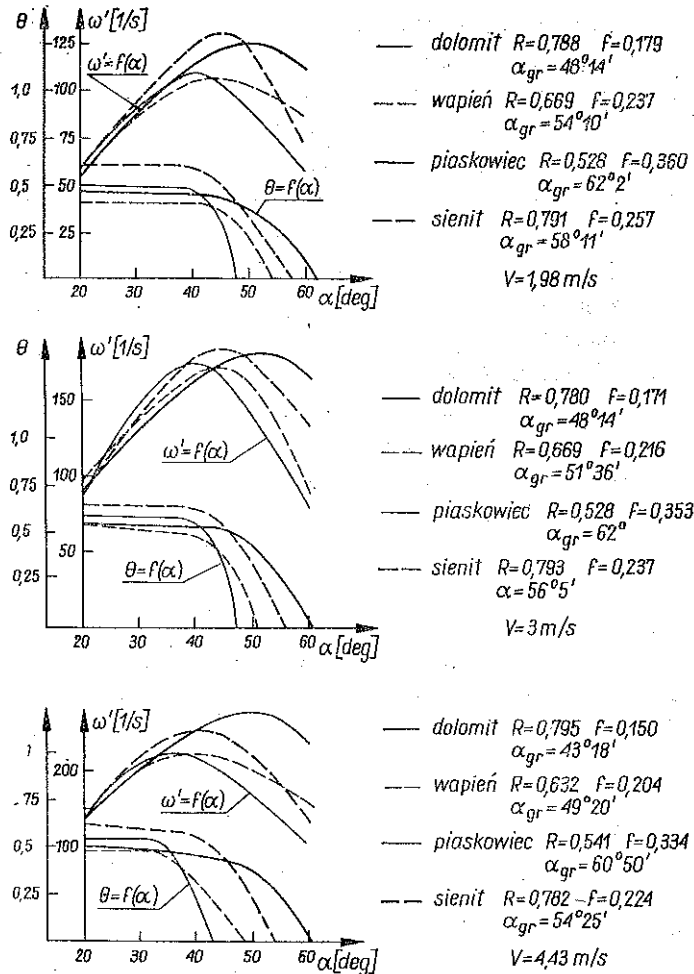
Wyniki pomiarów potwierdziły poprawność rozważań dotyczących innego niż w pracy [1] określenia współczynnika restytucji prędkości stycznych  $\theta$ . Obliczając wartość  $\theta$  wg pracy [1] otrzymano wartości ujemne. Pomierzony współczynnik  $\theta$  jest dla małych kątów zderzenia nieco mniejszy od współczynnika restytucji prędkości normalnych  $R$ .

W przypadku gdy kąt zderzenia  $\alpha$  dąży do wartości kąta granicznego  $\alpha_{gr}$ , wartość  $\theta$  szybko maleje do zera.

Prędkość kątowa próbki po zderzeniu początkowo rośnie (zderzenie bez poślizgu) i osiąga maksimum dla kąta zderzenia zawartego między  $\alpha_\theta$  i  $\alpha_{gr}$ , gdzie  $\alpha_\theta$  oznacza kąt, przy którym  $\theta$  zaczyna szybko maleć. Prędkość kątowa odbitej próbki jest znacznie większa niż wynikałoby ze wzorów z pracy [1]. Kąty graniczne dla badanych próbek są bardzo duże i mieszczą się w przedziale [44; 65°] pomimo gładkiej szlifowanej powierzchni kul i przegrody. Zaobserwowano jednocześnie nieznaczne zmniejszanie się kąta granicznego dla danej próbki przy zwiększaniu się prędkości zderzenia.

## 6. UWAGI KOŃCOWE

Zastosowana metoda fotografii stroboskopowej umożliwiła rejestrację zderzenia ukośnego kuli z nieruchomą przegrodą oraz pomiar parametrów ruchu kuli zarówno przed jak i po zderzeniu. Badania potwierdziły, że zderzenie ukośne ciał sztywnych można rozwiązywać rozpatrując oddzielnie zderzenie z poślizgiem na całej po-



Rys. 4

wierzchni kontaktu oraz zderzenie bez poślizgu. Należy jednak uwzględnić przy określeniu współczynnika restytucji prędkości stycznych zmianę po zderzeniu zwrotu względnej prędkości stycznej w miejscu kontaktu.

Metoda pomiaru umożliwiła również określenie nieznanymi dotąd wartości współczynnika restytucji prędkości stycznych oraz dynamicznego współczynnika tarcia dla różnych materiałów.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. R. GRYBÓŚ, *Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych*, PWN, Warszawa 1969.
2. J. G. PANÓWKO, *Wziedenie w teorii mechanicznego uderzenia*, Nauka, Moskwa 1977.
3. P. A. ENGEL, *Impact wear of materials*, Elsevier New York 1976.
4. R. D. MINDLIN, H. DERESIEWICZ, *Elastic spheres in contact under varying oblique forces*, J. Appl. Mech, 75, 1953.

5. N. MAW, J. R. BARBER, I. N. FAWCETT, *The oblique impact of elastic spheres*, *Wear* 38, 1976.
6. W. GOLDSMITH, *Impact, the theory and physical behaviour of colliding solids*, London 1960.
7. J. LEWIŃSKI, *Analiza podstawowych problemów mechaniki procesu rozdrabniania ciał kruchych w kruszarkach uderzeniowych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska 1979.

## Резюме

## КОСОЕ СТОЛКНОВЕНИЕ ШАРА С НЕПОДВИЖНОЙ ПРЕГРАДОЙ

В работе предложено новое определение коэффициента восстановления касательных скоростей. Представлены исследования, которые подтвердили правильность теоретических рассуждений и дали возможность определить величины, характеризующие косоое столкновение: коэффициент восстановления нормальных и касательных скоростей, а также динамический коэффициент трения.

## SUMMARY

## OBLIQUE IMPACT OF A SPHERE ON A RIGID WALL

A new definition of the restitution coefficient of tangential velocities is proposed. The results are presented confirming the correctness of theoretical considerations; they allow for the determination of the parameters characterizing the oblique impact: the restitution coefficients of the normal and tangential velocities and the dynamic coefficient of friction.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 25 stycznia 1980 r.*

---