

O RÓWNANIACH TEORII LINIOWEJ POWŁOK Z UWZGLĘDNIENIEM POPRZECZNYCH ODKSZTAŁCEŃ POSTACIOWYCH

ZBIGNIEW MAZURKIEWICZ i ROMAN NAGÓRSKI (WARSZAWA)

W pracy podano wywód podstawowych związków i równań teorii liniowej powłok z uwzględnieniem poprzecznych odkształceń postaciowych, odkształceń wstępnych (lub termicznych) oraz naprężeń normalnych do środkowej powierzchni powłoki o znanym rozkładzie na jej grubości. Na podstawie związków i równań, wyprowadzonych we współrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych, otrzymano równania typu E. Meissnera dla powłok obrotowych, obciążonych obrotowo symetrycznie oraz opisano krótko rozwiązanie tych równań w przypadku powłoki sferycznej, obciążonej równomiernie na górnej powierzchni. Wszystkie rozważania dotyczą powłok, wykonanych z materiału sprężystego o strukturze ortotropowej.

1. WSTĘP

Niedokładności i sprzeczności niektórych związków i równań, wynikające z założeń teorii powłok Kirchhoffa-Love'a, zwanej też «pierwszym przybliżeniem» Love'a, spowodowały już przed ponad trzydziestoma laty poszukiwanie innej, odpowiednio użytecznej lecz dokładniejszej teorii powłok sprężystych. Do takich poszukiwań zachęcały nie tylko niedociągnięcia teorii Kirchhoffa-Love'a w zakresie teoretycznym lecz również potrzeby praktyczne. Przypomnimy bowiem, że w przypadku powłok o większej, często tzw. «średniej» grubości, albo powłok poddanych działaniu obciążeń lokalnych o dużej intensywności lub też w obszarach przykrawędziowych, błędy wynikające z pominięcia wpływu zwłaszcza odkształceń postaciowych w przekrojach poprzecznych powłoki mogą być dość znaczne (podobnie jest w płytach).

Oslabienie założeń teorii Kirchhoffa-Love'a zawdzięczamy przede wszystkim E. Reissnerowi, którego teoria zyskała szczególnie duże zainteresowanie i popularność. Założenia oraz podstawowe równania tej teorii zostały najpierw sformułowane dla płyt [1], a następnie dla powłok [2]. W tej drugiej pozycji wyprowadzono za pomocą metody energetycznej związku między odkształceniami i naprężeniami z uwzględnieniem odkształceń postaciowych i naprężeń w płaszczyznach normalnych do środkowej powierzchni powłoki.

Pomysł E. Reissnera zainspirował dalsze badania w celu opracowania dokładniejszej teorii powłok, czasem zwanej «drugim przybliżeniem» Love'a. Już wkrótce po ogłoszeniu pracy [1], A. J. ŁURIE w swojej znanej monografii [3] wskazał na możliwość uściślenia teorii powłok, a GREEN i ZERNA w pracy [4] podali we wspólnych tensorowych wywód uogólnionych (zgodnie z koncepcją E. Reissnera-

związków geometrycznych i fizycznych teorii liniowej powłok. Z pierwszych prac bazujących na idei E. Reissnera wymienimy jeszcze trzy pozycje [5, 6 i 7] P. M. NAGHDIEGO. W pracy [5] wyprowadzono wzory na składowe stanu odkształcenia i na siły wewnętrzne z uwzględnieniem odkształceń postaciowych i naprężeń o kierunkach normalnych do środkowej powierzchni powłoki oraz z uwzględnieniem bezwładności obrotowej. Szczególnie ceniona jest pozycja [7], zawierająca oryginalne opracowanie we współrzędnych uogólnionych udoskonalonej teorii powłok «drugiego przybliżenia» Love'a z głęboką analizą osiągnięć naukowych w tym zakresie oraz z bogatą bibliografią.

Pomysłowe osłabienie założenia Kirchhoffa o nieodkształcalności elementu normalnego do środkowej powierzchni powłoki zaproponował C. WOŹNIAK w swojej monografii [8], obejmującej, bardzo ogólne i eleganckie, matematyczne ujęcie podstaw nieliniowej teorii powłok. Koncepcja autora polega na zastąpieniu rzeczywistego stanu odkształcenia wzdłuż grubości powłoki jednorodnym stanem odkształcenia.

Spśród późniejszych pozycji wymienimy cztery bardzo wartościowe monografie książkowe: B. P. PIELIECHA [9 i 10], S. A. AMBARCUMIANA [11], K. Z. GALIMOWA [12], zawierające obszerny materiał (wraz z zastosowaniami) z teorii powłok z uwzględnieniem poprzecznych odkształceń postaciowych, przy czym w monografii [11] koncepcję E. Reissnera wykorzystano do wyprowadzenia odpowiednich równań dla powłok o strukturze anizotropowej. Cenną pozycją przeglądową z omawianej problematyki jest rozprawa [13].

Wspomniane wyżej prace nie wyczerpują oczywiście dość bogatej literatury dotyczącej przedmiotu rozważań lecz stanowią tylko najważniejsze pozycje, w których trójwymiarowe zagadnienie teorii powłok zastąpiono dwuwymiarowym ujęciem przy częściowej rezygnacji z założeń Kirchhoffa-Love'a.

W pracy naszej podamy wywód podstawowych związków i równań uogólnionej teorii liniowej powłok, zwanej również teorią powłok o średniej grubości, przy czym wywód ten — aczkolwiek oparty na koncepcji E. Reissnera — będzie nieco inny od zazwyczaj stosowanego.

Na podstawie związków i równań, wyprowadzonych we współrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych otrzymamy równania typu E. Reissnera dla powłok obrotowych, obciążonych obrotowo-symetrycznie.

Wszystkie rozważania dotyczą powłok, wykonanych z materiału sprężystego o strukturze ortotropowej.

Uwzględnimy oprócz obciążeń statycznych również odkształcenia wstępne (lub termiczne) e_i^0 ($i=1, 2, 3$) oraz wpływ naprężeń σ_3 normalnych do środkowej powierzchni powłoki o znanym rozkładzie na jej grubości, wywołanych działaniem obciążeń na skrajnych powierzchniach powłoki. Oczywiście korzystanie ze wzorów, uwzględniających wpływ odkształceń wstępnych (lub termicznych) e_3 normalnych do środkowej powierzchni powłoki jest uzasadnione wtedy, kiedy te odkształcenia są znacznie większe od pominiętych w rozważaniach i działających w tym samym kierunku — odkształceń sprężystych, których wielkość można w przybliżeniu określić po rozwiązaniu danego problemu brzegowego [14].

Przy wyprowadzaniu równań i związków omawianej teorii założymy, że naprężenia styczne $\sigma_{\alpha 3}$ ($\alpha=1, 2$), występujące w przekrojach poprzecznych powłoki są wielkościami rzędu $h/\lambda < 1$ w stosunku do naprężeń σ_α lub w stosunku do naprężeń zredukowanych (gdzie λ oznacza charakterystyczną długość fali odkształcenia). Wpływ sił poprzecznych (naprężeń $\sigma_{\alpha 3}$) ma na ogół istotne, znaczenie, jeżeli $h/\lambda > hK_\alpha$ (h oznacza grubość powłoki, K_α krzywizny główne środkowej powierzchni), co ma miejsce w przypadku szybko zmiennego stanu odkształcenia, występującego w tzw. strefach osobliwych (strefy przybrzeżne, otoczenia punktów przyłożenia sił skupionych itp.). W związku z tym faktem, w odpowiednich wyrażeniach określających siły poprzeczne Q_α , naprężenia $\sigma_{\alpha 3}$ i poprzeczne odkształcenia postaciowe $e_{\alpha 3}$ przyjmujemy $1 - zK_\alpha \approx (1 - zK_\alpha)^2 \approx 1$, a w wyrażeniach dotyczących innych składowych stanu odkształcenia i naprężenia pominiemy wielkości rzędu $(hK_\alpha)^2$ wobec jedności. Zatem w wyprowadzonych związkach i równaniach rozważanej teorii powłok zachowamy dokładność rzędu $h^2 K_\alpha/\lambda$ ($h^2 K_\alpha/\lambda < hK_\alpha$) przy warunku $h/\lambda > hK_\alpha$ oraz dokładność rzędu $h^2 K^2$, jeżeli $h/\lambda < hK_\alpha$.

W przekonaniu autorów, do nowych elementów tej pracy (dotyczącej klasycznej już problematyki) należy: 1) sposób wyprowadzenia związków geometrycznych dla dowolnej powierzchni powłoki (a więc i związków fizycznych); 2) sposób wyprowadzenia równań nierozdzielności (znacznie prostszy od innych znanych sposobów); 3) uwzględnienie odkształceń wstępnych (lub termicznych); 4) wyprowadzenie równań typu E. Meissnera w ogólniejszej postaci niż np. w [6], tj. z uwzględnieniem oprócz poprzecznych odkształceń postaciowych również materiału ortotropowego, odkształceń wstępnych (lub termicznych) oraz naprężeń normalnych do środkowej powierzchni powłoki o znanym rozkładzie na jej grubości; 5) przykład rozwiązania wyprowadzonych równań typu E. Meissnera.

2. RÓWNANIA I ZWIĄZKI TEORII POWŁOK WE WSPÓLRZĘDNYCH KRZYWIZNOWYCH

2.1. Stan przemieszczenia i odkształcenia

Składowe stanu odkształcenia e_{ik} ($i, k=1, 2, 3$) powłoki wyprowadzimy na podstawie znanych związków geometrycznych dla ciała trójwymiarowego, które w krzywoliniowych współrzędnych ortogonalnych u^1, u^2, u^3 można napisać w postaci

$$(2.1) \quad \begin{aligned} e_{\alpha\alpha} = e_\alpha &= \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial v_\alpha}{\partial u_\alpha} + \frac{\partial H_\alpha}{\partial u^\nabla} \frac{v_\nabla}{H_\alpha H_\nabla} + \frac{\partial H_\alpha}{\partial u^3} \frac{v_3}{H_\alpha H_3} \quad (\alpha=1, 2), \\ e_{33} = e_3 &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial v_3}{\partial u^3} + \frac{\partial H_3}{\partial u^\alpha} \frac{v_\alpha}{H_\alpha H_3} + \frac{\partial H_3}{\partial u^\nabla} \frac{v_\nabla}{H_\nabla H_3} \quad (\nabla=3-\alpha), \\ e_{ik} = e_{ki} &= \frac{1}{2} \left[\frac{H_i}{H_k} \frac{\partial}{\partial u^k} \left(\frac{v_i}{H_i} \right) + \frac{H_k}{H_i} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{v_k}{H_k} \right) \right] \quad (i \neq k), \end{aligned}$$

gdzie v_i oznaczają składowe stanu przemieszczenia w kierunkach współrzędnych u^i , a $H_i = H_i(u^1, u^2, u^3)$ współczynniki Lamégo.

W dalszych rozważaniach przyjmiemy $u^3 = z$ (odległość dowolnego punktu powłoki od jej środkowej powierzchni) oraz wykorzystamy następujące znane związki z geometrii powłoki we współrzędnych krzywiznowych:

$$(2.2) \quad H_\alpha = (1 - zK_\alpha) A_\alpha, \quad H_3 = 1, \quad \frac{\partial H_\alpha}{\partial z} = -K_\alpha A_\alpha, \quad \frac{\partial H_\alpha}{\partial u^\nabla} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\nabla} (1 - zK_\alpha),$$

gdzie $A_\alpha = A_\alpha(u^1, u^2)$ oznaczają współczynniki pierwszej formy kwadratowej środkowej powierzchni powłoki, a K_α krzywizny główne tej powierzchni.

Ostatni ze związków (2.2) można łatwo otrzymać po wykorzystaniu wzoru Codazziego–Mainardiego

$$(2.3) \quad \frac{\partial}{\partial u^\nabla} (K_\alpha A_\alpha) = K_\nabla \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\nabla}.$$

Przyjmujemy, że odkształcenia e_3 na grubości powłoki są tylko odkształceniami wstępnymi lub termicznymi, zależnymi liniowo od zmiennej z :

$$(2.4) \quad e_3 = \overset{\circ}{e}_3(u^1, u^2, z) = \overset{\circ}{e}_3(u^1, u^2) + z \overset{\circ}{\kappa}_3(u^1, u^2).$$

Po scałkowaniu funkcji (2.4) względem z i wykorzystaniu (2.1)₂, (2.2)₂ znajdujemy

$$(2.5) \quad v_3 = w_3 + z \overset{\circ}{e}_3 + \frac{z^2}{2} \overset{\circ}{\kappa}_3,$$

gdzie $w_3 = w_3(u^1, u^2)$ jest przemieszczeniem normalnym punktu na środkowej powierzchni powłoki.

Założymy następujący rozkład przemieszczeń v_α :

$$(2.6) \quad v_\alpha = w_\alpha - z \bar{\chi}_\alpha(z), \quad \bar{\chi}_\alpha(z) = \chi_\alpha - \overset{z}{\chi}_\alpha(z),$$

gdzie $w_\alpha(u^1, u^2)$ są przemieszczeniami punktów na środkowej powierzchni powłoki a $\chi_\alpha(u^1, u^2)$ oznaczają kąty obrotu stycznych do tej powierzchni i wyrażają się za pomocą wzoru

$$(2.7) \quad \chi_\alpha = \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial w_3}{\partial u^\alpha} + K_\alpha w_\alpha,$$

oraz gdzie $\overset{z}{\chi}_\alpha(u^1, u^2, z)$ są dodatkowymi składnikami, występującymi na skutek uwzględnienia wpływu naprężeń stycznych $\sigma_{\alpha 3}$ (pomijanych w teorii powłok Kirchhoffa–Love'a).

Podstawiając (2.5), (2.6) do wzorów (2.1)₃ i wykorzystując (2.2), (2.3), (2.7), znajdujemy

$$(2.8) \quad e_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left[(1 - zK_\alpha) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z \overset{z}{\chi}_\alpha}{1 - zK_\alpha} \right) + \frac{1}{A_\alpha (1 - zK_\alpha)} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(z \overset{\circ}{e}_3 + \frac{z^2}{2} \overset{\circ}{\kappa}_3 \right) \right].$$

Warto zauważyć, że w szczególnym przypadku wzór (2.8) sprowadza się do wzoru na $e_{\alpha 3}$ podanego np. w [9] (s. 10). Należy wtedy założyć, że $\overset{z}{\chi}_\alpha$ nie zależy od zmiennej z oraz przyjmując $\overset{\circ}{e}_3 = \overset{\circ}{\kappa}_3 = 0$.

Przyjmujemy rozkład naprężeń stycznych $\sigma_{\alpha 3}$ na grubości powłoki jak w uogólnionej teorii płyt Reissnera:

$$(2.9) \quad \sigma_{\alpha 3} = \frac{3\Phi_{\alpha}}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \left(1 - 12 \frac{z^2}{h^2} \right) t_{\alpha} + \frac{2z}{h} t'_{\alpha},$$

gdzie

$$(2.10) \quad t_{\alpha} = \frac{1}{2} (q_{\alpha}^{+} - q_{\alpha}^{-}), \quad t'_{\alpha} = \frac{1}{2} (q_{\alpha}^{+} + q_{\alpha}^{-}),$$

przy czym q_{α}^{+} , q_{α}^{-} oznaczają obciążenia w kierunkach stycznych odpowiednio na górnej i dolnej powierzchni powłoki. Naprężenia $\sigma_{\alpha 3}$ spełniają więc warunki brzegowe na powierzchniach granicznych: $z=h/2$ i $z=-h/2$ oraz $\Phi_{\alpha}(u^1, u^2)$ są pewnymi funkcjami, których sens fizyczny wyjaśnimy w dalszych rozważaniach.

Po wykorzystaniu związków konstytutywnych $\sigma_{\alpha 3} = G_{\alpha 3} \epsilon_{\alpha 3}$ otrzymujemy na podstawie (2.8) i (2.9) wzór

$$(2.11) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z \chi_{\alpha}}{1 - zK_{\alpha}} \right) = \left\{ \frac{3\Phi_{\alpha}}{2hG_{\alpha 3}} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \left(1 - 12 \frac{z^2}{h^2} \right) s_{\alpha} + \frac{2z}{h} s'_{\alpha} \right\} \frac{1}{1 - zK_{\alpha}} - \frac{1}{A_{\alpha} (1 - zK_{\alpha})^2} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} \left(z \dot{\epsilon}_{\alpha 3} + \frac{1}{2} z^2 \dot{\kappa}_{\alpha 3} \right),$$

gdzie

$$(2.12) \quad s_{\alpha} = \frac{t_{\alpha}}{G_{\alpha 3}}, \quad s'_{\alpha} = \frac{t'_{\alpha}}{G_{\alpha 3}}.$$

We wzorze (2.11) zgodnie z przyjętym założeniem zastosujemy przybliżenie

$$(2.13) \quad 1 - zK_{\alpha} \approx (1 - zK_{\alpha})^2 \approx 1.$$

Uwzględniając (2.13) oraz całkując równanie (2.11) obustronnie względem z w granicach od 0 do z , a następnie dzieląc otrzymane równanie przez z otrzymujemy

$$(2.14) \quad \chi_{\alpha} = \frac{3\Phi_{\alpha}}{2hG_{\alpha 3}} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) s_{\alpha} + \frac{z}{h} s'_{\alpha} - \frac{z}{2A_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} \left(\dot{\epsilon}_{\alpha 3} + \frac{z}{3} \dot{\kappa}_{\alpha 3} \right).$$

Zgodnie z przyjętym przybliżeniem wyrażenia na siły poprzeczne upraszczamy do postaci

$$(2.15) \quad Q_{\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3} (1 - zK_{\alpha}) dz \approx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3} dz.$$

Podstawiając (2.9) do (2.15) otrzymujemy

$$(2.16) \quad Q_{\alpha} = \Phi_{\alpha}.$$

Na podstawie (2.1)–(2.3) oraz (2.5)–(2.7) znajdujemy

$$(2.17) \quad e_\alpha = \frac{1}{1-zK_\alpha} \left[\varepsilon_\alpha + z(\kappa_\alpha - \overset{z}{\kappa}_\alpha) - zK_\alpha \left(\overset{z}{\varepsilon}_3 + \frac{z}{2} \overset{z}{\kappa}_3 \right) \right],$$

$$(2.17) \quad e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2(1-zK_1)(1-zK_2)} \left\{ \omega(1-z^2K_G) + 2z(\tau - \overset{z}{\tau})(1-zH) + \right.$$

$$\left. + \frac{z^2}{2} \frac{K_1 - K_2}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} (A_2 \overset{z}{\chi}_2) - \frac{\partial}{\partial u^2} (A_1 \overset{z}{\chi}_1) \right] \right\},$$

gdzie składowe ε_α , ω , κ_α , τ stanu odkształcenia są określone za pomocą znanych wzorów

$$(2.18) \quad \varepsilon_\alpha = \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial w_\alpha}{\partial u^\alpha} + \frac{1}{A_\alpha A_\nabla} \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\nabla} w_\nabla - K_\alpha w_3,$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{w_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{w_1}{A_1} \right),$$

$$\kappa_\alpha = -\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial u^\alpha} - \frac{1}{A_\alpha A_\nabla} \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\nabla} \chi_\nabla,$$

$$\tau = -\frac{1}{2} \left[\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\chi_1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\chi_2}{A_2} \right) + K_1 \omega_2 + K_2 \omega_1 \right],$$

przy czym

$$(2.19) \quad \omega_\alpha = \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial w_\nabla}{\partial u^\alpha} - \frac{1}{A_\alpha A_\nabla} \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\nabla} w_\alpha,$$

a wielkości $\overset{z}{\kappa}_\alpha$ i $\overset{z}{\tau}$ wyrażamy następująco:

$$(2.20) \quad \overset{z}{\kappa}_\alpha = -\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \overset{z}{\chi}_\alpha}{\partial u^\alpha} - \frac{1}{A_\alpha A_\nabla} \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\nabla} \overset{z}{\chi}_\nabla,$$

$$\overset{z}{\tau} = -\frac{1}{2} \left[\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\overset{z}{\chi}_1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\overset{z}{\chi}_2}{A_2} \right) \right],$$

Łatwo zauważyć, że w budowie wzorów na κ_α i τ oraz na $\overset{z}{\kappa}_\alpha$ i $\overset{z}{\tau}$ zachodzi pełna analogia. Natomiast istotna różnica polega na tym, że wielkości κ_α i τ określają tylko zmiany krzywizny środkowej powierzchni powłoki ($z=0$) przy pominięciu wpływu odkształceń na jej grubości, a wielkości $\overset{z}{\kappa}_\alpha$ i $\overset{z}{\tau}$ są funkcjami z i stanowią dodatkowe składniki, uwzględniające wpływ odkształceń po grubości powłoki na zmiany krzywizn.

2.2. Siły wewnętrzne

Naprężenia normalne $\sigma_3 = \sigma_3(z)$, wywołane obciążeniem normalnym q_3^+ i q_3^- , odpowiednio na górnej i dolnej powierzchni powłoki, można wyrazić w postaci

$$(2.21) \quad \sigma_3 = t_3 + \frac{2z}{h} t'_3,$$

gdzie

$$(2.22) \quad t_3 = \frac{1}{2} (q_3^+ - q_3^-), \quad t'_3 = \frac{1}{2} (q_3^+ + q_3^-).$$

Wykorzystamy znane związki fizyczne

$$(2.23) \quad e_\alpha = \frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} - \frac{\nu_{\alpha\nabla}}{E_\nabla} \sigma_\nabla - \frac{\nu_{\alpha 3}}{E_3} \sigma_3 + \dot{e}_\alpha, \quad e_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{2G_{ik}} \quad (i \neq k),$$

gdzie σ_i , σ_{ik} , E_i , G_{ik} , ν_{ik} oznaczają odpowiednio składowe stanu naprężenia, współczynniki sprężystości podłużnej i poprzecznej oraz współczynniki Poissona, a \dot{e}_α — odkształcenia wstępne lub termiczne.

Uwzględniając (2.21) oraz zależności $E_i \nu_{ik} = E_k \nu_{ki}$ i wprowadzając oznaczenie $\nu_{\alpha\nabla} = \nu_\nabla$ znajdujemy związki odwrotne:

$$(2.24) \quad \sigma_\alpha = \frac{E_\alpha}{1 - \nu_1 \nu_2} [e_\alpha - \dot{e}_\alpha + \nu_\nabla (e - \dot{e})] + \frac{\nu_{3\alpha} + \nu_\alpha \nu_{3\nabla}}{1 - \nu_1 \nu_2} (t_3 + \frac{2z}{h} t'_3),$$

$$\sigma_{12} = 2G_{12} e_{12}.$$

Odkształcenia \dot{e}_α przyjmujemy w postaci

$$(2.25) \quad \dot{e}_\alpha(u^1, u^2, z) = \dot{e}_\alpha(u^1, u^2) + z \dot{K}_\alpha(u^1, u^2).$$

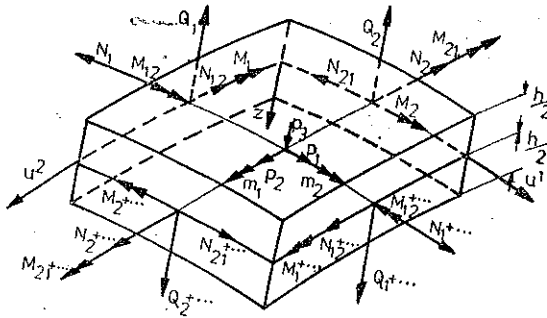
Siły wewnętrzne N_α , $N_{\alpha\nabla}$, M_α , $M_{\alpha\nabla}$ określimy na podstawie następujących wzorów (rys. 1):

$$(2.26) \quad N_\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\alpha (1 - zK_\nabla) dz, \quad N_{\alpha\nabla} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\nabla} (1 - zK_\nabla) dz,$$

$$M_\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\alpha (1 - zK_\nabla) z dz, \quad M_{\alpha\nabla} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\nabla} (1 - zK_\nabla) z dz.$$

Podstawiając wyrażenia (2.24) do wzorów (2.26) oraz wykorzystując (2.14), (2.17), (2.20), (2.25) i przyjmując

$$(2.27) \quad (1 - zK_\alpha)^{-1} = 1 + zK_\alpha + (z^2 K_\alpha^2) \approx 1 + zK_\alpha,$$



Rys 1

otrzymujemy, po wykonaniu całkowania i po pominięciu wielkości małych rzędu $h^2 K_\alpha^2$ i mniejszych wobec jedności, następujące wzory:

$$\begin{aligned}
 N_\alpha &= C_\alpha \left[\varepsilon_\alpha + \nu_\nabla \varepsilon_\nabla + \frac{h^2}{12} (K_\alpha - K_\nabla) \hat{\kappa}_\alpha \right] + \mathcal{N}_\alpha, \\
 N_{\alpha\nabla} &= C_{12} \left\{ \omega + \frac{h^2}{12} (K_\alpha - K_\nabla) \hat{\tau} + \frac{h^2 (K_1 - K_2)}{24 A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} (A_2 \psi_2) - \right. \right. \\
 (2.28) \quad & \left. \left. - \frac{\partial}{\partial u^2} (A_1 \psi_1) \right] \right\} + \mathcal{N}_{\alpha\nabla}, \\
 M_\alpha &= D_\alpha [\hat{\kappa}_\alpha + \nu_\nabla \hat{\kappa}_\nabla + (K_\alpha - K_\nabla) \varepsilon_\alpha] + \mathcal{M}_\alpha, \\
 M_{\alpha\nabla} &= D_{12} \left(\hat{\tau} + \frac{K_\alpha}{2} \omega \right) + \mathcal{M}_{\alpha\nabla},
 \end{aligned}$$

gdzie składowe $\hat{\kappa}_\alpha$, $\hat{\tau}$ stanu odkształcenia powłoki o średniej grubości mają postać

$$\begin{aligned}
 \hat{\kappa}_\alpha &= \kappa_\alpha + \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial u^\alpha} + \frac{1}{A_\alpha A_\nabla} \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\nabla} \psi_\nabla = -\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial u^\alpha} - \frac{1}{A_\alpha A_\nabla} \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\nabla} \theta_\nabla, \\
 (2.29) \quad \hat{\tau} &= \tau + \frac{1}{2} \left[\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\psi_1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\psi_2}{A_2} \right) \right] = \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\theta_1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\theta_2}{A_2} \right) - K_1 \omega_2 - K_2 \omega_1,
 \end{aligned}$$

przy czym

$$(2.30) \quad \psi_\alpha = \frac{6Q_\alpha}{5hG_{\alpha 3}}, \quad \theta_\alpha = \chi_\alpha - \psi_\alpha,$$

a składowe ε_α , ω_α , ω , κ_α , τ określone są za pomocą (2.18) i (2.19).

Wielkość θ_α oznacza średni kąt obrotu normalnej do środkowej powierzchni powłoki, a wielkości \mathcal{N}_α , $\mathcal{N}_{\alpha\nabla}$, \mathcal{M}_α , $\mathcal{M}_{\alpha\nabla}$ zależą od obciążenia zewnętrznego i odkształceń wstępnych bądź termicznych i są określone za pomocą wzorów:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_\alpha &= \frac{\nu_{3\alpha} + \nu_\alpha \nu_{3\nabla}}{1 - \nu_1 \nu_2} h \left(t_3 - \frac{1}{6} K_\nabla h t_3' \right) + \frac{C_\alpha}{12} \left\{ \frac{h}{A_\alpha} \left(\frac{\partial s'_\alpha}{\partial u^\alpha} + \frac{s'_\nabla}{A_\nabla} \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\nabla} \right) - \right. \\
 &- (K_\alpha - K_\nabla) \frac{h^2}{5A_\alpha} \left(\frac{\partial s_\alpha}{\partial u^\alpha} + \frac{s_\nabla}{A_\nabla} \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\nabla} \right) + \frac{\nu_\nabla h}{A_\nabla} \left(\frac{\partial s'_\nabla}{\partial u^\nabla} + \frac{s'_\alpha}{A_\alpha} \frac{\partial A_\nabla}{\partial u^\alpha} \right) - \frac{K_\alpha h^2}{2} \dot{\kappa}_3 - \\
 &- (K_\alpha - K_\nabla) h \dot{\varepsilon}_3 - 12 (\dot{\varepsilon}_\alpha + \nu_\nabla \dot{\varepsilon}_\nabla) + K_\nabla h^2 (\dot{\kappa}_\alpha + \nu_\nabla \dot{\kappa}_\nabla) - \\
 &- \frac{h^2}{2A_\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_3}{\partial u^\alpha} \right) + \frac{1}{A_\nabla} \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\nabla} \left(\frac{1}{A_\nabla} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_3}{\partial u^\nabla} \right) \right] - \\
 &- \left. \frac{\nu_\nabla h^2}{2A_\nabla} \left[\frac{\partial}{\partial u^\nabla} \left(\frac{1}{A_\nabla} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_3}{\partial u^\alpha} \right) + \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial A_\nabla}{\partial u^\alpha} \left(\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_3}{\partial u^\alpha} \right) \right] \right\}, \\
 \mathcal{N}_{\alpha\nabla} &= \frac{C_{12} h}{12} \left\{ \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{s'_1}{A_1} - \frac{1}{2A_1^2} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_3}{\partial u^1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{s'_2}{A_2} - \frac{1}{2A_2^2} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_3}{\partial u^2} \right) + \right. \\
 &- \frac{K_\alpha - K_\nabla}{10} h \left[\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{s_1}{A_1} + \frac{h^2}{8A_1^2} \frac{\partial \dot{\kappa}_3}{\partial u^1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{s_2}{A_2} + \frac{h^2}{8A_2^2} \frac{\partial \dot{\kappa}_3}{\partial u^2} \right) \right] + \\
 &+ \left. \frac{K_1 - K_2}{10A_1 A_2} h \left[\frac{\partial}{\partial u^2} (s_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial u^1} (s_2 A_2) \right] \right\}, \\
 \mathcal{M}_\alpha &= \frac{\nu_{3\alpha} + \nu_\alpha \nu_{3\nabla}}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} h^3 \left(\frac{2}{h} t_3' - K_\nabla t_3 \right) - D_\alpha \left\{ \frac{1}{5A_\alpha} \left(\frac{\partial s_\alpha}{\partial u^\alpha} + \frac{s_\nabla}{A_\nabla} \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\nabla} \right) + \right. \\
 &+ \frac{\nu_\nabla}{5A_\nabla} \left(\frac{\partial s_\nabla}{\partial u^\nabla} + \frac{s_\alpha}{A_\alpha} \frac{\partial A_\nabla}{\partial u^\alpha} \right) + (K_\alpha + \nu_\nabla K_\nabla) \dot{\varepsilon}_3 + \dot{\kappa}_\alpha + \nu_\nabla \dot{\kappa}_\nabla - K_\nabla (\dot{\varepsilon}_\alpha + \nu_\nabla \dot{\varepsilon}_\nabla) + \\
 &+ \frac{h^2}{40A_\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \dot{\kappa}_3}{\partial u^\alpha} \right) + \frac{1}{A_\nabla} \frac{\partial A_\alpha}{\partial u_\nabla} \left(\frac{1}{A_\nabla} \frac{\partial \dot{\kappa}_3}{\partial u^\nabla} \right) \right] + \\
 &+ \left. \frac{\nu_\nabla h^2}{40A_\nabla} \left[\frac{\partial}{\partial u^\nabla} \left(\frac{1}{A_\nabla} \frac{\partial \dot{\kappa}_3}{\partial u^\nabla} \right) + \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial A_\nabla}{\partial u^\alpha} \left(\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \dot{\kappa}_3}{\partial u^\alpha} \right) \right] \right\}, \\
 \mathcal{M}_{\alpha\nabla} &= - \frac{D_{12}}{5} \left\langle \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{s_1}{A_1} + \frac{h^2}{8} \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial \dot{\kappa}_3}{\partial u^1} \right) + \right. \\
 &+ \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{s_2}{A_2} + \frac{h^2}{8} \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial \dot{\kappa}_3}{\partial u^2} \right) + \\
 &+ \frac{3}{8} (K_\alpha - K_\nabla) h \left\{ \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial u^2} \left[\frac{1}{A_1} \left(\frac{s'_1}{A_1} - \frac{h}{2A_1} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_3}{\partial u^1} \right) \right] + \right. \\
 &+ \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial u^1} \left[\frac{1}{A_2} \left(\frac{s'_2}{A_2} - \frac{h}{2A_2} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_3}{\partial u^2} \right) \right] \right\} + \\
 &+ \frac{3}{8} (K_1 - K_2) h \left[\frac{\partial}{\partial u^2} (A_1 s'_1) - \frac{\partial}{\partial u^1} (A_2 s'_2) \right] \rangle,
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

gdzie

$$(2.32) \quad C_\alpha = \frac{E_\alpha h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad C_{12} = G_{12} h, \quad D_\alpha = \frac{C_\alpha h^2}{12}, \quad D_{12} = \frac{C_{12} h^2}{6}$$

oznaczają odpowiednio sztywności podłużne i giętkie powłoki wykonanej z materiału ortotropowego.

Wyprowadzimy jeszcze wzory na siły wewnętrzne przy założeniu $hK_\alpha \ll 1$. Jeżeli po podstawieniu (2.24) do wzorów (2.26) i uwzględnieniu (2.14), (2.17), (2.18) i (2.25) przyjmiemy pod znakiem całki

$$(2.33) \quad 1 - zK_\alpha \approx 1,$$

to przy wykonaniu całkowania i pominięciu wielkości małych rzędu hK_α i mniejszych w porównaniu z jednością, otrzymujemy

$$(2.34) \quad \begin{aligned} N_\alpha &= C_\alpha (\varepsilon_\alpha + \nu_\nabla \varepsilon_\nabla) + \mathcal{N}_\alpha, \\ N_{\alpha\nabla} &= C_{12} \omega + \mathcal{N}_{\alpha\nabla} - K_\nabla (D_{12} \hat{\tau} + \mathcal{M}_{\alpha\nabla}), \\ M_\alpha &= D_\alpha (\hat{\kappa}_\alpha + \nu_\nabla \hat{\kappa}_\nabla) + \mathcal{M}_\alpha, \\ M_{\alpha\nabla} &= D_{12} \hat{\tau} + \mathcal{M}_{\alpha\nabla}, \end{aligned}$$

przy czym wzór (2.34)₂ podano w postaci Nowożyłowa tak, aby było spełnione szóste równanie równowagi (2.39). Składowe stanu odkształcenia ε_α , ω , $\hat{\kappa}_\alpha$, $\hat{\tau}$ wyrażają się za pomocą (2.18), (2.19), (2.29) i (2.30). Wzory (2.34) mogą być wykorzystane przy ocenie wpływu naprężeń stycznych (na grubości) w powłokach dostatecznie cienkich. Wzory (2.31) należy zgodnie z (2.33) odpowiednio uprościć. Wygodnie jest dokonać tego dla danego obciążenia zewnętrznego i rozkładu odkształceń wstępnych lub termicznych, gdyż wtedy możliwa jest dokładniejsza analiza rzędu wielkości poszczególnych składników we wzorach (2.31).

2.3. Równania nierozdzielności

W celu otrzymania równań nierozdzielności, uwzględniających odkształcenia postaciowe na grubości powłoki wykorzystamy następujące trzy znane równania nierozdzielności, wyprowadzone dla powłoki cienkiej przy założeniach Kirchhoffa-Love'a:

$$(2.35) \quad \begin{aligned} \frac{\partial (A_\alpha \kappa_\alpha)}{\partial u^\nabla} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\nabla} \kappa_\nabla - \frac{\partial (A_\nabla \tau)}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial A_\nabla}{\partial u^\alpha} \tau - \frac{\partial A_\nabla}{\partial u^\alpha} K_\alpha \omega - \\ - K_\nabla \left(\mathcal{H}_\nabla + \frac{A_\nabla}{2} \frac{\partial \omega}{\partial u^\alpha} \right) = 0, \\ K_1 \kappa_2 + K_2 \kappa_1 + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\mathcal{H}_1}{A_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\mathcal{H}_2}{A_2} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.36) \quad \mathcal{H}_\alpha = \frac{\partial A_\nabla}{\partial u^\alpha} (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\nabla) - A_\nabla \frac{\partial \varepsilon_\nabla}{\partial u^\alpha} + \frac{A_\alpha}{2} \frac{\partial \omega}{\partial u^\nabla} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\nabla} \omega.$$

Podstawiając do równań (2.35) zgodnie z (2.29) wyrażenia

$$(2.37) \quad \begin{aligned} \kappa_\alpha &= \hat{\kappa}_\alpha - \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial u^\alpha} - \frac{1}{A_\alpha A_\nabla} \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\nabla} \psi_\nabla, \\ \tau &= \hat{\tau} - \frac{1}{2} \left[\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\psi_1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\psi_2}{A_2} \right) \right], \end{aligned}$$

oraz wykorzystując tożsamość Gaussa i wzory Codazziego–Mainardiego, otrzymujemy poszukiwane równania nierozdzielności:

$$(2.38) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial (A_\alpha \hat{\kappa}_\alpha)}{\partial u^\nabla} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\nabla} \hat{\kappa}_\alpha - \frac{\partial (A_\nabla \hat{\tau})}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial A_\nabla}{\partial u^\alpha} \hat{\tau} - \frac{\partial A_\nabla}{\partial u^\alpha} K_\alpha \omega - \\ & - K_\nabla \left(\mathcal{H}_\nabla + \frac{A_\nabla}{2} \frac{\partial \omega}{\partial u^\alpha} - A_\alpha A_\nabla K_\alpha \psi_\nabla \right) - \\ & - \frac{A_\nabla}{2} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left\{ \frac{1}{A_\alpha A_\nabla} \left[\frac{\partial (A_\alpha \psi_\alpha)}{\partial u^\nabla} - \frac{\partial (A_\nabla \psi_\nabla)}{\partial u^\alpha} \right] \right\} = 0, \\ & K_1 \hat{\kappa}_2 + K_2 \hat{\kappa}_1 + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\mathcal{H}_1}{A_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\mathcal{H}_2}{A_2} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial (A_2 K_2 \psi_1)}{\partial u^1} + \frac{\partial (A_1 K_1 \psi_2)}{\partial u^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

W równaniach (2.38) nie występują *explicite* odkształcenia wstępne, ponieważ równania te stanowią warunki całkowalności związków geometrycznych (2.18)_{1,2} i (2.29).

Łatwo sprawdzić, że równania (2.38) pokrywają się z równaniami nierozdzielności podanymi przez B. P. PIELIECHA [9], (I, 36) oraz [10] (4.7)—oczywiście po odpowiedniej zamianie oznaczeń.

Zamieszczony tu wywód równań nierozdzielności (2.38) teorii liniowej powłok przy uwzględnieniu poprzecznych odkształceń postaciowych, opierający się na równaniach nierozdzielności z teorii powłok Kirchhoffa–Love’a jest znacznie prostszy od innych znanych sposobów wyprowadzania równań (2.38) (np. [9]). Podobnie można otrzymać równania nierozdzielności również w innych przypadkach, jeżeli składowe stanu odkształcenia, występujące w teorii powłok Kirchhoffa–Love’a, dają się wyrazić za pomocą — odniesionych do środkowej powierzchni powłoki — składowych stanu przemieszczenia i odkształcenia teorii powłok odpowiednio uogólnionej.

2.4. Równania równowagi i warunki brzegowe

W równaniach i związkach wyprowadzonych w p.2.1–2.3 występują te same wielkości statyczne (siły wewnętrzne) co w teorii klasycznej Kirchhoffa–Love’a

(por. (2.15), (2.26)). Zatem wykorzystamy tu powszechnie znane równania różniczkowe równowagi, które mają postać (rys. 1)

$$(2.39) \quad \begin{aligned} \frac{\partial (A_{\nabla} N_{\alpha})}{\partial u^{\alpha}} + \frac{\partial (A_{\alpha} N_{\nabla \alpha})}{\partial u^{\nabla}} + \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial u^{\nabla}} N_{\alpha \nabla} - \frac{\partial A_{\nabla}}{\partial u^{\alpha}} N_{\nabla} - A_{\alpha} A_{\nabla} K_{\alpha} Q_{\alpha} + A_{\alpha} A_{\nabla} p_{\alpha} &= 0, \\ \frac{\partial (A_2 Q_1)}{\partial u^1} + \frac{\partial (A_1 Q_2)}{\partial u^2} + A_1 A_2 (K_1 N_1 + K_2 N_2) + A_1 A_2 p_3 &= 0, \\ \frac{\partial (A_{\nabla} M_{\alpha})}{\partial u^{\alpha}} + \frac{\partial (A_{\alpha} M_{\nabla \alpha})}{\partial u^{\nabla}} + \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial u^{\nabla}} M_{\alpha \nabla} - \frac{\partial A_{\nabla}}{\partial u^{\alpha}} M_{\nabla} - A_{\alpha} A_{\nabla} Q_{\alpha} + A_{\alpha} A_{\nabla} m_{\alpha} &= 0, \\ N_{12} - N_{21} + K_2 M_{21} - K_1 M_{12} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.40) \quad \begin{aligned} p_1 &= q_i^- \left(1 + \frac{h}{2} K_1\right) \left(1 + \frac{h}{2} K_2\right) + q_i^+ \left(1 - \frac{h}{2} K_1\right) \left(1 - \frac{h}{2} K_2\right) + \\ &\quad + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} q_1 (1 - zK_1) (1 - zK_2) dz, \\ m_{\alpha} &= \frac{h}{2} \left[q_{\alpha}^+ \left(1 - \frac{h}{2} K_1\right) \left(1 - \frac{h}{2} K_2\right) - q_{\alpha}^- \left(1 + \frac{h}{2} K_1\right) \left(1 + \frac{h}{2} K_2\right) \right] + \\ &\quad + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z q_{\alpha} (1 - zK_1) (1 - zK_2) dz, \end{aligned}$$

przy czym q_i są składowymi obciążeniami zewnętrznego objętościowego w kierunkach współrzędnych u^i ($u^3 = z$), q_i^{\pm} — składowymi obciążeniami odpowiednio na powierzchniach $z = \pm h/2$.

Podstawiając związki geometryczne (2.7), (2.18), (2.19), (2.29) i (2.30) do wzorów (2.28), a następnie uzyskane wyrażenia do równań równowagi (2.39)_{1, 3}, otrzymamy układ pięciu równań różniczkowych w ogólności dziesiątego rzędu z pięcioma niewiadomymi: $w_1, w_2, w_3, \theta_1, \theta_2$, przy czym postać takich równań przemieszczeniowych jest bardzo złożona. Zatem w rozważanej teorii powłok o średniej grubości należy na brzegu spełnić pięć warunków.

Niech np. brzeg powłoki pokrywa się z linią parametryczną $u^2 = \text{const}$. Typowe warunki brzegowe mają postać:

1) brzeg całkowicie utwardzony

$$w_1 = w_2 = w_3 = \theta_1 = \theta_2 = 0;$$

2) brzeg podparty przegubowo-nieprzesuwnie

$$w_1 = w_2 = w_3 = M_2 = 0 \text{ i } \theta_1 = 0 \quad \text{lub} \quad M_{21} = 0;$$

3) brzeg swobodny

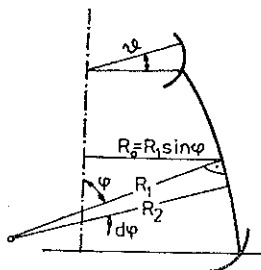
$$N_2 = N_{21} = Q_2 = M_2 = M_{21} = 0.$$

Jak widać, nie zachodzi teraz potrzeba w przypadku brzegu swobodnego wprowadzenia sił zastępczych, jak w teorii cienkich powłok Kirchhoffa-Love'a, w której występują równania różniczkowe ósmego rzędu.

3. POWŁOKI OBROTOWE, RÓWNIANIA TYPU E. MEISSNERA DLA OBROTOWO-SYMETRYCZNEGO ZGINANIA

Kształt środkowej powierzchni powłoki obrotowej opisujemy za pomocą współrzędnych $u^1 = \vartheta$, $u^2 = \varphi$ (rys. 2). Oznaczając przez $R_1(\varphi)$, $R_2(\varphi)$ odpowiednio promień krzywizny równoleżnikowej i południkowej, mamy

$$(3.1) \quad A_1 = R_1 \sin \varphi, \quad A_2 = R_2, \quad K_1 = \frac{1}{R_1}, \quad K_2 = \frac{1}{R_2}.$$



Rys. 2

Poza tym dla skrócenia zapisów wprowadzamy, zwyczajowe w powłokach obrotowych, oznaczenia dla przemieszczeń:

$$(3.2) \quad u = w_1, \quad v = w_2, \quad w = w_3.$$

Uwzględniając w równaniach i wzorach p.2 oznaczenia $u^1 = \vartheta$, $u^2 = \varphi$, (3.2) oraz związki (3.1) i wynikający z (2.3) wzór $dR_0/d\varphi = R_2 \cos \varphi$, można łatwo otrzymać odpowiednie równania i związki dla powłok obrotowych.

Rozważymy szczegółowo przypadek obrotowo-symetrycznego zginania, w którym zachodzą następujące zależności:

$$(3.3) \quad p_1 = m_1 = t_1 = t'_1 = Q_1 = N_{12} = N_{21} = M_{12} = M_{21} = u = 0, \\ s_1 = s'_1 = \mathcal{N}_{12} = \mathcal{N}_{21} = \mathcal{M}_{12} = \mathcal{M}_{21} = 0.$$

Pozostałe wielkości charakteryzujące obciążenie zewnętrzne, przemieszczenia, stan odkształcenia i naprężenia są funkcjami tylko kąta φ ($\partial/\partial\vartheta = 0$, $\partial/\partial\varphi = d/d\varphi$).

Postępując zupełnie podobnie jak w przypadku obrotowo-symetrycznego zginania powłok cienkich (por. np. [10]) wyprowadzimy równania typu Meissnera dla powłok o średniej grubości.

Dwa pierwsze równania równowagi (2.39) przekształcamy do postaci:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{R_2} \frac{dU}{d\varphi} + \frac{P}{R_2 \sin^2 \varphi} - R_1 p_3, \\ N_2 &= -\frac{U}{R_1} \operatorname{ctg} \varphi - \frac{P}{R_1 \sin^2 \varphi}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.5) \quad U = R_1 Q_2, \quad P = bP^0 + \int_{\varphi}^{\varphi_0} R_0 R_2 (p_2 \sin \varphi + p_3 \cos \varphi) d\varphi,$$

przy czym P^0 oznacza składową pionową obciążenia odniesioną do jednostki długości górnego brzegu, o współrzędnej $\varphi = \bar{\varphi}$.

Następnie znajdujemy wzory odwrotne do (2.28)₁ wykorzystując (2.18)₁, (2.32) oraz $E_1 v_2 + E_2 v_1$:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{R_1} (v \operatorname{ctg} \varphi - w) = \frac{1}{E_1 h} (N_1 - v_1 N_2) - \frac{1}{E_1 h} (\mathcal{N}_1 - v_1 \mathcal{N}_2) - \\ &\quad - \frac{D_1}{E_1 h} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) (\hat{\kappa}_1 + v_2 \hat{\kappa}_2), \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{R_2} \left(\frac{dv}{d\varphi} - w \right) = \frac{1}{E_2 h} (N_2 - v_2 N_1) - \frac{1}{E_2 h} (\mathcal{N}_2 - v_2 \mathcal{N}_1) - \\ &\quad - \frac{D_2}{E_2 h} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) (\hat{\kappa}_2 + v_1 \hat{\kappa}_1), \end{aligned}$$

gdzie zgodnie z (2.29)₁ mamy

$$(3.7) \quad \hat{\kappa}_1 = -\frac{\theta_2}{R_1} \operatorname{ctg} \varphi, \quad \hat{\kappa}_2 = -\frac{1}{R_2} \frac{d\theta_2}{d\varphi}.$$

Natomiast wielkości \mathcal{N}_1 , \mathcal{N}_2 oraz \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 określone za pomocą (2.31) po uwzględnieniu (3.3) są następujące:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= \frac{v_{31} + v_1 v_{32}}{1 - v_1 v_2} h \left(t_3 - \frac{h}{6R_2} t'_3 \right) + \frac{C_1}{12} \left\{ \frac{h}{R_1} s'_2 \operatorname{ctg} \varphi + \frac{v_2 h}{R_2} \frac{ds'_2}{d\varphi} - \right. \\ &\quad - \frac{h^2}{5R_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) s_2 \operatorname{ctg} \varphi - \frac{h^2}{2R_1} \hat{\kappa}_3 - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) h \hat{\varepsilon}_3 - 12 (\hat{\varepsilon}_1 + v_2 \hat{\varepsilon}_2) + \\ &\quad \left. + \frac{h^2}{R_2} (\hat{\kappa}_1 + v_2 \hat{\kappa}_2) - \frac{h^2}{2} \left[\operatorname{ctg} \varphi \frac{d\hat{\varepsilon}_3}{d\varphi} + v_2 \frac{1}{R_2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{R_2} \frac{d\hat{\varepsilon}_3}{d\varphi} \right) \right] \right\}, \\ \mathcal{N}_2 &= \frac{v_{32} + v_2 v_{31}}{1 - v_1 v_2} h \left(t_3 - \frac{h}{6R_1} t'_3 \right) + \frac{C_2}{12} \left\{ \frac{h}{R_2} \frac{ds'_2}{d\varphi} + \frac{v_1 h}{R_1} s'_2 \operatorname{ctg} \varphi - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad & -\frac{h^2}{5R_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \frac{ds_2}{d\varphi} - \frac{h^2}{2R_2} \dot{\kappa}_3 - \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) h\dot{\varepsilon}_3 - 12 (\dot{\varepsilon}_2 + \nu_1 \dot{\varepsilon}_1) + \\
 & \left. + \frac{h^2}{R_1} (\dot{\kappa}_2 + \nu_1 \dot{\kappa}_1) - \frac{h^2}{2} \left[\frac{1}{R_2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{R_2} \frac{d\dot{\varepsilon}_3}{d\varphi} \right) + \nu_1 \frac{\text{ctg } \varphi}{R_1 R_2} \frac{d\dot{\varepsilon}_3}{d\varphi} \right] \right\}, \\
 \mathcal{M}_1 = & \frac{\nu_{31} + \nu_1 \nu_{32}}{1 - \nu_1 \nu_2} h^3 \left(\frac{2}{h} t'_3 - \frac{1}{R_2} t_3 \right) - D_1 \left\{ \frac{s_2}{5R_1} \text{ctg } \varphi + \frac{\nu_2}{5R_2} \frac{ds_2}{d\varphi} + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu_2}{R_2} \right) \dot{\varepsilon}_3 + \dot{\kappa}_1 + \nu_2 \dot{\kappa}_2 - \frac{1}{R_2} (\dot{\varepsilon}_1 + \nu_2 \dot{\varepsilon}_2) + \right. \\
 & \left. + \frac{h^2}{40} \left[\frac{\text{ctg } \varphi}{R_1 R_2} \frac{d\dot{\kappa}_3}{d\varphi} + \frac{\nu_2}{R_2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{R_2} \frac{d\dot{\kappa}_3}{d\varphi} \right) \right] \right\}, \\
 \mathcal{M}_2 = & \frac{\nu_{32} + \nu_2 \nu_{31}}{1 - \nu_1 \nu_2} h^3 \left(\frac{2}{h} t'_3 - \frac{1}{R_1} t_3 \right) - D_2 \left\{ \frac{1}{5R_2} \frac{ds_2}{d\varphi} + \frac{\nu_1}{5R_1} s_2 \text{ctg } \varphi + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\nu_1}{R_1} \right) \dot{\varepsilon}_3 + \dot{\kappa}_2 + \nu_1 \dot{\kappa}_1 - \frac{1}{R_1} (\dot{\varepsilon}_2 + \nu_1 \dot{\varepsilon}_1) + \right. \\
 & \left. + \frac{h^2}{40} \left[\frac{1}{R_2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{R_2} \frac{d\dot{\kappa}_3}{d\varphi} \right) + \nu_1 \frac{\text{ctg } \varphi}{R_1 R_2} \frac{d\dot{\kappa}_3}{d\varphi} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Na podstawie (3.6) i (2.30) otrzymujemy

$$(3.9) \quad \frac{d}{d\varphi} (R_1 \varepsilon_1) + (R_1 \varepsilon_1 - R_2 \varepsilon_2) \text{ctg } \varphi + R_2 \theta_2 + R_2 \frac{6Q_2}{5hG_{23}} = 0.$$

Po podstawieniu wyrażeń (2.28)₃ do trzeciego równania równowagi (2.39) znajdujemy

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad & D_2 \frac{d}{d\varphi} [R_1 (\dot{\kappa}_2 + \nu_1 \dot{\kappa}_1)] + [D_2 R_1 (\dot{\kappa}_2 + \nu_1 \dot{\kappa}_1) - D_1 R_2 (\dot{\kappa}_1 + \nu_2 \dot{\kappa}_2)] \text{ctg } \varphi - \\
 & - R_1 R_2 Q_2 + D_2 \frac{d}{d\varphi} \left[\left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) \varepsilon_2 \right] + \left[D_2 \left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) \varepsilon_2 + \right. \\
 & \left. + D_1 \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \varepsilon_1 \right] \text{ctg } \varphi + R_1 \frac{d\mathcal{M}_2}{d\varphi} + (\mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_1) R_2 \text{ctg } \varphi + R_1 R_2 m_2 = 0.
 \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu wzorów (3.6) i (3.5)₂ w równaniach (3.9), (3.10) znajdziemy

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad & \frac{d}{d\varphi} [R_1 (N_1 - \nu_1 N_2)] + [R_1 (N_1 - \nu_1 N_2) - \alpha R_2 (N_2 - \nu_2 N_1)] \text{ctg } \varphi - \\
 & - D_1 \frac{d}{d\varphi} \left[\left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) (\dot{\kappa}_1 + \nu_2 \dot{\kappa}_2) \right] - D_1 \left[\left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) (\dot{\kappa}_1 + \nu_2 \dot{\kappa}_2) - \right. \\
 & \left. - \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) (\dot{\kappa}_2 + \nu_1 \dot{\kappa}_1) \right] \text{ctg } \varphi + E_1 h R_2 \theta_2 + \frac{6E_1}{5G_{23}} \frac{R_2}{R_1} U = \\
 & = \frac{d}{d\varphi} [R_1 (\mathcal{N}_1 - \nu_1 \mathcal{N}_2)] + [R_1 (\mathcal{N}_1 - \nu_1 \mathcal{N}_2) - \alpha R_2 (\mathcal{N}_2 - \nu_2 \mathcal{N}_1)] \text{ctg } \varphi,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad & \frac{d}{d\varphi} [R_1 (\hat{\kappa}_2 + \nu_1 \hat{\kappa}_1)] + [R_1 (\hat{\kappa}_2 + \nu_1 \hat{\kappa}_1) - \alpha R_2 (\hat{\kappa}_1 + \nu_2 \hat{\kappa}_2)] \operatorname{ctg} \varphi - \\
 & \quad - \frac{1}{D_2} R_2 U + \frac{1}{E_2 h} \frac{d}{d\varphi} \left[\left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) (N_2 - \nu_2 N_1) \right] + \\
 & \quad + \frac{1}{E_2 h} \left[\left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) (N_2 - \nu_2 N_1) - \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) (N_1 - \nu_1 N_2) \right] \operatorname{ctg} \varphi - \\
 & \quad - \frac{D_2}{E_2 h} \frac{d}{d\varphi} \left[R_1 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)^2 (\hat{\kappa}_2 + \nu_1 \hat{\kappa}_1) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{D_2}{E_2 h} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)^2 [R_1 (\hat{\kappa}_2 + \nu_1 \hat{\kappa}_1) - \alpha R_2 (\hat{\kappa}_1 + \nu_2 \hat{\kappa}_2)] \operatorname{ctg} \varphi = \right. \\
 & \quad = - \frac{R_1 R_2}{D_2} m_2 - \frac{1}{D_2} \left[R_1 \frac{dM_2}{d\varphi} + R_2 (M_2 - M_1) \operatorname{ctg} \varphi \right] + \\
 & \quad + \frac{1}{E_2 h} \frac{d}{d\varphi} \left[\left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) (\mathcal{N}_2 - \nu_2 \mathcal{N}_1) \right] + \frac{1}{E_2 h} \left[\left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) (\mathcal{N}_2 - \nu_2 \mathcal{N}_1) - \right. \\
 & \quad \left. - \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) (\mathcal{N}_1 - \nu_1 \mathcal{N}_2) \right] \operatorname{ctg} \varphi,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.12) \quad \alpha = \frac{E_1}{E_2}$$

jest współczynnikiem ortotropii (dla izotropii $\alpha=1$).

W równaniu (3.11)₂ zgodnie z założeniami teorii pominiemy wyrazy zawierające iloczyny odkształceń $\hat{\kappa}_1$, $\hat{\kappa}_2$ przez $(1/R_2 - 1/R_1)^2$. Wtedy po podstawieniu (3.4) i (3.7) do (3.11) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (3.13) \quad & L(U) + \nu_1 U - \frac{6E_1}{5G_{23}} \frac{R_2}{R_1} U - E_1 h R_2 \theta_2 - D_1 \nu_2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) L(\theta_2) - \\
 & \quad - D_1 \left\{ \left[\nu_2 \frac{R_1}{R_2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \operatorname{ctg} \varphi \right] \frac{d\theta_2}{d\varphi} + \right. \\
 & \quad \left. + \left[\operatorname{ctg} \varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + 2\nu_1 \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \operatorname{ctg}^2 \varphi - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] \theta \right\} = \bar{F}, \\
 & L(\theta_2) - \nu_1 \theta_2 + \frac{R_2}{D_2} U + \frac{\nu_2}{E_2 h} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) L(U) + \\
 & \quad + \frac{1}{E_2 h} \left\{ \left[\nu_2 \frac{R_1}{R_2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \operatorname{ctg} \varphi \right] \frac{dU}{d\varphi} - \right. \\
 & \quad \left. - \left[\operatorname{ctg} \varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - 2\nu_1 \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \operatorname{ctg}^2 \varphi - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] U \right\} = \bar{G},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.14) \quad L(\dots) = \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{R_1}{R_2} \frac{d(\dots)}{d\varphi} \right] + \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg} \varphi \frac{d(\dots)}{d\varphi} - \alpha \frac{R_2}{R_1} (\dots) \operatorname{ctg}^2 \varphi,$$

jest operatorem różniczkowym rzędu drugiego identycznym do operatora w równaniach E. Meissnera dla powłok cienkich (por. np. [15]), a wielkości \bar{F} i \bar{G} są następujące:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \bar{F} = & \frac{d}{d\varphi} \left[\left(\frac{R_1}{R_2} + \nu_1 \right) \frac{P}{\sin^2 \varphi} \right] + \left(\frac{R_1}{R_2} + 2\nu_1 + \alpha \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{P}{\sin^2 \varphi} \operatorname{ctg} \varphi - \\ & - \frac{d}{d\varphi} (R_1^2 p_3) - \left(\frac{R_1}{R_2} + \nu_1 \right) R_1 R_2 p_3 \operatorname{ctg} \varphi - \frac{d}{d\varphi} [R_1 (\mathcal{N}_1 - \nu_1 \mathcal{N}_2)] + \\ & + [R_1 (\mathcal{N}_1 - \nu_1 \mathcal{N}_2) - \alpha R_2 (\mathcal{N}_2 - \nu_2 \mathcal{N}_1)] \operatorname{ctg} \varphi, \\ \bar{G} = & \frac{R_1 R_2}{D_2} m_2 + \frac{1}{D_2} \left[R_1 \frac{d\mathcal{M}_2}{d\varphi} + R_2 (\mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_1) \operatorname{ctg} \varphi \right] - \\ & - \frac{1}{E_2 h} \frac{d}{d\varphi} \left[\left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) (\mathcal{N}_2 - \nu_2 \mathcal{N}_1) \right] - \frac{1}{E_2 h} \left[\left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) (\mathcal{N}_2 - \nu_1 \mathcal{N}_1) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) (\mathcal{N}_1 - \nu_1 \mathcal{N}_2) \right] \operatorname{ctg} \varphi - \frac{1}{E_2 h} \frac{d}{d\varphi} \left[\left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu_2}{R_2} \frac{P}{\sin^2 \varphi} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{E_2 h} \left[\left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu_2}{R_2} \right) + \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\nu_1}{R_1} \right) \right] \frac{P}{\sin^2 \varphi} \operatorname{ctg} \varphi + \\ & + \frac{1}{E_2 h} \frac{d}{d\varphi} \left[\nu_2 \left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) R_1 p_3 \right] + \frac{1}{E_2 h} \left[\nu_2 \left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \right] R_1 p_3 \operatorname{ctg} \varphi, \end{aligned}$$

przy czym $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ wyrażają się za pomocą (3.8).

Drugie z równań (3.13) mnożymy przez $D_1 \nu_2 (1/R_1 - 1/R_2)$ i dodajemy do pierwszego, a pierwsze równanie mnożymy przez $\nu_2 (1/R_1 - 1/R_2)/E_2 h$ i odejmujemy od drugiego. Po pominięciu wielkości małych rzędu h^2/R_a^2 ($\alpha=1, 2$) w porównaniu z jednością otrzymujemy układ równań

$$(3.16) \quad \begin{aligned} L(U) - \left(\frac{6E_1}{5G_{23}} - \nu_1 \right) \frac{R_2}{R_1} U - D_1 \left(f_1 \frac{d\theta_2}{d\varphi} + f_2 \theta_2 \right) - E_1 h R_2 \theta_2 = F, \\ L(\theta_2) - \nu_1 \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right) \theta_2 + \frac{1}{E_2 h} \left(g_1 \frac{dU}{d\varphi} + g_2 U \right) + \frac{R_2}{D_2} U = G, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 f_1(\varphi) &= v_2 \frac{R_1}{R_2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \operatorname{ctg} \varphi, \\
 g_1(\varphi) &= v_2 \frac{R_1}{R_2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \operatorname{ctg} \varphi, \\
 f_2(\varphi) &= \operatorname{ctg} \varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + 2v_1 \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \operatorname{ctg}^2 \varphi, \\
 g_2(\varphi) &= -\operatorname{ctg} \varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + 2v_1 \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \operatorname{ctg}^2 \varphi, \\
 F &= \bar{F} + D_1 v_2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \bar{G}, \\
 G &= \bar{G} - \frac{v_2}{E_2 h} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \bar{F}.
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

Wzory (3.17) można uprościć pomijając wielkości odpowiednio małe. Wygodnie jest jednak dokonać tego dla konkretnego rodzaju obciążenia zewnętrznego, ponieważ analiza możliwości uproszczeń wyrażeń na F i G , w przypadku ogólnym jest dość złożona.

Nadmienimy jeszcze, że z równań (3.16) można otrzymać równania E. Meissnera dla powłok cienkich [15], pomijając dodatkowe składniki uwzględniające wpływ sił poprzecznych i inne wyrazy rzędu h/R_α i wyższych rzędów. Fakt ten można szczególnie łatwo zauważyć w równaniach (3.13).

Na podstawie (3.6) po uwzględnieniu (3.4) i (3.7) otrzymujemy trzecie równanie różniczkowe umożliwiające wyznaczenie przemieszczenia v :

$$\begin{aligned}
 (3.18) \quad \frac{dv}{d\varphi} - v \operatorname{ctg} \varphi &= \sin \varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{v}{\sin \varphi} \right) = \frac{1}{E_1 h} \left\{ \left(\frac{R_1}{R_2} + v_1 \right) \frac{dU}{d\varphi} - \right. \\
 &\quad \left. - \left(v_1 + \alpha \frac{R_2}{R_1} \right) U \operatorname{ctg} \varphi - \left(\frac{R_1}{R_2} + 2v_1 + \alpha \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{P}{\sin^2 \varphi} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{R_1}{R_2} + v_1 \right) R_1 R_2 p_3 + R_1 (\mathcal{N}_1 - v_1 \mathcal{N}_2) - \alpha R_2 (\mathcal{N}_2 - v_2 \mathcal{N}_1) + \right. \\
 &\quad \left. + D_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left[\left(1 + v_2 \frac{R_1}{R_2} \right) \frac{d\theta_2}{d\varphi} + \left(1 + v_1 \frac{R_2}{R_1} \right) \theta_2 \operatorname{ctg} \varphi \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Przemieszczenie normalne w określamy ze związku (3.6)₁ przy wykorzystaniu (3.4), (3.7):

$$\begin{aligned}
 (3.19) \quad w &= v \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{E_1 h} \left[\frac{R_1}{R_2} \frac{dU}{d\varphi} - v_1 U \operatorname{ctg} \varphi - \left(\frac{R_1}{R_2} + v_1 \right) \frac{P}{\sin^2 \varphi} - \right. \\
 &\quad \left. - R_1^2 p_3 + R_1 (\mathcal{N}_1 - v_1 \mathcal{N}_2) - D_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left(\theta_2 \operatorname{ctg} \varphi + v_2 \frac{R_1}{R_2} \frac{d\theta_2}{d\varphi} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Sily wewnętrzne N_1 , N_2 , Q_2 wyznaczamy ze wzorów (3.4), (3.5)₁, a momenty zginające ze wzorów (2.28)₃, które po uwzględnieniu (3.7), (3.6) i (3.4) i pominięciu wielkości małych rzędu h^2/R_2^2 wobec jedności, przyjmują postać

$$M_1 = -D_1 \left\{ \frac{\theta_2}{R_1} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{v_2}{R_2} \frac{d\theta_2}{d\varphi} + \frac{1}{E_1 h} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left[\frac{1}{R_2} \frac{dU}{d\varphi} - \frac{v_1}{R_1} U \operatorname{ctg} \varphi - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{v_1}{R_1} \right) \frac{P}{\sin^2 \varphi} + R_1 p_3 + \mathcal{N}_1 - v_1 \mathcal{N}_2 \right] \right\} + \mathcal{M}_1, \quad (3.20)$$

$$M_2 = -D_2 \left\{ \frac{1}{R_2} \frac{d\theta_2}{d\varphi} + \frac{v_1}{R_1} \theta_2 \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{E_2 h} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left[\frac{v_2}{R_2} \frac{dU}{d\varphi} - \frac{U}{R_1} \operatorname{ctg} \varphi - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} \right) \frac{P}{\sin^2 \varphi} + v_2 R_1 p_3 - \mathcal{N}_2 + v_1 \mathcal{N}_1 \right] \right\} + \mathcal{M}_2.$$

Wyprowadzone powyżej równania różniczkowe typu E. Meissnera (3.16) można odpowiednio uprościć w różnych przypadkach szczególnych. Jeżeli przyjmiemy równe zero funkcje f_1 , f_2 , g_1 , g_2 określone za pomocą (3.17)₁₋₄, to otrzymamy równania dla powłok, w których mamy $h/R_2 \ll 1$, tj. równania teorii przy związkach fizycznych (2.34). Oczywiście należy przy tym konsekwentnie uprościć wzory (3.8) i (3.17)_{5,6}.

Można również przyjąć równe zero funkcje f_1 , f_2 , g_1 , g_2 , jeżeli wartości funkcji $\operatorname{ctg} \varphi$ nie są duże i promienie krzywizn R_1 , R_2 zmieniają się w sposób łagodny. Wtedy uproszczone równania (3.16) można traktować jako równania różniczkowe teorii technicznej.

Nadmienimy jeszcze, że równania typu E. Meissnera (3.16) są rzędu czwartego, a więc ich rozwiązanie ogólne zawiera cztery stałe całkowania. Poza tym dwie stałe całkowania otrzymamy z równań (3.18) oraz (3.4) (stała P°). Zatem łącznie w rozwiązaniu ogólnym problemu obrotowo-symetrycznego zginania powłoki o średniej grubości, podobnie jak w rozwiązaniach klasycznych równań Meissnera, występuje sześć stałych. W związku z tym faktem na brzegu (dolnym lub górnym) powłoki należy spełnić trzy warunki.

Typowe warunki brzegowe mają postać: 1) brzeg utwierdzony: $w=v=\theta_2=0$; 2) brzeg przegubowo-nieprzesuwny: $w=v=M_2=0$; 3) brzeg swobodny: $N_2=Q_2=M_2=0$.

Przypomnimy, że równania typu Meissnera z uwzględnieniem wpływu odkształceń postaciowych na grubości, dla powłok obrotowych, znajdujących się w obrotowo-symetrycznym stanie zgięciowym, podał pierwszy P. M. NAGHDI w pracy [6]. Autor ten nie uwzględnił jednak odkształceń wstępnych i termicznych oraz wpływu naprężeń σ_3 (normalnych do środkowej powierzchni) o znanym rozkładzie na grubości powłoki, a poza tym ograniczył rozważania do materiału izotropowego.

4. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ TYPU E. MEISSNERA W PRZYPADKU POWŁOKI SFERYCZNEJ

Przydatność równań typu E. Meissnera (3.16) do efektywnego uzyskania rozwiązania problemu zbadano dla izotopowej powłoki sferycznej o jednym brzegu, obciążonej równomiernie na górnej powierzchni.

W tym przypadku w odpowiednich równaniach i związkach p. 3 przyjęto $R_1 = R_2 = R = \text{const}$ i wprowadzono nową zmienną $x = \sin \varphi$. Otrzymane w ten sposób na podstawie (3.16) równania różniczkowe scałkowano poszukując rozwiązań w postaci

$$(4.1) \quad \theta_2 = \frac{R^2}{D} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}, \quad Q_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n+1}.$$

Stosując znaną w takim przypadku procedurę postępowania, otrzymano na nieznane współczynniki a_n , b_n ciąg rekurencyjnych równań, w których współczynniki a_0 , b_0 mogą przyjmować dowolne wartości. Zatem uzyskano dwa liniowo niezależne, nieosobliwe układy całek równań jednorodnych (3.16).

Dla rozważanego obciążenia $\bar{q}_2 = q \sin \varphi$, $\bar{q}_3 = q \cos \varphi$ wyznaczono całki szczególne równań (3.16).

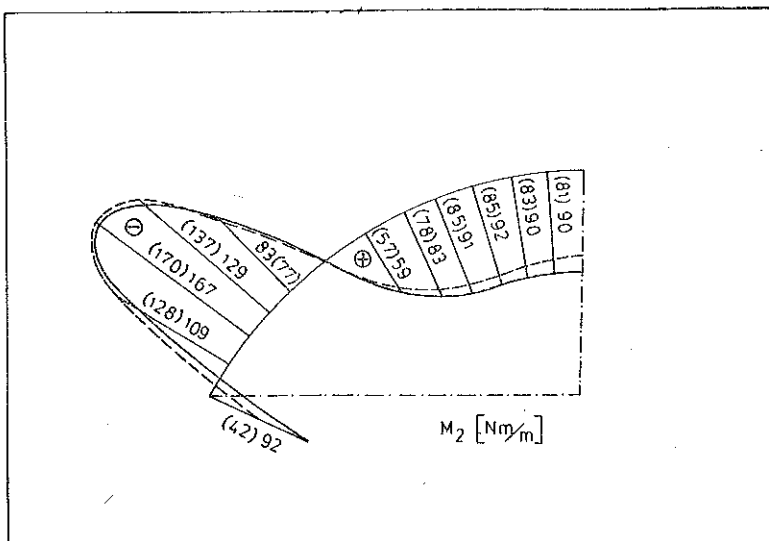
Następnie ze wzorów (3.4), (3.18)–(3.20) określono pozostałe siły wewnętrzne i przemieszczenia w powłoce.

Obliczenia przeprowadzono dla powłoki utwierdzonej przy następujących danych:

$$E = 3 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2}, \quad \nu = \frac{1}{6}, \quad q = 1 \text{ kN/m}^2, \quad a = 10,0 \text{ m},$$

$$h = 0,6 \text{ m}, \quad \zeta = 0,3$$

(a oznacza promień podstawy, ζ — wyniosłość).



Rys 3

Dla przykładu podano na rys. 3 wykres momentu zginającego M_2 w przypadku uwzględnienia omawianych w tej pracy efektów od naprężeń stycznych $\sigma_{\alpha\beta}$, normalnych σ_3 (por. (2.9) i (2.21)) i wyrażeń rzędu h/R w stosunku do jedności (linia ciągła) oraz w przypadku ich pominięcia — rozwiązanie klasyczne (linia przerywana, liczby w nawiasach).

Skromna informacja o sposobie rozwiązania otrzymanych w pracy równań typu E. Meissnera oraz o przykładzie jest spowodowana koniecznością ograniczenia objętości pracy. Wywód ogólniejszych równań zezwalających również na uwzględnienie odkształceń normalnych po grubości w odniesieniu do powłoki sferycznej wraz z wyczerpującym omówieniem metody rozwiązania problemu będzie podany w monografii książkowej autorów.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. E. REISSNER, *On the theory of bending of elastic plates*, J. Math. Phys., **23**, 1944.
2. E. REISSNER, *Stress strain relations in the theory of thin elastic shells*, J. Math. Phys., **31**, 1952.
3. A. J. LURIE, *Statika tonkostennych uprugich obolo ek*, Gostechizdat, Moskwa 1947.
4. A. E. GREEN and W. ZERNA, *The equilibrium of thin elastic shells*, Quart. J. Mech. Appl. Math., **3**, 1950.
5. P. H. NAGHDI, *On the theory of thin elastic shells*, Quart. Appl. Math., **14**, 1957.
6. P. M. NAGHDI, *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic shells of revolution*, Quart. Appl. Math., **15**, 1957.
7. P. M. NAGHDI, *Foundations of elastic shell theory*. Progress in solid mechanics, North Holland, **4**, Amsterdam 1963.
8. C. WOŹNIAK, *Nieliniowa teoria powłok*, PWN, Warszawa 1966.
9. B. P. PELECH, *Teorija oboloček s konečnoj estkostju*, Naukova Dumka, Kiev 1973.
10. B. P. PELECH, *Obobščennaja teorija oboloček*, Lvov 1978.
11. S. A. AMBARCUMIAN, *Ob čaja teorija anizotropnych oboloček*, Nauka, Moskva 1974.
12. K. Z. GALIMOV, *Teorija oboloček c učetom poperečnogo sdviga*, Izd. Kazan. Univ. 1977.
13. A. K. GALINS, *Rasčet plastin i oboloček po utočnennym teorijam*, Issledovanija po teorii plastin i obolo ek, Kazań 1967.
14. W. PIETRASZKIEWICZ, *Consistent second approximation to the elastic strain energy of a shell*, ZAMM, **5**, 1979.
15. Z. MAZURKIEWICZ, R. NAGÓRSKI, *O równaniach powłok obrotowych obciążonych obrotowo-symetrycznie*, Arch. Inż. Łąd., **24**, 1, 1978.

Резюме

ОБ УРАВНЕНИЯХ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ СДВИГА

В работе даются основные соотношения и уравнений линейной теории оболочек с учетом поперечных деформаций сдвига, вступительных (или термических) деформаций, а также напряжений нормальных к срединной поверхности оболочки с известным распределением на ее толщине. На основе соотношений и уравнений, выведенных в криволинейных ортогональных координатах, получены уравнения типа Э. Мейсснера для вращательных оболочек, нагруженных вращательно-симметричным образом, а также кратко описано решение этих уравнений в случае сферической оболочки, нагруженной равномерно на верхней поверхности. Все рассуждения касаются оболочек, изготовленных из упругого материала с ортотропной структурой.

SUMMARY

ON THE EQUATIONS OF LINEAR THEORY OF SHELLS TAKING INTO ACCOUNT
TRANSVERSAL DEVIATORIC STRAINS

Fundamental relations and equations are derived concerning the linear theory of shells which takes into account transversal deviatoric strains, initial (or thermal) deformations and stresses normal to the middle surface of the shell with a known distributions across its thickness. On the basis of the relations derived in curvilinear orthogonal coordinates for rotationally symmetric shell problems, the Meissner-type equations are derived. The solutions are shortly described in the case of a spherical shell loaded uniformly at the upper surface. All considerations are concerned with shells made of elastic orthotropic materials.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 maja 1980 r.
