

## PEWNE ROZWIĄZANIE PROBLEMU ZGINANIA POWŁOKI SFERYCZNEJ OBCIĄŻONEJ OBROTOWO-SYMETRYCZNIE

PIOTR WIŚNIAKOWSKI (WARSZAWA)

W pracy podano rozwiązanie problemu statyki cienkiej powłoki sferycznej o stałej grubości, wykonanej z materiału sprężysto jednorodnego i znajdującej się w obrotowo symetrycznym stanie zgięciowym. Otrzymano za pomocą rzeczywistych szeregów potęgowych rozwiązanie formalnie ścisłe dla powłoki sferycznej o dwóch brzegach. W odróżnieniu od znanych rozwiązań opartych przeważnie na równaniach Reissnera rozwiązano zagadnienie bezpośrednio w przemieszczeniach.

### 1. WSTĘP

Przedmiotem pracy jest pewien sposób rozwiązania — w ramach teorii liniowej — problemu statyki cienkiej powłoki sferycznej o stałej grubości, wykonanej z materiału sprężysto-jednorodnego, podlegającego prawu Hooke'a i znajdującej się w obrotowo-symetrycznym stanie zgięciowym.

Znane rozwiązania tego zagadnienia uzyskano na podstawie teorii E. Reissnera za pomocą zespolonych szeregów hipergeometrycznych [1] i rozwiązania przybliżone na podstawie teorii W. Z. Własowa dla powłok o małej wyniosłości [2] oraz na podstawie teorii zaburzeń brzegowych [1 i 3]. W pracy [4] podano rozwiązanie równań Reissnera za pomocą rzeczywistych szeregów potęgowych dotyczące powłoki o jednym brzegu, obciążonej ciężarem własnym. Rozwiązania wyżej wymienionego problemu można znaleźć np. w pracach [5 i 6].

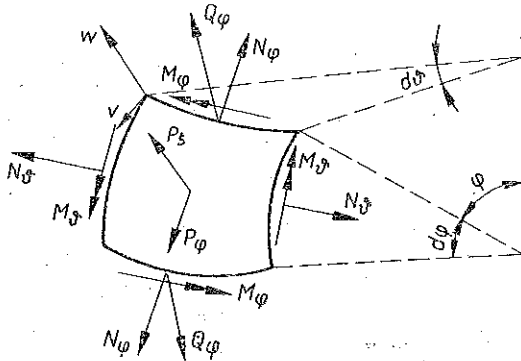
W niniejszej pracy otrzymano rozwiązanie formalnie ścisłe problemu statyki powłoki sferycznej o dwóch brzegach, stosując rzeczywiste szeregi potęgowe do równań przemieszczeniowych. Takie postępowanie zezwala unikając kłopotliwego całkowania niezbędnego dla rozwiązania opartego na równaniach E. Reissnera. Na podstawie uzyskanego algorytmu rozwiązania problemu opracowano przykłady przy wykorzystaniu maszyn cyfrowych.

### 2. RÓWNIANIA RÓŻNICZKOWE I ZWIĄZKI FIZYCZNE

Równania różniczkowe równowagi powłoki sferycznej we współrzędnych uogólnionych  $\varphi, v$  mają postać następującą:

$$(2.1) \quad \frac{dN_\varphi}{d\varphi} + (N_\varphi - N_\theta) \operatorname{ctg} \varphi - Q_\varphi = -r p_\varphi, \quad \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} + Q_\varphi \operatorname{ctg} \varphi + N_\varphi + N_\theta = r p_\xi,$$
$$\frac{dM_\varphi}{d\varphi} + (M_\varphi - M_\theta) \operatorname{ctg} \varphi - r Q_\varphi = 0,$$

gdzie przez  $M_\varphi$ ,  $M_\vartheta$ ,  $N_\varphi$ ,  $N_\vartheta$  i  $Q_\varphi$  oznaczono odpowiednie siły wewnętrzne (rys. 1),  $r$  promień sfery,  $p_\varphi$ ,  $p_\vartheta$  składowe obciążenia odpowiednio w kierunku  $\varphi$  oraz normalnej zewnętrznej oraz  $v$ ,  $w$  przemieszczenia w tych kierunkach.



Rys. 1.

Związki fizyczne wyrażamy w znanej postaci:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} N_\varphi &= \frac{F}{r} \left[ \frac{dv}{d\varphi} + v \operatorname{ctg} \varphi + (1+v) w \right], \\ N_\vartheta &= \frac{F}{r} \left[ v \frac{dv}{d\varphi} + v \operatorname{ctg} \varphi + (1+v) w \right], \\ M_\varphi &= -\frac{D}{r^2} \left[ \frac{dv}{d\varphi} + v \operatorname{ctg} \varphi - \frac{d^2 w}{d\varphi^2} - v \operatorname{ctg} \varphi \frac{dw}{d\varphi} \right], \\ M_\vartheta &= -\frac{D}{r^2} \left[ v \frac{dv}{d\varphi} + v \operatorname{ctg} \varphi - v \frac{d^2 w}{d\varphi^2} - \operatorname{ctg} \varphi \frac{dw}{d\varphi} \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.3) \quad F = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)};$$

$E$  jest modułem Younga,  $\nu$  współczynnikiem Poissona,  $h$  grubością powłoki.

Podstawiając wyrażenia (2.2) do (2.1) otrzymujemy układ dwu równań różniczkowych zawierających funkcje  $v$  i  $w$ :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} L_{11}(v) + L_{12}(w) &= -\frac{P_\varphi}{F}, \\ L_{21}(v) + L_{22}(w) &= \frac{P_\vartheta}{F}, \end{aligned}$$

gdzie  $L_{ik}$  ( $i, k=1, 2$ ) są następującymi operatorami różniczkowymi:

$$(2.5) \quad L_{11} = \frac{1+c^2}{r^2} \left( \frac{d^2}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{d}{d\varphi} - v - \operatorname{ctg}^2 \varphi \right),$$

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad L_{12} &= -\frac{c_*^2}{r^2} \left[ \frac{d^3}{d\varphi^3} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{d^2}{d\varphi^2} - (v + \operatorname{ctg}^2 \varphi) \frac{d}{d\varphi} \right] + \frac{1+v}{r^2} \frac{d}{d\varphi}, \\
 L_{21} &= -\frac{c_*^2}{r^2} \left[ \frac{d^3}{d\varphi^3} + 2\operatorname{ctg} \varphi \frac{d^2}{d\varphi^2} - (1+v + \operatorname{ctg}^2 \varphi) \frac{d}{d\varphi} + \right. \\
 &\quad \left. + \left( 1-v + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \right) \operatorname{ctg} \varphi \right] + \frac{1+v}{r^2} \left( \frac{d}{d\varphi} + \operatorname{ctg} \varphi \right), \\
 L_{22} &= \frac{c_*^2}{r^2} \left[ \frac{d^4}{d\varphi^4} + 2\operatorname{ctg} \varphi \frac{d^3}{d\varphi^3} + \left( \operatorname{ctg}^2 \varphi - \frac{2}{\sin^2 \varphi} + 1-v \right) \frac{d^2}{d\varphi^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{ctg} \varphi \left( 1-v + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \right) \frac{d}{d\varphi} \right] + \frac{2(1+v)}{r^2},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.6) \quad c_*^2 = \frac{h^2}{12r^2}.$$

## 3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Sprowadźmy układ (2.4) do innej, dogodnej w dalszych rozważaniach, postaci. Podstawiając

$$(3.1) \quad x = \sin \varphi, \quad v = \bar{v} \cos \varphi, \quad w = \bar{w},$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad & -x^2(x^2-1) \frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} - x(4x^2-1) \frac{d\bar{v}}{dx} - [(1+v)x^2+1] \bar{v} + cx^2(x^2-1) \frac{d^3 \bar{w}}{dx^3} + \\
 & + cx(4x^2-1) \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + [(1+v)x^2+c] \frac{d\bar{w}}{dx} = -\frac{r^2 x^2 p_\varphi}{(1+c_*^2) F \sqrt{1-x^2}}, \\
 & -x^3(x^2-1)^2 \frac{d^3 \bar{v}}{dx^3} - 2x^2(x^2-1)(4x^2-1) \frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} - x \left[ \left( 8 + \frac{1+v}{c} \right) x^2(x^2-1) + \right. \\
 & \quad \left. + (2x^2-1)(2x^2+1) \right] \frac{d\bar{v}}{dx} - \left[ \frac{1+v}{c} x^2(2x^2-1) + 1 \right] \times \\
 & \quad \times \bar{v} + x^3(x^2-1)^2 \frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} + 2x^2(x^2-1)(4x^2-1) \frac{d^3 \bar{w}}{dx^3} + \\
 & \quad + x \left[ (9+v)x^2(x^2-1) + (2x^2-1)(2x^2+1) \right] \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + \\
 & \quad + [(1+v)x^2(2x^2-1)+1] \frac{d\bar{w}}{dx} + 2(1+v) \frac{1-c}{c} x^3 \bar{w} = \frac{r^2 x^3 p_\xi}{c_*^2 F},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.3) \quad c = \frac{c_*^2}{1+c_*^2}.$$

Związki fizyczne (2.2) w nowych zmiennych wyrażają się następująco:

$$\begin{aligned}
 N_\phi &= \frac{F}{r} \left\{ (1-x^2) \frac{d\bar{v}}{dx} - \left[ (1+v)x - \frac{v}{x} \right] \bar{v} + (1+v) \bar{w} \right\}, \\
 N_s &= \frac{F}{r} \left\{ v(1-x^2) \frac{d\bar{v}}{dx} - \left[ (1+v)x - \frac{1}{x} \right] \bar{v} + (1+v) \bar{w} \right\}, \\
 (3.4) \quad M_\phi &= -\frac{D}{r^2} \left\{ (1-x^2) \left( \frac{d\bar{v}}{dx} - \frac{d^2\bar{w}}{dx^2} \right) - \left[ (1+v)x - \frac{v}{x} \right] \left( \bar{v} - \frac{d\bar{w}}{dx} \right) \right\}, \\
 M_s &= -\frac{D}{r^2} \left\{ v(1-x^2) \left( \frac{d\bar{v}}{dx} - \frac{d^2\bar{w}}{dx^2} \right) - \left[ (1+v)x - \frac{1}{x} \right] \left( \bar{v} - \frac{d\bar{w}}{dx} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Na wstępie założmy, że  $p_\phi = p_s = 0$ . Poszukujemy rozwiązań układu (3.2) w postaci

$$(3.5) \quad \bar{v}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{2k-2+\eta}, \quad \bar{w}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{2k-1+\eta},$$

gdzie  $\eta$  oznacza parametr wyznaczony w dalszych rozważaniach.

Podstawiając (3.5) do (3.2) i przyrównując współczynniki przy kolejnych potęgach  $x$  do zera, znajdujemy równania rekurencyjne na współczynniki  $a_k, c_k$ :  
dla  $k=1$

$$(3.6) \quad \begin{aligned}
 (\eta^2 - 1) [a_1 - c(\eta + 1)c_1] &= 0, \\
 (\eta^2 - 1)(\eta - 1) [a_1 + (\eta + 1)c_1] &= 0,
 \end{aligned}$$

dla  $k=2$  w przypadku, gdy  $z=1$ ,

$$(3.7) \quad a_1 = 0;$$

dla  $k=2$  ( $z \neq 1$ ) oraz  $k=3, 4, 5, \dots$

$$(3.8) \quad \begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{(1-c)(z+1)} \left[ \frac{F_1}{z-1} a_{k-1} + F_2 c_{k-1} + \frac{1}{(z-1)^2} (F_3 a_{k-2} - F_4 c_{k-2}) \right], \\
 c_k &= \frac{1}{(1-c)(z+1)^2} \left[ F_5 c_{k-1} + \frac{F_6}{z-1} a_{k-1} - \frac{1}{c(z-1)^2} (F_4 c_{k-2} - F_3 a_{k-2}) \right].
 \end{aligned}$$

We wzorach (3.8) przyjęto następujące oznaczenia:

$$(3.9) \quad \begin{aligned}
 F_1 &= (z-2) [(1-2c)z + 2c + 1], \\
 F_2 &= c(z-2)(z-3) - (1+v)(1-c), \\
 F_3 &= (z-2) [c(z-1)(z-4) + 1 + v], \\
 F_4 &= c(z-1)(z-2)(z-3)(z-4) + (1+v) [c(z-2)(z-3) + 2(1-c)], \\
 F_5 &= (z-2) [(2-c)z - 2 - c], \\
 F_6 &= -(z-2)(z-3) - (1+v) \frac{1-c}{c}
 \end{aligned}$$

oraz

$$(3.10) \quad z = 2k - 2 + \eta.$$

Warunek istnienia niezerowych rozwiązań układu (3.2) prowadzi do równania

$$(3.11) \quad (1-c)(\eta^2-1)^2 = \tilde{0},$$

a więc do wartości parametru  $\eta = \pm 1$ . Przyjmijmy  $\eta = -1$ .

Wprowadźmy oznaczenia

dla  $a_1=0, c_1=0, a_2=0, c_2=1$

$$(3.12) \quad \bar{v}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} x^{2k-3}, \quad \bar{w}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} x^{2k-2};$$

dla  $a_1=0, c_1=0, a_2=1, c_2=0$

$$(3.13) \quad \bar{v}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} x^{2k-3}, \quad \bar{w}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)} x^{2k-2};$$

dla  $a_1=0, c_1=1, a_2=0, c_2=0$

$$(3.14) \quad \bar{v}_3(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(3)} x^{2k-3}, \quad \bar{w}_3(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(3)} x^{2k-2},$$

gdzie  $a_k^{(i)}, c_k^{(i)}$  ( $i=1, 2, 3, k>2$ ) znajdujemy na podstawie (3.8). Przyjęcie parametru  $\eta=1$  jest szczególnym przypadkiem rozpatrzonego (całki (3.12) i (3.13) o zmienionej numeracji).

Funkcje (3.14) można zastąpić funkcjami

$$(3.15) \quad \tilde{v}_3(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \tilde{w}_3(x) = -\sqrt{1-x^2},$$

które też są całkami układu (3.2), co łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem.

Całek osobliwych równań (3.2) (rozwiązań drugiego rodzaju) poszukujemy w postaci

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \bar{v}(x) &= \ln x \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{2k-3} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{2k-3}, \\ \bar{w}(x) &= \ln x \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{2k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k x^{2k-2}. \end{aligned}$$

Wyrazy stojące przy logarytmie są uprzednio wyznaczonymi całkami nieosobliwymi o znanych współczynnikach  $a_k$  i  $c_k$ .

Podstawiając (3.16) do (3.2) otrzymujemy następujące wzory rekurencyjne:

$$(3.17) \quad b_k = \frac{1}{1-c} \left\{ \frac{1}{z+1} \left[ \frac{F_1}{z-1} b_{k-1} + F_2 d_{k-1} + \frac{1}{(z-1)^2} (F_3 b_{k-2} - F_4 d_{k-2}) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{z-1} \left[ \frac{G_1}{z+1} a_k + G_2 c_k + \frac{G_3}{z^2-1} a_{k-1} + \frac{G_4}{z+1} c_{k-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{z^2-1} (G_5 a_{k-2} + G_6 c_{k-2}) \right] \right\},$$

$$(3.17) \quad d_k = \frac{1}{1-c} \left\{ \frac{1}{(z+1)^2} \left[ F_5 d_{k-1} + \frac{F_6}{z-1} b_{k-1} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{c(z-1)^2} (F_4 d_{k-2} - F_3 b_{k-2}) \right] + \frac{1}{z^2-1} \left[ a_k + G_7 c_k + \frac{G_8}{z^2-1} a_{k-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{G_9}{z+1} c_{k-1} + \frac{1}{c(z^2-1)} (G_5 a_{k-2} + G_6 c_{k-2}) \right] \right\}, \\ k=3, 4, 5, \dots$$

Funkcje  $F_i$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ) określone są wzorami (3.9), w których

$$(3.18) \quad z=2k-3,$$

natomiast  $G_i$  ( $i=1, 2, \dots, 9$ ) mają postać

$$(3.19) \quad \begin{aligned} G_1 &= (3c-2)z+c, \\ G_2 &= -c(z+1), \\ G_3 &= (z-1)[(2-6c)z+10c-1]-1-\nu, \\ G_4 &= c(z-1)(5z-13)-(1+\nu)(1-2c)+2c, \\ G_5 &= c(z-1)(3z-11)+3c+1+\nu, \\ G_6 &= -c(2z-5)[(z-1)(2z-8)+3+\nu], \\ G_7 &= (3c-4)z-c, \\ G_8 &= -(z-1)(4z-9) + \frac{1+\nu}{c}, \\ G_9 &= (z-1)[(8-3c)z-14+c]+2c+1+\nu. \end{aligned}$$

We wzorach (3.19) należy podstawić

$$(3.20) \quad z=2k-3.$$

Dla  $k=1$  i  $k=2$  otrzymujemy jedno równanie

$$(3.21) \quad (\nu-1)b_1 = 2a_2 - 4cc_2 + (1+\nu-2c)c_1.$$

O biorając współczynniki  $a_2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  według trzech sposobów, jak przy całkach nieosobliwych (wzory (3.12), (3.13) i (3.14)) otrzymujemy

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \bar{v}_j(x) &= \bar{v}_{j-3}(x) \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(j-3)} x^{2k-3}, \\ \bar{w}_j(x) &= \bar{w}_{j-3}(x) \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(j-3)} x^{2k-2}, \quad i=4, 5, 6. \end{aligned}$$

Współczynnik  $b_1$  określamy z równania (3.21). Spośród możliwych sposobów wyboru współczynników  $d_1$ ,  $d_2$  i  $b_2$  tylko jeden daje całkę niezależną od poprzednich, a więc można przyjąć

$$(3.23) \quad d_1 = d_2 = b_2 = 0.$$

Współczynniki  $b_k^{(j-3)}$ ,  $d_k^{(j-3)}$  ( $k > 2$ ) określamy z układu (3.17).

Reasumując, otrzymaliśmy rozwiązanie równań (3.2) dla  $p_\phi = p_\xi = 0$  w postaci

$$(3.24) \quad \bar{v}(x) = \sum_{i=1}^6 D_i \bar{v}_i(x), \quad \bar{w}(x) = \sum_{i=1}^6 D_i \bar{w}_i(x),$$

gdzie stałe  $D_i$  należy wyznaczyć z warunków brzegowych.

#### 4. POWŁOKA OBCIĄŻONA CIĘŻAREM WŁASNYM

Niech powłoka będzie obciążona ciężarem własnym o intensywności  $p$ . Składowe obciążenia  $p_\phi$  i  $p_\xi$  mają postać

$$(4.1) \quad p_\phi = px, \quad p_\xi = -p\sqrt{1-x^2},$$

a więc prawe strony równań (3.2)  $P_1$  i  $P_2$  wyrażają się następująco:

$$(4.2) \quad P_1 = -\frac{r^2 x^3 p}{(1+c_*^2) F \sqrt{1-x^2}}, \quad P_2 = -\frac{r^2 x^3 p \sqrt{1-x^2}}{c_*^2 F}.$$

Rozwijając funkcje  $1/\sqrt{1-x^2}$  i  $\sqrt{1-x^2}$  w szereg Taylora w otoczeniu punktu  $x=0$  otrzymamy ( $x^2 \neq 1$ )

$$(4.3) \quad P_1 = -\frac{r^2 p}{(1+c_*^2) F} \left[ x^3 + \frac{1}{2} x^5 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^7 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2i-5)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2i-4)} x^{2i-1} + \dots \right],$$

$$P_2 = \frac{r^2 p}{c_*^2 F} \left[ x^3 - \frac{1}{2} x^5 - \frac{1}{2 \cdot 4} x^7 - \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2i-7)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2i-4)} x^{2i-1} - \dots \right].$$

Całek szczególnych układu niejednorodnego (3.2) o prawych stronach określonych za pomocą wzorów (4.3) poszukujemy w postaci

$$(4.4) \quad \bar{v}_s(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k^{(s)} x^{2k-1}, \quad \bar{w}_s(x) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(s)} x^{2k}.$$

Podstawiając (4.4) do (3.2) i porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej  $x$  po lewej i po prawej stronie równań, otrzymujemy na współczynniki  $a_k^{(s)}$  i  $c_k^{(s)}$  układ równań analogiczny do (3.8), w którym  $z=2k-1$  i do którego stron należy odpowiednio dodać;

1) dla  $k=2$

$$(4.5) \quad -\frac{r^2 p}{F} \frac{z}{(z-1)(z^2-1)}, \quad -\frac{r^2 p}{F} \frac{1}{(z+1)(z^2-1)} \left[ 1 + \frac{1}{c(z-1)} \right],$$

2) dla  $k \geq 3$

$$(4.6) \quad -\frac{r^2 p}{F} \frac{z}{(z-1)(z^2-1)} \prod_{i=3}^k \frac{2i-5}{2i-4}$$

$$-\frac{r^2 p}{F} \frac{1}{(z+1)(z^2-1)} \left[ 1 + \frac{1}{c(z+1)} \right] \prod_{i=3}^k \frac{2i-7}{2i-4}$$

Otrzymańa w ten sposób całkę szczególną należy dodać do całki ogólnej równania jednorodnego (3.24).

Dla powłoki o jednym brzegu należy przyjąć  $D_4=D_5=D_6=0$ , a pozostałe stałe wyznaczyć z warunków brzegowych dla  $\varphi=\varphi_0$  ( $x=x_0$ ) gdzie  $\varphi_0$  jest kątem rozwarcia powłoki.

W przypadku powłoki o dwóch brzegach opisanych równaniami:

$$\text{dla brzegu dolnego} \quad \varphi=\varphi_0 \quad (x=x_0),$$

$$\text{dla brzegu górnego} \quad \varphi=\varphi_1 \quad (x=x_1)$$

lub powłoki zamkniętej obciążonej siłą skupioną w wierzchołku mamy do dyspozycji sześć warunków brzegowych, które umożliwiają wyznaczenie stałych  $D_i$  ( $i=1, \dots, 6$ ).

Dla symetrycznego ciągłego obciążenia ( $p_\varphi \neq 0$  lub  $p_z \neq 0$  dla  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_0$ ), innego niż ciężar własny powłoki, należy poszukiwać całki szczególnej w analogiczny sposób do wyżej podanego. W przypadku obciążeń nieciągłych powłokę dzielimy na obszary, na granicy których należy spełnić warunki nierozdzielności.

## 5. PRZYKŁAD

Przez parametr  $s_i$  ( $i=1, 2$ ) rozumiemy wielkość powiązaną z równaniami brzegu  $\varphi=\varphi_{i-1}$  następującą zależnością:

$$(5.1) \quad s_i = \frac{1 - \cos \varphi_{i-1}}{\sin \varphi_{i-1}}.$$

Dla powłoki o jednym brzegu parametr ten jest wyniosłością.

Wprowadźmy współrzędną bezwymiarową  $\xi$  zdefiniowaną następująco:

$$(5.2) \quad \xi = \frac{\sin \varphi - \sin \varphi_1}{\sin \varphi_0 - \sin \varphi_1},$$

tzn. dla brzegu górnego  $\xi=0$ , a dla brzegu dolnego  $\xi=1$ .

Opierając się na uzyskanych wzorach napisano program w języku FORTRAN na maszynę cyfrową ODRA 1304.

Przyjmijmy dane liczbowe:

$$E=3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad R_0=10 \text{ m}, \quad h=0,06 \text{ m}, \quad \nu=0,1667,$$

gdzie

$$(5.3) \quad R_0=r \sin \varphi_0.$$

Obliczenia przeprowadzono w następujących przypadkach:

*A. Powłoka obciążona ciężarem własnym.* Przyjmijmy

$$p=3000 \text{ N/m}^2, \quad s_1=0,2 \quad (\varphi_0=0,9285 \text{ rd}), \quad s_2=0,1 \quad (\varphi_1=0,6423 \text{ rd}).$$



Założmy następujące warunki brzegowe:

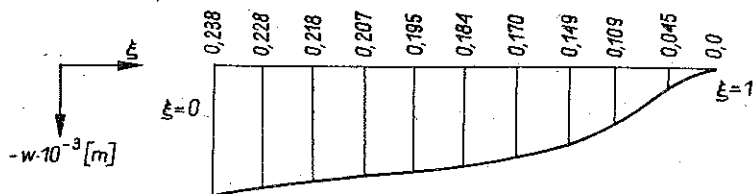
dla brzegu utwierdzonego i dla  $\varphi = \varphi_0$  ( $x = x_0$ )

$$(5.4) \quad v = w = \frac{dw}{d\varphi} = 0,$$

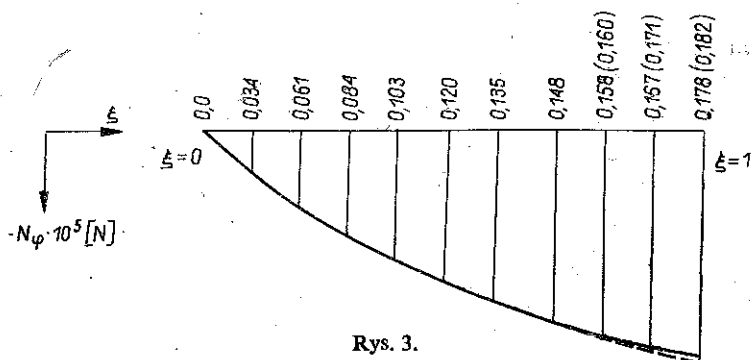
dla brzegu swobodnego i dla  $\varphi = \varphi_1$  ( $x = x_1$ )

$$(5.5) \quad N_\varphi = M_\varphi = Q_\varphi = 0.$$

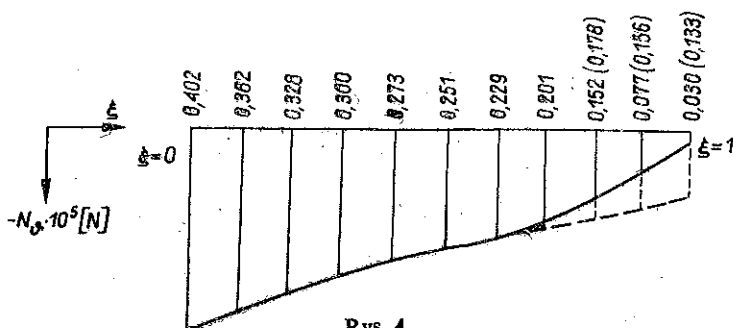
Na rys. 2-6 podano wykresy przemieszczenia normalnego  $w$ , sił  $N_\varphi$ ,  $N_s$  i momentów  $M_\varphi$ ,  $M_s$ . Wartości sił  $N_\varphi$ ,  $N_s$  porównano z odpowiednimi wielkościami obliczonymi według teorii bezmomentowej (linia przerywana, wartości podano w nawiasach). Stwierdzono, że w obszarze «dostatecznie odległym od brzegu utwierdzonego» ( $\xi < 0,7$ ) wartości sił obliczone według obu teorii praktycznie pokrywają się. Przeprowadzony test dla powłoki o jednym brzegu ( $\varphi_1 = 0$ ) wykazał pełną zgodność wyników z podanymi w pracy [4].



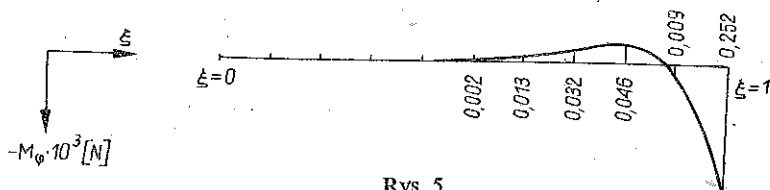
Rys. 2.



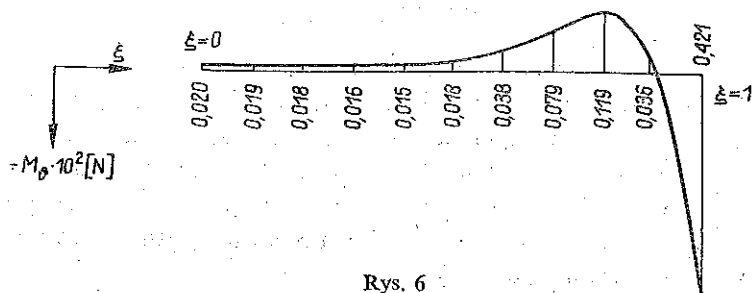
Rys. 3.



Rys. 4.



Rys. 5



Rys. 6

B. Powłoka obciążona na górnym brzegu równomiernie rozłożonymi momentami  $M_\phi$  o intensywności 1

Przyjmijmy

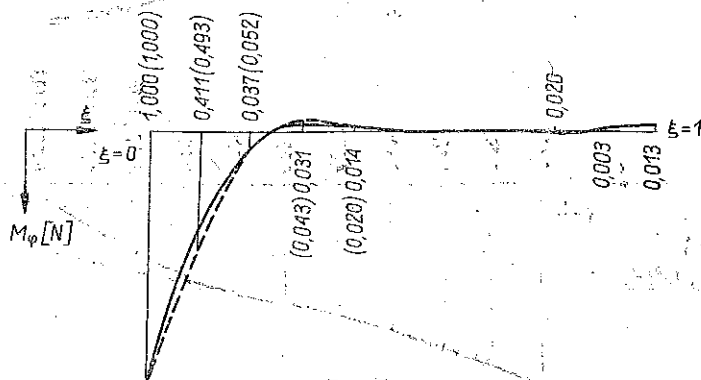
$$s_1=0,2 \quad (\varphi_0=0,9285 \text{ rd}), \quad s_2=0,05 \quad (\varphi_1=0,4511 \text{ rd}).$$

Warunki brzegowe

$$(5.6) \quad N_\phi = Q_\phi = 0, \quad M_\phi = 1 \quad \text{dla} \quad \varphi = \varphi_1 \quad (x = x_1):$$

dla  $\varphi = \varphi_0$  mamy (5.4).

Na rys. 7 podano przykładowo wykresy momentów  $M_\phi$  (linia ciągła), które porównano z wartościami otrzymanymi wg. przybliżonej teorii zaburzeń brzegowych (linią przerywana, wartości w nawiasach). Przeprowadzone testy wykazały, że zbieżność wyników obu teorii jest największa, gdy  $s_1$  nie jest zbyt małe oraz gdy brzegi są dostatecznie odległe, tzn. gdy co najmniej  $s_1=0,35$  i  $s_2=0,05$ . Analogicznie do podanego można rozpatryć przypadek obciążenia równomiernie rozłożonego na górnym brzegu o innym charakterze niż podany.



Rys. 7

W trakcie obliczeń stwierdzono dobrą zbieżność szeregów występujących w rozwiązaniu. Przykładowo, dla  $s_1=0,2$  uwzględniono 55 wyrazów (sumy cząstkowe najwolniej zbieżnych drugich pochodnych przemieszczania normalnego w różniły się mniej niż  $10^{-8}$ ).

Prosty algorytm rozwiązania oraz możliwości dodatkowego uwzględnienia różnych wariantów obciążeń przy niewielkiej modyfikacji, predysponują przedstawioną metodę do szerokich zastosowań. Warto nadmienić, że bez istotnych trudności można ustawić podobny algorytm rozwiązania dla rozważanej powłoki w przypadku obrotowo-symetrycznych obciążeń termicznych i dynamicznych.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE.

1. W. FLUGGE, *Powłoki. Obliczenia statyczne*, Warszawa 1972.
2. В. З. Власов, *Общая теория оболочек*, Москва 1944.
3. I. MENYGARD, *Konstrukcje powłokowe*, Warszawa 1971.
4. R. NAGÓRSKI, *Zginanie powłoki sferycznej obciążonej ciężarem własnym*, Rozpr. Inżyn., 25, 3, 1977.
5. А.А. Кулагин, *Приближенное решение однородных уравнений моментной теории сферических оболочек*, Изв. высш. учебн. заведения, Стро-во и архттект., 3, 1961.
6. Ф. А. Соколов, *Сферическая оболочка под действием осесимметричной нагрузки*, Изв. АН СССР, Отд. мех. и механ. и машиностр., 2, 1962.

#### Резюме

#### НЕКОТОРОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НАГРУЖЕННОЙ ВРАЩАТЕЛЬНО СИММЕТРИЧЕСКИ

В работе дается решение задачи статики тонкой сферической оболочки постоянной толщины, изготовленной из упруго однородного материала и находящейся в вращательно симметричном изгибном состоянии. При помощи действительных степенных рядов получено формально точное решение для сферической оболочки с двумя краями. В отличие от известных решений, опирающихся преимущественно на уравнения Рейсснера задача решена непосредственно в перемещениях.

#### SUMMARY

#### A SOLUTION OF THE PROBLEM OF BENDING OF A SHELL UNDER ROTATIONALLY SYMMETRIC LOAD

The paper presents a solution of the statical problem of a thin spherical shell of constant thickness made of elastic homogeneous material subject to rotationally-symmetric bending loads. The method of real-valued power series yields a formally accurate solution for a spherical shell with two boundaries. In contrast to the known solutions based mainly on the Reissner equations the problem is solved directly in displacements.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 kwietnia 1978 r.