

## PRZYBLIŻONA ANALIZA NIEUSTALONEGO POLA TEMPERATURY W ŻEBRACH PROSTYCH

KAZIMIERZ RUP I JAN TALER (KRAKÓW)

Za pomocą metody uśredniania funkcjonalnych poprawek określono nieustalone pole temperatury w żebrach prostych o stałej grubości — przy skokowej zmianie temperatury i strumienia ciepłego u podstawy żebra.

### OZNACZENIA

$A$  pole przekroju poprzecznego żebra,  
 $a$  współczynnik wyrównania temperatury,  
 $C_1, C_2$  stałe,

$$Fo = \frac{a\tau}{w^2} \text{ liczba Fouriera,}$$

$f(Fo)$  funkcja czasu,

$$N = \left( \frac{\alpha P}{\lambda A} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$N_0$   $Nw$ ,

$P$  obwód żebra,

$q$  strumień ciepły,

$q^*$  bezwymiarowy strumień ciepły,

$$T = \frac{t - t_{\infty}}{t_0 - t_{\infty}} \text{ temperatura bezwymiarowa,}$$

$t_0$  temperatura u podstawy żebra,

$t$  temperatura otoczenia,

$u(Fo)$  bezwymiarowa temperatura wierzchołka żebra,

$$X = \frac{x}{w} \text{ bezwymiarowa współrzędna,}$$

$x$  współrzędna,

$w$  wysokość żebra,

$\alpha$  współczynnik wnikania ciepła,

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{w} \text{ bezwymiarowa głębokość wnikania ciepła,}$$

$\delta$  głębokość wnikania ciepła,

$\lambda$  współczynnik przewodzenia ciepła materiału żeber,

$$\theta = \frac{\lambda(t - t_{\infty})}{qw} \text{ temperatura bezwymiarowa,}$$

$\tau$  czas.

## 1. WSTĘP

Obliczanie żeber w warunkach ustalonych jest przedmiotem szeregu prac. Nie wiele z nich natomiast poświęconych jest analizie pracy żeber w warunkach nieustalonych, gdy temperatura lub strumień u podstawy żebra zmienia się w czasie [1, 2, 3 i 4]. W wymienionych wyżej pracach pole temperatury określono za pomocą metody rozdzielania zmiennych lub przekształcenia Laplace'a względem czasu, uzyskując rozwiązania w postaci szeregów, co utrudnia praktyczne ich zastosowanie.

W niniejszej pracy do określenia rozkładu temperatury w żebrach prostych, przy skokowym wzroście temperatury lub strumienia cieplnego u podstawy żebra, zastosowano metodę uśredniania funkcjonalnych poprawek [5 i 6]. Metoda ta, odznaczająca się prostotą, daje wyniki dostatecznie dokładne, odpowiednie do praktycznych obliczeń.

## 2. ROZKŁAD TEMPERATURY W ŻEBRZE PRZY SKOKOWEJ ZMIANIE TEMPERATURY U JEGO PODSTAWY

Pole temperatury określone jest równaniem bilansu cieplnego

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} - N^2(t - t_\infty) = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau},$$

warunkami brzegowymi

$$(2.2) \quad \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=w} = 0,$$

$$(2.3) \quad t|_{x=0} = t_0$$

oraz warunkiem początkowym

$$(2.4) \quad t|_{\tau=0} = t_\infty.$$

Wprowadzając oznaczenia bezwymiarowe, powyższe zależności przybierają postać

$$(2.5) \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial X^2} - N_c^2 T_2 = \frac{\partial T_2}{\partial Fo},$$

$$(2.6) \quad \frac{\partial T_2}{\partial X} \Big|_{X=1} = 0,$$

$$(2.7) \quad T_2|_{X=0} = 1,$$

$$(2.8) \quad T_2|_{Fo=0} = 0.$$

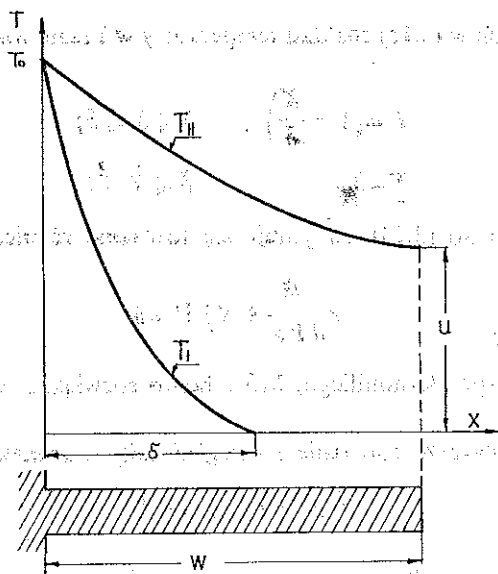
Tak sformułowane zagadnienie rozwiązane zostanie za pomocą metody uśredniania funkcjonalnych poprawek, zgodnie z którą w I fazie wnikania ciepła (rys. 1) równanie (2.5) zastępuje się równaniem

$$(2.9) \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial X^2} = f(Fo),$$

gdzie

$$(2.10) \quad f(\text{Fo}) = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \left( N_c^2 T + \frac{\partial T}{\partial \text{Fo}} \right) dX.$$

W równaniu (2.10)  $\delta$  jest głębokością wnikania ciepła wprowadzoną przez BIOTA [7].



Rys. 1. Schemat wnikania ciepła w zębrze w pierwszej i drugiej fazie

Stosując regułę Leibniza, (2.10) można przekształcić do postaci

$$(2.11) \quad f(\text{Fo}) = \frac{1}{\delta} \left\{ \int_0^{\delta} N_c^2 T dX + \frac{d}{d\text{Fo}} T \int_0^{\delta} dX - T(\delta) \frac{d\delta}{d\text{Fo}} \right\}.$$

Uwzględniając, że głębokość wnikania ciepła spełnia warunki

$$(2.12) \quad T|_{X=\delta} = 0$$

oraz

$$(2.13) \quad \left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_{X=\delta} = 0,$$

można równanie (2.11) uprościć do postaci

$$(2.14) \quad f(\text{Fo}) = \frac{1}{\delta} \left[ \int_0^{\delta} N_c^2 T dX + \frac{d}{d\text{Fo}} \int_0^{\delta} T dX \right].$$

Po dwukrotnym scałkowaniu (2.9) otrzymuje się

$$(2.15) \quad T = \frac{1}{2} f X^2 + C_1 X + C_2.$$

Stałe wyznaczone z warunku brzegowego (2.7) oraz z (2.12) i (2.13) wynoszą

$$C_1 = -\frac{2}{\delta}, \quad C_2 = 1, \quad f = \frac{2}{\delta^2}.$$

Po uwzględnieniu ich w (2.15) rozkład temperatury w I fazie wnikania ciepła określony jest wzorami

$$(2.16) \quad T = \left(1 - \frac{X}{\delta}\right)^2, \quad 0 \leq X \leq \delta;$$

$$T = 0, \quad \delta \leq X \leq 1.$$

Podstawiając (2.16) do (2.14) otrzymuje się równanie różniczkowe dla określenia  $\bar{\delta}$  (Fo):

$$\bar{\delta} \frac{d\bar{\delta}}{dFo} + N_c^2 \bar{\delta}^2 = 6.$$

Jest to równanie typu Bernoulliego, które łatwo rozwiązać wykorzystując podstawienie  $z = \bar{\delta}^2$ .

Rozwiązując powyższe równanie i uwzględniając warunek początkowy

$$\bar{\delta}|_{Fo=0} \sqrt{z}|_{Fo=0} = 0,$$

otrzymuje się

$$(2.17) \quad \bar{\delta} = \left\{ \frac{6}{N_c^2} [1 - \exp(-2N_c^2 Fo)] \right\}^{1/2}, \quad \bar{\delta} \leq 1.$$

Pierwsza faza wnikania ciepła kończy się w chwili, gdy głębokość wnikania ciepła staje się równa wysokości żebra, tj. gdy  $\bar{\delta} = 1$ . Czas, po którym kończy się pierwsza faza, wyznaczony z powyższego warunku wynosi

$$(2.18) \quad Fo_1 = -\frac{\ln\left(1 - \frac{N_c^2}{6}\right)}{2N_c^2}, \quad \frac{N_c^2}{6} < 1.$$

Z analizy (2.18) wynika, że gdy  $N_c^2/6 \rightarrow 1$ , to czas bezwymiarowy  $Fo_1 \rightarrow \infty$ . Oznacza to, że dla  $N_c^2/6 \geq 1$ , głębokość wnikania ciepła  $\bar{\delta}$  jest mniejsza od jedności lub inaczej, temperatura wierzchołka żebra pozostaje równa początkowej wskutek intensywnego odbierania ciepła od żebra.

W żebrach, dla których ważna jest nierówność  $N_c^2/6 \geq 1$ , druga faza wnikania ciepła nie występuje. Przy mniejszych wartościach  $N_c^2$  druga faza wnikania ciepła występuje w czasie  $Fo \geq Fo_1$ . Niżej dla przykładu podano kilka wartości  $Fo_1$  dla różnych  $N_c$ :

$$Fo_1 = 0,08333 \quad \text{dla} \quad N_c = 0,01,$$

$$Fo_1 = 0,08594 \quad \text{dla} \quad N_c = 0,60,$$

$$Fo_1 = 0,09116 \quad \text{dla} \quad N_c = 1,00.$$

W drugiej fazie wnikania ciepła równanie bilansu cieplnego (2.5) przybliża się zgodnie z metodą funkcjonalnych poprawek równaniem

$$(2.19) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = f(\text{Fo}),$$

gdzie

$$(2.20) \quad f(\text{Fo}) = \int_0^1 \left( N_c^2 + \frac{\partial T}{\partial \text{Fo}} \right) dX.$$

Po dwukrotnym całkowaniu (2.19) otrzymuje się (2.15). Stałe występujące w (3.15) wyznaczone z warunków brzegowych (2.6) i (2.7) oraz z warunku

$$(2.21) \quad T|_{X=1} = u$$

wynoszą:  $f = 2(1-u)$ ,  $C_1 = -f$ ,  $C_2 = 1$ . Po podstawieniu ich do (2.15) otrzymuje się wyrażenie określające pole temperatury w żebrze w drugiej fazie wnikania ciepła (rys. 1):

$$(2.22) \quad T = (1-u)(1-X)^2 + u, \quad \text{Fo} \geq \text{Fo}_1.$$

Po podstawieniu  $f = 2(1-u)$  i (2.22) do (2.20) otrzymuje się równanie określające  $u(\text{Fo})$ :

$$(2.23) \quad \frac{du}{d\text{Fo}} + (3 + N_c^2)u = 3 - \frac{1}{2}N_c^2,$$

z którego po scałkowaniu przy warunku początkowym  $u|_{\text{Fo}=\text{Fo}_1} = 0$  wyznacza się temperaturę (bezwymiarową):

$$(2.24) \quad u = \frac{6 - N_c^2}{6 + N_c^2} \{1 - \exp[-(3 + N_c^2)(\text{Fo} - \text{Fo}_1)]\}, \quad \text{Fo} \geq \text{Fo}_1,$$

gdzie  $\text{Fo}_1$  określone jest przez (2.18).

Przebieg zmian temperatury w I i II fazie wnikania ciepła obliczony odpowiednio wg wzorów (2.16) i (2.22) w zależności od liczby Fouriera przedstawiono na rysunku 2.

Przedstawiono również porównanie otrzymanego rozwiązania z rozwiązaniem dokładnym [3], z którego wynika, że wzory przybliżone dobrze aproksymują dokładne.

Znając rozkład temperatury w żebrze w I i II fazie wnikania ciepła łatwo obliczyć strumień ciepły u podstawy żebra wg wzoru

$$(2.25) \quad q^* = \frac{qw}{\lambda t_0} = - \frac{\partial T}{\partial X} \Big|_{X=0},$$

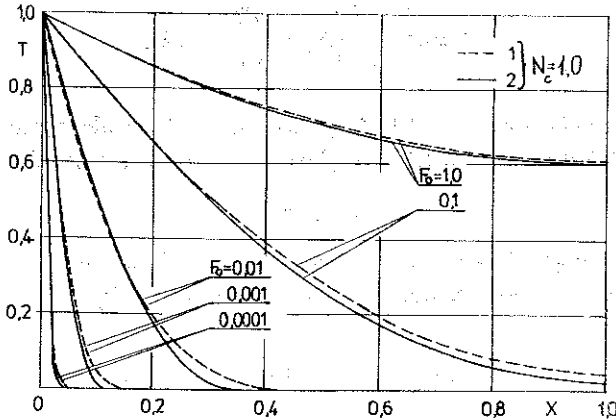
z którego po podstawieniu (2.16) wyznacza się strumień ciepły w I fazie wnikania ciepła:

$$(2.26) \quad q^* = \frac{2}{\delta},$$

gdzie  $\delta$  określone jest przez (2.17) oraz w II fazie wnikania ciepła po podstawieniu (2.22) do (2.25)

$$(2.27) \quad q^* = 2(1-u),$$

gdzie  $u$  określone jest przez (2.24).



Rys. 2. Rozkład temperatury w żebrze prostym w zależności od liczby Fouriera w przypadku skokowej zmiany temperatury u podstawy żebrza, 1 — rozwiązanie dokładne, 2 — rozwiązanie otrzymane w pracy

### 3. ROZKŁAD TEMPERATURY W ŻEBRZE PRZY SKOKOWEJ ZMIANIE STRUMIENIA CIEPLNEGO U JEGO PODSTAWY

W rozważanym przypadku równanie bilansu cieplnego napisane w postaci bezwymiarowej ma postać

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} - N_c^2 \theta = \frac{\partial \theta}{\partial Fo}$$

przy warunkach brzegowych

$$(3.2) \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{X=1} = 0,$$

$$(3.3) \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{X=0} = -1$$

i warunku początkowym

$$(3.4) \quad \theta|_{Fo=0} = 0.$$

Tok obliczeń jest taki sam jak w poprzednim przypadku, dlatego też przytoczone zostaną tylko wyniki końcowe.

W pierwszej fazie wnikania ciepła pole temperatury określone jest wzorem

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2\bar{\delta}} (\bar{\delta} - X)^2, & 0 \leq X \leq \bar{\delta}; \\ \theta &= 0, & \bar{\delta} \leq X \leq 1, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.6) \quad \bar{\delta} = \left\{ \frac{6}{N_c^2} [1 - \exp(-N_c^2 Fo)] \right\}^{1/2}, \quad \bar{\delta} \leq 1.$$

Czas bezwymiarowy  $Fo_1$ , po którym następuje druga faza wnikania ciepła, obliczony z warunku

$$(3.7) \quad \bar{\delta} = 1$$

wynosi

$$(3.8) \quad Fo_1 = -\frac{\ln\left(1 - \frac{N_c^2}{6}\right)}{N_c^2}, \quad \frac{N_c^2}{6} < 1.$$

Jest on dłuższy niż w poprzednim przypadku. Dla porównania przytoczymy dwie wartości  $Fo_1$

$$Fo_1 = 0,18232 \quad \text{dla} \quad N_c = 1;$$

$$Fo_1 = 0,20889 \quad \text{dla} \quad N_c = 1,5.$$

W drugiej fazie wnikania ciepła rozkład temperatury w żebrze określony jest wzorem

$$(3.9) \quad \theta = \frac{1}{2} (1 - X)^2 + u, \quad Fo \geq Fo_1,$$

gdzie

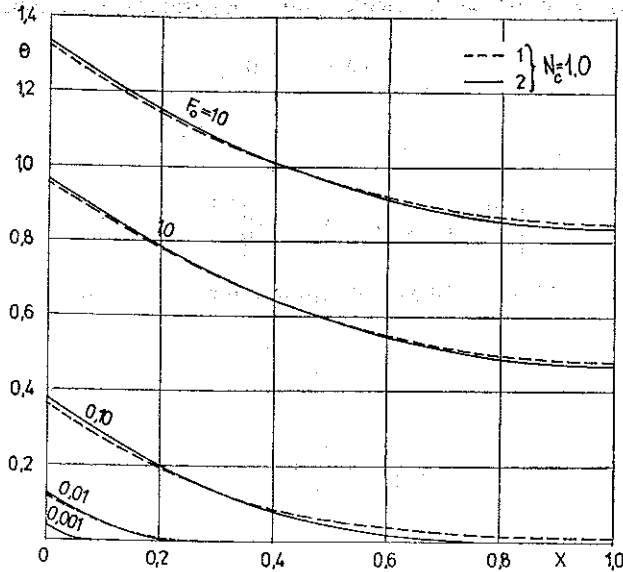
$$(3.10) \quad u = \frac{6 - N_c^2}{6N_c^2} \{1 - \exp[-N_c^2 (Fo - Fo_1)]\}^{1/2}.$$

Na rysunkach 3 i 4 porównano otrzymane wyniki z rozwiązaniami dokładnymi, z których widać, że rozwiązania przybliżone dobrze aproksymują dokładne [3].

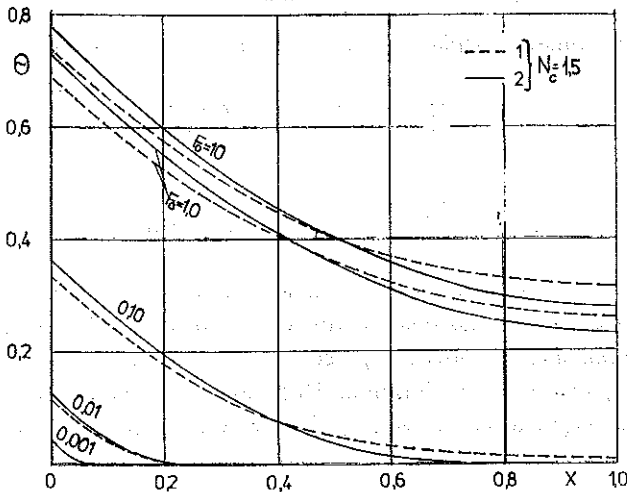
Należy podkreślić, że obydwie przedstawione w niniejszej pracy zagadnienia rozwiązano w pierwszym przybliżeniu. Dokładność otrzymanych wyników można podwyższyć, rozwiązując powyższe zagadnienia w drugim lub trzecim przybliżeniu.

#### 4. WNIOSKI

Metoda uśredniania funkcjonalnych poprawek jest skutecznym narzędziem przy analizie pracy żeber w warunkach nieustalonych. W pracy przedstawiono jej zastosowanie do określenia pola temperatury w żebrach prostych o stałej grubości przy prostych warunkach brzegowych, można ją jednak stosować w przypadku żeber prostych i okrągłych o różnych profilach przy bardziej złożonych warunkach brzegowych. Ważną zaletą metody jest to, że już w pierwszym przybliżeniu zapewnia dobrą dokładność.



Rys. 3. Rozkład temperatury w żebrze prostym w zależności od liczby Fouriera w przypadku skokowej zmiany strumienia ciepłego u podstawy żebra, 1 — rozwiązanie dokładne, 2 — rozwiązanie otrzymane w pracy



Rys. 4. Rozkład temperatury w żebrze prostym w przypadku skokowej zmiany strumienia ciepłego u podstawy żebra w zależności od liczby Fouriera, 1 — rozwiązanie dokładne, 2 — rozwiązanie otrzymane w pracy

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. W. YANG, *Periodic heat transfer in straight fins*, Trans. ASME, J. Heat Trans., C, 94, 3, 1972.
2. A. AZIZ, *Periodic heat transfer in annular fins*, Trans. ASME, J. Heat Trans., C, 97, 2, 1975.
3. N. V. SURYANARYANA, *Transient response of straight fins*, Trans. ASME, J. Heat Trans., C, 97, 3, 1975.



4. N. V. SURYANARAYANA, *Transient response of straight fins*, Trans. ASME, J. Heat Trans., C, **98**, 2, 1976.
5. Ю. С. Постольник, *Нагреб цилиндра излучением*, Прикл. Мех., **6**, 1, 1965.
6. Ю. Д. Соколов, *Метод осреднения функциональных поправок*, Изд. Наукова думка, Киев 1967.
7. М. А. Вют, *Variational principles in heat transfer*, Clarendon Press, Oxford 1970.

## Резюме

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  
ТЕМПЕРАТУРЫ В ПРЯМЫХ РЕБРАХ

В работе методом осреднения функциональных поправок определено нестационарное распределение температуры в прямых прямоугольных ребрах при скачкообразном изменении температуры и теплового потока у основания ребра. Получены приближенные формулы функции распределения температуры и глубины проникновения тепла. Сравнение полученных результатов с точными показывает их практическую пригодность.

## SUMMARY

APPROXIMATE ANALYSIS OF TRANSIENT TEMPERATURE DISTRIBUTION  
IN STRAIGHT FINNS

The transient response of a prismatic fin insulated at its end is analyzed using the method of averaging functional corrections. Solutions are developed for the first and second phases of heat penetration when the base is subject to a step-wise change of the temperature or heat flux.

On comparing the approximate solutions with the available exact solutions the accuracy is found to be good even in the first approximation.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
INSTYTUT APARATURY PRZEMYSŁOWEJ I ENERGETYKI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 lipca 1977 r.*

---