

NIELINIOWA ANALIZA STATYKI CIENKICH POWŁOK OSIOWOSYMETRYCZNYCH METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

WACŁAW BORKOWSKI i MICHAŁ KLEIBER (WARSZAWA)

Przedstawiono program SHELAX 1, który umożliwia liniową i nieliniową analizę cienkich, osiowosymetrycznych powłok w zakresie sprężystym, sprężysto-plastycznym, pełzania przy stałym w czasie obciążeniu oraz sprężysto-lepkoplastycznym. Podano podstawowe związki geometryczne oraz równania konstytutywne opisujące własności sprężysto-plastyczne i reologiczne materiału powłoki. Zamieszczono algorytm programu oraz szereg przykładów ilustrujących jego możliwości.

1. WSTĘP

W pracy przedstawiono program SHELAX 1, który umożliwia liniową i nieliniową analizę cienkich, osiowosymetrycznych powłok w zakresie sprężystym, sprężysto-plastycznym, pełzania przy stałym w czasie obciążeniu oraz sprężysto-lepkoplastycznym.

W programie wykorzystano element skończony o niezerowej krzywiznie Gaussa (podwójnie zakrzywiony) i wysokiego stopnia wielomiany aproksymujące składowe stanu przemieszczenia. Program umożliwia analizę powłok osiowosymetrycznych posiadających wzdłuż tworzącej nieciągłą krzywiznę i skokowo zmienną grubość. Materiał, z którego zbudowana jest powłoka scharakteryzowany jest klasycznymi równaniami przyrostowej teorii sprężysto-plastyczności Prandtla-Reussa z izotropowym, odcinkowo liniowym wzmocnieniem.

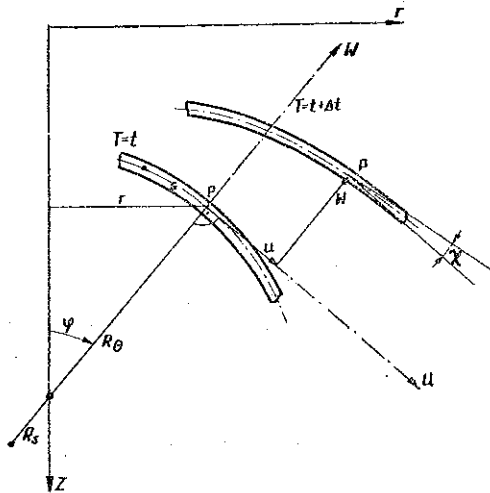
Pełzanie materiału powłoki analizowane jest na podstawie często przyjmowanego równania opisującego ustalony proces przyrastania odkształceń przy stałym obciążeniu [3], własności zaś lepko-plastyczne analizowane są na podstawie równania konstytutywnego zaproponowanego w pracy [11]. Zastosowana w programie koncepcja analizy powłok niesprężystych oparta jest na pracach [1, 2, 3, 4, 12 i 13], przyrostowe sformułowanie równań równowagi otrzymano jako szczególny przypadek teorii przedstawionej w [4, 5 i 6], opis kinematyki powłoki wzorowano częściowo na pracach [7 i 8], zastosowany zaś element skończony jest uogólnieniem elementu zaproponowanego w pracy [9]. Program napisany jest w języku FORTRAN IV i uruchomiony na maszynie cyfrowej R-32, na której też policzono wszystkie zamieszczone w pracy przykłady.

2. PODSTAWY TEORETYCZNE

W przedstawionej nieliniowej analizie powłok osiowo-symetrycznych za podstawę przyjęto klasyczną teorię powłok Love'a-Kirchhoffa. Do opisu kinematyki procesu deformacji zastosowano chwilowy opis Lagrange'a wykorzystując «współobrotowy» lokalny układ współrzędnych kartezjańskich.

2.1. Związki geometryczne

Stan odkształcenia elementu osiowosymetrycznej powłoki (rys. 1) opisany jest w ortogonalnym układzie współrzędnych krzywoliniowych, którego osie pokrywają się z kierunkami głównymi krzywizn powłoki i leżą w jej płaszczyźnie środkowej.



Rys. 1

Dla cienkich powłok poddanych dużym przemieszczeniom i małym odkształceniom przyrost odkształcenia w dowolnym punkcie powłoki wyraża się wzorami [8]

$$(2.1) \quad \epsilon_{2 \times 1} = \mathbf{W}_{2 \times 4} \epsilon_{4 \times 1}^0,$$

gdzie

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \epsilon_{2 \times 1} &= \{\epsilon_s, \epsilon_\theta\}, \\ \epsilon_{4 \times 1}^0 &= \{\epsilon_s^0, \epsilon_\theta^0, \kappa_s^0, \kappa_\theta^0\}, \\ \mathbf{W}_{2 \times 4} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \zeta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

oraz gdzie $\epsilon_s, \epsilon_\theta$ oznaczają odpowiednio południkową i równoleżnikową składową przyrost odkształcenia, $\epsilon_s^0, \epsilon_\theta^0$ południkową i równoleżnikową składową odkształcenia powierzchni środkowej, $\kappa_s^0, \kappa_\theta^0$ południkową i równoleżnikową składową przyrostu zmiany krzywizny powierzchni środkowej, oraz ζ współrzędne mierzone prostopadłe do powierzchni środkowej powłoki.

We wzorze określającym przyrost odkształcenia powierzchni środkowej powłoki wyodrębnić można część liniową i nieliniową:

$$(2.3) \quad \epsilon_{2 \times 1} = \bar{\epsilon}_{2 \times 1} + \bar{\bar{\epsilon}}_{2 \times 1} = \mathbf{W}_{2 \times 4} (\bar{\epsilon}_{4 \times 1}^0 + \bar{\bar{\epsilon}}_{4 \times 1}^0),$$

gdzie liniowa część przyrostu odkształcenia powierzchni środkowej ma postać

$$\bar{\epsilon}_{4 \times 1}^0 = \{\bar{\epsilon}_s^0 \bar{\epsilon}_\theta^0 \bar{\kappa}_s^0 \bar{\kappa}_\theta^0\},$$

a nieliniowa część przyrostu odkształcenia powierzchni środkowej postać

$$\bar{\bar{\epsilon}}_{4 \times 1}^0 = \{\bar{\bar{\epsilon}}_s^0 \bar{\bar{\epsilon}}_\theta^0 \bar{\bar{\kappa}}_s^0 \bar{\bar{\kappa}}_\theta^0\}.$$

Związki między odkształceniami i przemieszczeniami dane są następujące:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \bar{\epsilon}_s^0 &= u_{,s} + \frac{w}{R_s}, & \bar{\epsilon}_\theta^0 &= (u \cos \varphi + w \sin \varphi)/r, \\ \bar{\kappa}_s^0 &= \chi_{,s} + \frac{\bar{\epsilon}_s^0}{R_s}, & \bar{\kappa}_\theta^0 &= \frac{\cos \varphi}{r} \chi + \frac{\bar{\epsilon}_\theta^0}{R_\theta}, \\ \bar{\bar{\epsilon}}_s^0 &= \frac{\chi^2}{2}, & \bar{\bar{\epsilon}}_\theta^0 &= 0, \\ \bar{\bar{\kappa}}_s^0 &= \frac{\chi^2}{2R_s}, \\ \bar{\bar{\kappa}}_\theta^0 &= \frac{\sin \varphi}{2r} \chi^2, & x &= \frac{u}{R_s} - w_{,s}, \end{aligned}$$

gdzie u, w, x oznaczają odpowiednio przemieszczenia uogólnione punktu powierzchni środkowej powłoki (rys. 1), R_s, R_θ promienie krzywizny południkowej i równoleżnikowej w punkcie powierzchni środkowej (rys. 1), r współrzędną radialną (rys. 1).

2.2. Równania konstytutywne

Związek między naprężeniami i odkształceniami w powłoce przedstawić można w ramach teorii plastycznego płynięcia następująco:

$$(2.5) \quad \Delta \sigma = C \epsilon,$$

gdzie przyrost składowych tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa zdefiniowanego na konfiguracji w chwili t (na początku rozpatrywanego kroku), ma postać

$$\Delta \sigma_{2 \times 1} = \{\Delta \sigma_s \Delta \sigma_\theta\},$$

przyrost składowych tensora odkształcenia Greena na konfiguracji w chwili t

$$\epsilon_{2 \times 1} = \{\epsilon_s \epsilon_\theta\},$$

macierz konstytutywna zależna od chwilowego stanu mechanicznego materiału powłoki

$$C_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} C_{ss} & C_{s\theta} \\ C_{s\theta} & C_{\theta\theta} \end{bmatrix},$$

oraz gdzie

$$\begin{aligned}
 C_{ss} &= \frac{E}{\Omega} [\zeta_t + (1 - \zeta_t) s_2^2], \\
 C_{\theta\theta} &= \frac{E}{\Omega} [\zeta_t + (1 - \zeta_t) s_1^2], \\
 C_{s\theta} &= \frac{E}{\Omega} [v\zeta_t - (1 - \zeta_t) s_1 s_2], \\
 \Omega &= (1 - \nu^2) \zeta_t + (1 - \zeta_t) (s_1^2 + 2\nu s_1 s_2 + s_2^2), \\
 s_1 &= \frac{-\sigma_s - \frac{1}{2} \sigma_\theta}{\bar{\sigma}}, \quad s_2 = \frac{-\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_s}{\bar{\sigma}}, \\
 \bar{\sigma} &= (-\sigma_s^2 - \sigma_s \sigma_\theta + \sigma_\theta^2)^{\frac{1}{2}}, \\
 \zeta_t &= E_t/E.
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

W powyższych wzorach $-\sigma_s$, $-\sigma_\theta$ oznacza odpowiednio południkową i równoleżnikową składową tensora naprężenia na początku rozpatrywanego kroku po czasie, ν współczynnik Poissona, E moduł Younga, $\bar{\sigma}$ naprężenie zredukowane według warunku plastyczności Hubera-Misesa oraz E_t chwilowy moduł styczny w zakresie sprężysto-plastycznym.

Związek między przyrostem naprężenia i częścią sprężystą przyrostu odkształcenia napisać można w postaci

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_{2 \times 1} = \mathbf{C}_{2 \times 1}^e \boldsymbol{\epsilon}_{2 \times 1}^e,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\epsilon}_{2 \times 1}^e &= \{ \epsilon_s \ \epsilon_\theta \}, \\
 \mathbf{C}_{2 \times 1}^e &= \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

Przyjmując, że po przekroczeniu granicy plastyczności całkowity przyrost odkształcenia złożony jest addytywnie z części sprężystej i części plastycznej, otrzymuje się

$$\boldsymbol{\epsilon}_{2 \times 1}^e = \boldsymbol{\epsilon}_{2 \times 1} + \boldsymbol{\epsilon}_{2 \times 1}^p.$$

Przyrost odkształcenia plastycznego $\boldsymbol{\epsilon}^p$ ma kierunek dewiatora naprężenia i wyraża się równaniem

$$\boldsymbol{\epsilon}_{2 \times 1}^p = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \bar{\epsilon}^p \boldsymbol{\sigma}_{D 2 \times 1},$$

gdzie $\bar{\epsilon}^p$ oznacza intensywność przyrostu odkształcenia plastycznego, a dewiator naprężenia

$$\boldsymbol{\sigma}_{D 2 \times 1} = \begin{bmatrix} \sigma_s - \frac{\sigma_s + \sigma_\theta}{3} \\ \sigma_\theta - \frac{\sigma_s + \sigma_\theta}{3} \end{bmatrix}.$$

In tensywność przyrostu odkształcenia plastycznego $\bar{\epsilon}^P$ określona z próby jednoosiowego rozciągania może być przedstawiona w postaci (tzw. metoda początkowych odkształceń [6 i 14])

$$(2.11) \quad \bar{\epsilon}^P = \begin{cases} \frac{1}{E_t} (+\bar{\sigma} - -\bar{\sigma}_0) & \text{dla } +\bar{\sigma} - -\bar{\sigma}_0 > 0, \\ 0 & \text{dla } +\bar{\sigma} - -\bar{\sigma}_0 \leq 0, \end{cases}$$

lub w postaci (tzw. metoda początkowego naprężenia [6 i 14])

$$(2.12) \quad \bar{\epsilon}^P = \begin{cases} \frac{1}{E_t + s^t C^e + s} (+\bar{\sigma}^* - -\bar{\sigma}_0) & \text{dla } +\bar{\sigma} - -\bar{\sigma}_0 > 0, \\ 0 & \text{dla } +\bar{\sigma}^* - -\bar{\sigma}_0 \leq 0, \end{cases}$$

gdzie $-\bar{\sigma}_0$ oznacza chwilową granicę plastyczności (na początku kroku), $+\bar{\sigma}$ intensywność naprężenia rzeczywistego (na końcu kroku), $s = 3\sigma_D/2\bar{\sigma}$, $+\bar{\sigma}^*$ intensywność fikcyjnego naprężenia (na końcu kroku) określonego wzorem

$$+\bar{\sigma}^* = -\sigma + C_{2 \times 2}^e \epsilon_{2 \times 1}.$$

Jeżeli obok efektów plastycznych uwzględnić również efekty reologiczne (lepkie)* równanie (2.9) przyjmie postać

$$(2.13) \quad \epsilon_{2 \times 1}^e = \epsilon_{2 \times 1} - \epsilon_{2 \times 1}^P - \epsilon_{2 \times 1}^c,$$

gdzie $\epsilon_{2 \times 1}^c$ oznacza przyrost odkształcenia pełzania.

Podobnie jak w przypadku odkształceń plastycznych założymy, że przyrost odkształcenia pełzania ma kierunek dewiatora naprężenia i określony jest za pomocą wzoru

$$(2.14) \quad \epsilon_{2 \times 1}^c = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \bar{\epsilon}^c \sigma_{D 2 \times 1} = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \bar{\epsilon}^c \Delta t \sigma_{D 2 \times 1},$$

gdzie $\bar{\epsilon}^c$ oznacza intensywność przyrostu odkształcenia pełzania oraz Δt przyrost czasu.

W ogólnym przypadku ϵ^c jest funkcją intensywności naprężenia, czasu, temperatury i intensywności odkształcenia pełzania:

$$(2.15) \quad \bar{\epsilon}^c = f(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}_{\text{całk}}^c, T, t).$$

W przedstawionej pracy przyjęto

$$(2.16) \quad \bar{\epsilon}^c = \bar{A} \bar{\sigma}^m t^n,$$

gdzie \bar{A} , m , n są stałymi zależnymi od rodzaju materiału.

Zachowanie się materiałów sprężysto-lepkoplastycznych można opisać równaniem konstytutywnym zaproponowanym przez P. PERZYŃKĘ [11]. W podejściu tym zakłada się, że

$$(2.17) \quad \epsilon_{2 \times 1}^e = \epsilon_{2 \times 1} - \epsilon_{2 \times 1}^{VP},$$

gdzie $\epsilon_{2 \times 1}^{pp}$ jest odkształceniem reprezentującym efekty plastyczne i lepkie. Prędkość odkształcenia lepkoplastycznego ma postać

$$(2.18) \quad \epsilon_{2 \times 1}^{pp} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{2 \times 1}},$$

gdzie γ oznacza współczynnik lepkości, F funkcję uplastycznienia oraz Φ w ogólnym przypadku nieliniową funkcją argumentu F zależną od dynamicznych własności materiału.

Symbol $\langle \Phi(F) \rangle$ ma następujące znaczenie

$$\langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{dla } F \leq 0, \\ \Phi(F) & \text{dla } F > 0. \end{cases}$$

Przyjmując wykładniczą postać funkcji Φ oraz uwzględniając założenia poczynione w pracy, przyrost odkształcenia lepkoplastycznego wynosi

$$(2.19) \quad \epsilon_{2 \times 1}^{pp} = \gamma \Delta t \left(\frac{\bar{\sigma} - \sigma_0}{\sigma_0} \right)^n \cdot \frac{3\sigma_{D 2 \times 1}}{2\bar{\sigma}},$$

gdzie Δt oznacza przyrost czasu, a n wykładnik dobierany doświadczalnie.

2.3. Przyrostowe przemieszczeniowe równanie równowagi elementu skończonego

Podstawowy związek wyrażający zasadę pracy wirtualnej dla dowolnego przyrostowego zagadnienia z zakresu nieliniowej mechaniki ośrodka ciągłego podano w pracy [6]. Dla chwilowego opisu Lagrange'a równanie to przybiera postać

$$(2.20) \quad \int_V [\Delta \sigma^t \delta \epsilon + -\sigma^t \delta \epsilon] dV = \int_{\partial V} \Delta t^t \delta u d(\partial V) + \int_V \rho A b^t \delta u dV,$$

gdzie V oznacza objętość ciała (elementu) w chwili t , ∂V brzeg ciała (elementu) w chwili t , $\rho A b$ przyrost wektora siły masowej działającej na jednostkę objętości ciała w chwili t , Δt przyrost obciążenia zewnętrznego działającego na jednostkę powierzchni w chwili t .

Pomijając siły masowe w rozpatrywanym przypadku cienkiej osiowosymetrycznej powłoki oraz wykorzystując związki konstytutywne (2.5), (2.7) równanie (2.20) można napisać w postaci

$$(2.21) \quad \int_V [\delta \epsilon^t C \epsilon + \delta \epsilon^t - \sigma] dV = \int_{A'} \delta v^t p dA + \int_C \delta v^t P dC$$

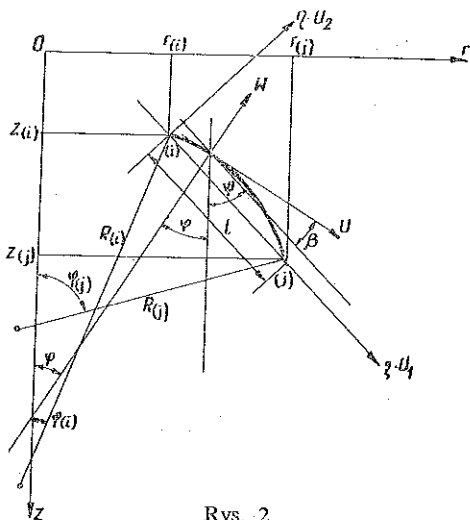
lub

$$(2.22) \quad \int_V [\delta \epsilon^t C^* (\epsilon - \epsilon^*) + \delta \epsilon^t - \sigma] dV = \int_{A'} \delta \epsilon^t p dA + \int_C \delta v^t P dC,$$

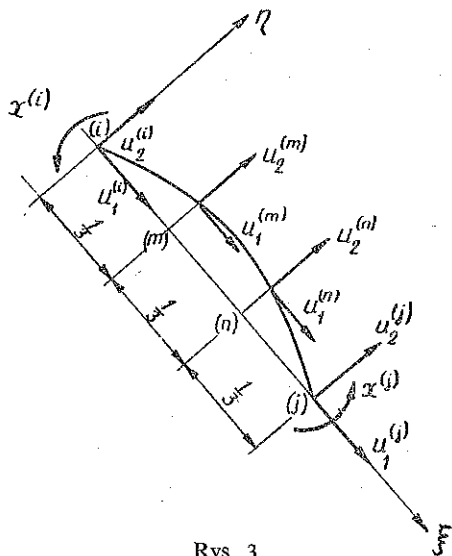
gdzie A' oznacza część powierzchni środkowej, na której dane jest rozłożone w sposób ciągły obciążenie zewnętrzne, $p = \{p_s, p_r, m\}$, C zbiór okręgów, na którym dane jest obciążenie rozłożone liniowo $P = \{N_s, Q_s, M_s\}$, $v = \{u, w, \chi\}$ przemieszczenie zdefiniowane na rys. 1 oraz ϵ^* odkształcenie niesprężyste określone jednym z równań (2.9), (2.13) lub (2.17).

Rozważana powłoka modelowana jest za pomocą pierścieniowych elementów skończonych (rys. 2) o niezerowej krzywiznie Gaussa (podwójnie zakrzywionych) [12]. W lokalnym kartezjańskim układzie współrzędnych (rys. 3) stan przemieszczenia i tworząca aproksymowane są równaniami

$$(2.23) \quad \begin{aligned} u_1(\zeta) &= \alpha_1 + \alpha_2 \zeta + \alpha_3 \zeta^2 + \alpha_4 \zeta^3 + \alpha_5 \zeta^4, \\ u_2(\zeta) &= \alpha_6 + \alpha_7 \zeta + \alpha_8 \zeta^2 + \alpha_9 \zeta^3 + \alpha_{10} \zeta^4, \\ \eta &= \zeta(1 - \zeta)(a_1 + a_2 \zeta + a_3 \zeta^2 + a_4 \zeta^3), \end{aligned}$$



Rys. 2



Rys. 3

gdzie $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$ są współzrędnymi uogólnionymi wyznaczonymi z warunków ciągłości przemieszczeń i kątów obrotów między sąsiadującymi ze sobą elementami oraz gdzie a_1, \dots, a_{10} parametrami dobieranymi z warunku równości kątów nachylenia stycznej i równości krzywizn dla sąsiadujących ze sobą elementów.

Wykorzystując związki (2.3), (2.4), i (2.23) w równaniu pracy wirtualnej i dokonując szeregu przekształceń oraz pomijając wyrazy nieliniowe względem niewiadomego przyrostu przemieszczeń, otrzymuje się przyrostowe równanie równowagi elementu skończonego (wyrażone we współzrędnym globalnym) w postaci

$$(2.24) \quad (\mathbf{K}^{ep} + \mathbf{K}^c) \Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{R},$$

przy wykorzystaniu równania (2.21) lub

$$(2.25) \quad (\mathbf{K}^e + \mathbf{K}^c) \Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{R} + \Delta \mathbf{J},$$

przy wykorzystaniu równania (2.22) i przeniesieniu wyrażenia zawierającego nieznaną wartość odkształcenia niesprężystego na prawą stronę równania, gdzie macierz sztywności sprężysto-plastycznej ma postać

$$\mathbf{K}^{ep} = \mathbf{A}^T \int_0^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r(\zeta) (1 + \eta'^2)^{\frac{1}{2}} d\zeta \mathbf{A},$$

macierz sztywności sprężystej postać

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{A}^T \int_0^1 l \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} r(\zeta) (1 + \eta'^2)^{\frac{1}{2}} d\zeta \mathbf{A},$$

a macierz początkowych naprężeń

$$\mathbf{K}^G = \mathbf{A}^T \int_0^1 l \mathbf{G}^T \mathbf{F} \mathbf{K} \mathbf{G} r(\zeta) (1 + \eta'^2)^{\frac{1}{2}} d\zeta \mathbf{A}.$$

Przyjęto również następujące oznaczenia: $\Delta \mathbf{r}$ — wektor przyrostu przemieszczeń węzłowych, $\Delta \mathbf{R}$ — wektor przyrostu obciążeń węzłowych oraz

$$\mathbf{D} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{W}^T \mathbf{C} \mathbf{W} d\zeta,$$

$$\mathbf{D}^e = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{W}^T \mathbf{C}^e \mathbf{W} d\zeta,$$

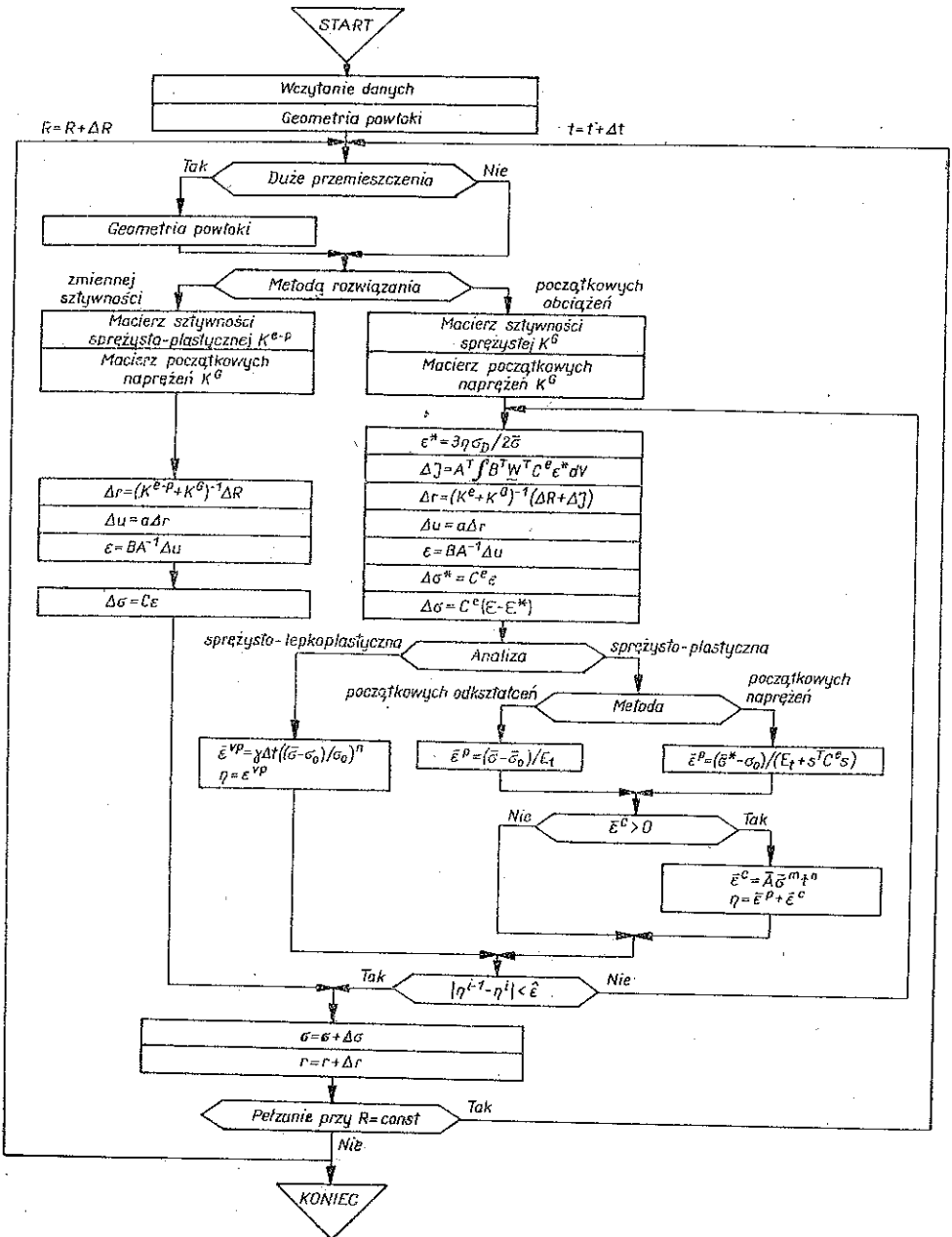
(2.26)

$$\Delta \mathbf{J} = \mathbf{A}^T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} l \mathbf{B}^T \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{W}^T \mathbf{C}^e \boldsymbol{\epsilon}^* d\zeta \right) r(\zeta) (1 + \eta'^2)^{\frac{1}{2}} d\zeta.$$

Jawną postać macierzy \mathbf{B} , \mathbf{G} , \mathbf{A} , \mathbf{F} i \mathbf{K} można znaleźć w pracy [12]. Równanie (2.24) odpowiada rozwiązaniu problemu metodą zmiennej sztywności, natomiast równanie (2.25) — metodą początkowych obciążeń.

3. UWAGI O ZREALIZOWANYM PROGRAMIE

Wykorzystując teorię podaną w p.2 opracowano program SHELAX 1 (rys. 4), który jest rozszerzoną wersją programu SHELAX opisanego w [12]. Program umożliwia analizę dużych odkształceń cienkich powłok osiowosymetrycznych podparty i obciążonych osiowosymetrycznie. Analizowane powłoki mogą posiadać nieciągłą krzywiznę wzdłuż tworzącej oraz skokowo zmienną grubość. Możliwości zastosowania programu obejmują liniową i nieliniową analizę w następujących zakresach: sprężystym, sprężysto-plastycznym, pełzania przy danym, stałym w czasie obciążeniu, sprężysto-lepkoplastycznym w sensie rozwiązania przy narastającym obciążeniu, sprężysto-lepkoplastycznego «pełzania» przy ustalonym obciążeniu. W programie wykorzystano pierścieniowy element skończony (rys. 3) o dziesięciu stopniach swobody i czterech węzłach, z których dwa wewnętrzne umieszczone są w punktach $\xi=1/3$ i $\xi=2/3$. Element ten zapewnia dogodną geometryczną reprezentację dowolnej powłoki osiowo symetrycznej oraz umożliwia przyjęcie funkcji aproksymujących stan przemieszczenia w postaci wielomianów odpowiednio wysokich



Rys. 4

stopni (2.23). Możliwe jest również wykorzystanie elementu kopułowego utworzonego przez odpowiednie wyspecyfikowanie równań (2.23) opisujących stan przemieszczenia. Rozszerza to możliwości programu na analizę powłok zamkniętych (kopuły) [12]. Stopnie swobody odpowiadające węzłom wewnętrznym są eliminowane na poziomie elementu przez zastosowanie procesu statycznej kondensacji. Macierz

szywności struktury otrzymuje się w programie metodą bezpośredniego składania macierzy sztywności poszczególnych elementów, przy czym jako wspólny układ współrzędnych przyjęto globalny układ współrzędnych cylindrycznych $\{r, \varphi, z\}$ (rys. 2).

W algorytmie składania macierzy można wyróżnić trzy zasadnicze kroki [12]:

a) transformacja macierzy sztywności elementów do układu globalnego;

b) statyczną kondensację wewnętrznych stopni swobody polegającą na zastąpieniu równania

$$(3.1) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11,6 \times 6} & \mathbf{K}_{12,6 \times 4} \\ \mathbf{K}_{21,4 \times 6} & \mathbf{K}_{22,4 \times 4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{1,6 \times 1} \\ \mathbf{r}_{2,4 \times 1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_{1,6 \times 1} \\ \mathbf{R}_{2,4 \times 1} \end{Bmatrix},$$

równaniem równoważnym [12]

$$(3.2) \quad [\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}]_{6 \times 6} \mathbf{r}_{1,6 \times 1} = \mathbf{R}_{1,6 \times 1} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{R}_2;$$

c) dodanie macierzy sztywności elementów do siebie.

Określenie macierzy konstytutywnej (2.26)₁ łączącej przyrosty uogólnionych naprężeń z przyrostami uogólnionych odkształceń lub określenie wektora obciążeń początkowych (2.26)₄ wymagało stosowania specjalnych metod całkowania numerycznego po grubości powłoki. Wynika to z nieliniowego rozkładu naprężeń po grubości powłoki w zakresie sprężystoplastycznym (sprężysto-lepkoplastycznym). W programie przyjęto prosty sposób całkowania numerycznego po grubości powłoki mający fizyczną interpretację w postaci analizy powłoki podzielonej na warstwy.

Rozwiązanie równania równowagi struktury otrzymuje się dwiema metodami:

a) metodą zmiennej sztywności oraz b) metodą początkowych obciążeń w wersji początkowych naprężeń i początkowych odkształceń.

Pierwsza z tych metod ma zastosowanie jedynie do analizy sprężystej i sprężysto-plastycznej, natomiast druga obejmuje wszystkie wymienione na wstępie przypadki analizy powłoki.

Sprawdzenie zbieżności procesu iteracyjnego (w metodzie początkowych obciążeń) na danym kroku obciążenia (kroku czasowego) przeprowadza się dla intensywności odkształceń niesprężystych ($\bar{\varepsilon}^p$, $\bar{\varepsilon}^c$, $\bar{\varepsilon}^{pp}$) w każdym punkcie (węzle i warstwie) analizowanej powłoki. Jako początkowe odkształcenie niesprężyste dla każdego danego kroku obciążenia (czasowego) przyjmuje się końcową wartość tego odkształcenia z poprzedniego kroku. Przyrost odkształcenia w kolejnych iteracjach określa się na podstawie krzywej $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ z próby jednoosiowego rozciągania (w przypadku odkształceń plastycznych i lepkoplastycznych) lub na podstawie krzywej pełzania (w przypadku odkształceń pełzania). Krzywa $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ powinna być dana w postaci odcinkowo-liniowej aproksymacji krzywej doświadczalnej, natomiast krzywa pełzania w postaci funkcji $\bar{\varepsilon}^c = f(\bar{\sigma}, t)$.

Przyrost obciążenia na danym kroku analizy przyrostowej oraz długości kroku czasowego w przypadku iteracji po czasie winne być dobrane przez użytkownika i wczytanie do programu jako dane.

Dla zapewnienia zbieżności procesu iteracji długości długość kroku czasowego nie powinna być zbyt duża [15, 16]:

a) W przypadku pełzania
dla pierwszego kroku

$$\Delta t_1 \leq (\eta_0 \bar{\sigma}^{1-n} / mAE)^{\frac{1}{m}},$$

$$\eta_0 = 0,04 - 0,1;$$

dla następnych

$$\Delta t_{i+1} \leq \Delta t_i \eta / (\Delta \bar{\sigma} / \bar{\sigma})_{\max}$$

$$\eta = 0,03 - 0,1,$$

przy czym

$$\eta / (\Delta \bar{\sigma} / \bar{\sigma})_{\max} < 1,2 - 2,0;$$

b) W przypadku analizy sprężysto-lepkoplastycznej

$$\Delta t \leq \frac{4(1+\nu)\sigma_0}{3E\gamma}.$$

Wielkości powyższe mają charakter orientacyjny i w szczególnych przypadkach mogą odbiegać od wielkości zapewniających optymalność procesu obliczeniowego.

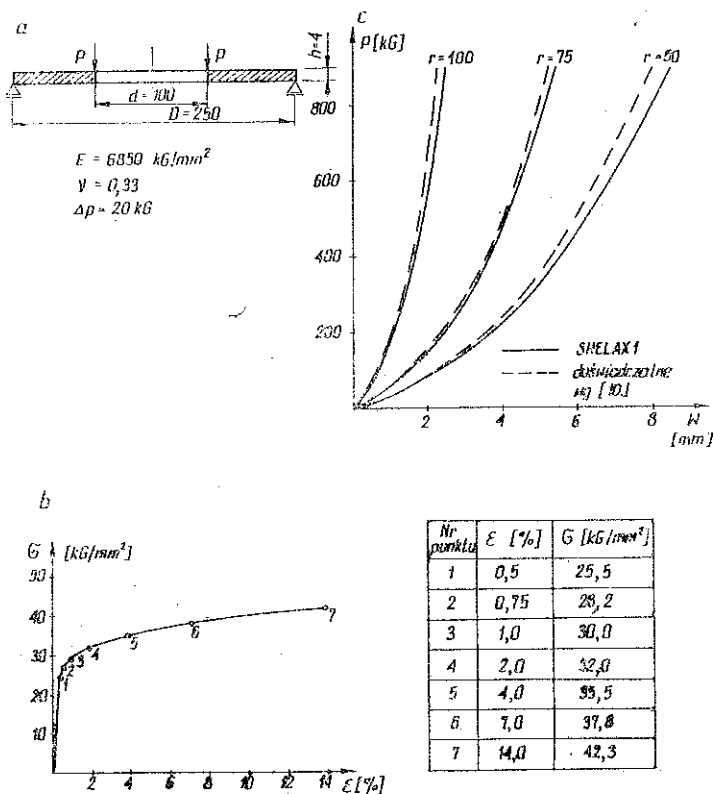
W chwilowej wersji program SHELAX 1 został uruchomiony na EMC R-32 i umożliwia analizę powłok, dla których liczba węzłów nie przekracza 50. Liczba ta stwarza możliwość modelowania bardzo szerokiej klasy powłok osiowosymetrycznych. Przy dysponowaniu maszyną cyfrową o dużej pamięci operacyjnej rozszerzenie programu na jeszcze większe zadania nie przedstawia żadnych trudności.

Poniżej przedstawimy przykładowe obliczenia wykonane za pomocą programu SHELAX 1. Szereg innych przykładów, dotyczących analizy powłok sprężysto-plastycznych metodą zmiennej sztywności omówiono w pracy [12].

4. PRZYKŁADY OBLICZEŃ

4.1. Sprężysto-plastyczna analiza płyty kołowej z otworem

Płytę kołową z otworem (rys. 5a) swobodnie podpartą na obwodzie zewnętrznym i obciążoną siłą rozłożoną w sposób ciągły wzdłuż krawędzi otworu poddano analizie sprężysto-plastycznej przy założeniu dużych przemieszczeń. Płyta wykonana jest z materiału sprężysto-plastycznego z izotropowym wzmocnieniem. Krzywą naprężenie-odkształcenie (rys. 5b) przyjęto według danych doświadczalnych zamieszczonych w pracy [10]. Obliczenia wykonano przy podziale płyty na 8 elementów i 6 warstw, dla przyrostu obciążenia $\Delta P = 20$ kG i odcinkowo liniowej aproksymacji krzywej $\sigma = \sigma(\epsilon)$ (7 odcinków).



Rys. 5

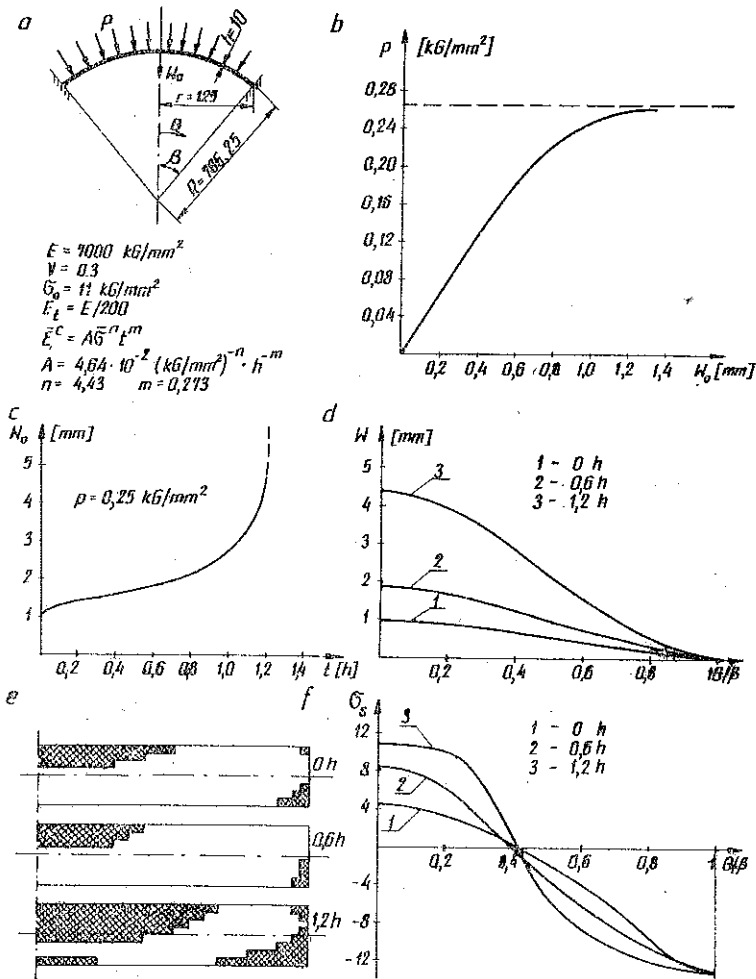
Uzyskane rezultaty w postaci ugięć w trzech punktach płyty pierścieniowej przedstawiono na rys. 5c, na którym naniesiono również odpowiednie krzywe doświadczalne podane w pracy [10]. Porównanie wyników numerycznych i doświadczalnych wykazuje ich dobrą zgodność. Maksymalny błąd wynosi około 7% (dla $r=100$ mm i $P=900$ KG).

4.2. Sprężysto-plastyczna analiza czaszy kulistej utwierdzonej na obwodzie

Czaszę kulistą (rys. 6a) poddano działaniu sił ciśnienia w sposób pokazany na rysunku i przeprowadzono przyrostową analizę sprężysto-plastyczną aż do utraty stateczności, która wystąpiła przy ciśnieniu $p=26,5$ kg/cm^2 (rys. 6b). Następnie, celem zademonstrowania możliwości programu w zakresie analizy materiałów posiadających własności reologiczne, analizowaną powłokę poddano pełzaniu przy stałej wartości ciśnienia $p=25$ kg/cm^2 , mniejszej o $1,5$ kg/cm^2 od wartości granicznej.

Analizę pełzania przeprowadzono przy założeniu prawa reologicznego opisanego za pomocą wzorów (2.14) i (2.16) przy czym stałe A , m i n podane na rys. 6a przyjęto wg [3]. Uzyskane rezultaty obliczeń zilustrowano na rys. 6c–6f. Rys. 6c przedstawia przemieszczenie wierzchołka powłoki w funkcji czasu aż do utraty

stateczności, która następuje po 1, 2 godziny. Na rys. 6d pokazano przemieszczenie powierzchni środkowej powłoki w chwili początkowej analizy pełzania, dla czasu pośredniego (0,6 h) oraz w chwili poprzedzającej wyobczenie. Na rys. 6e i 6f zilustrowano odpowiednio rozwój stref plastycznych i redystrybucję naprężeń σ_s . Dla

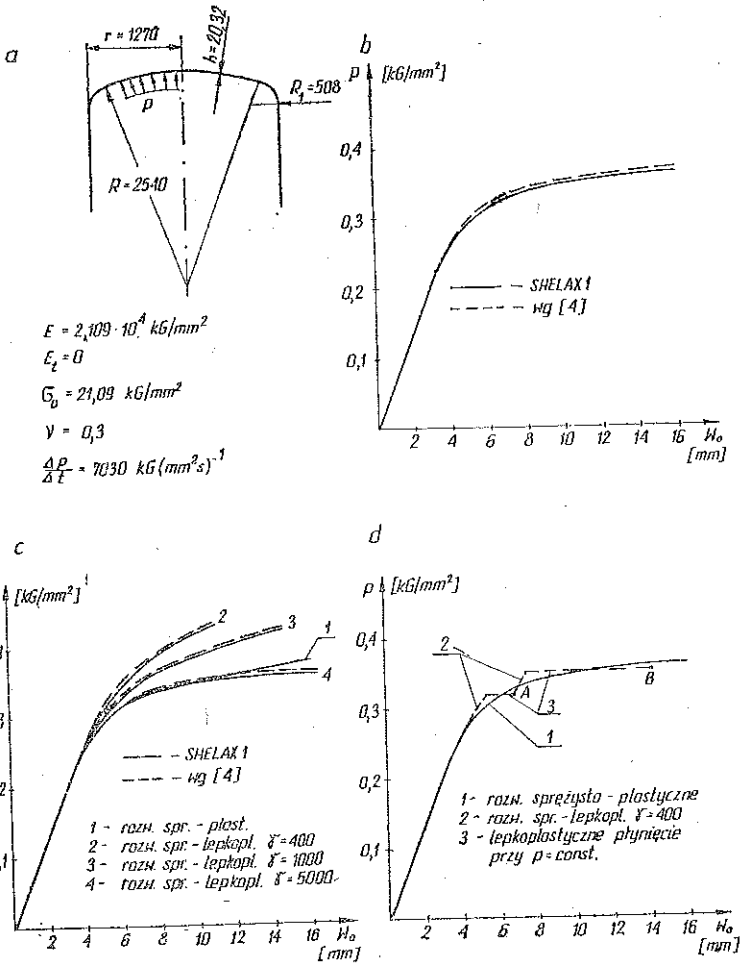


Rys. 6

sprawdzenia poprawności działania programu uzyskane rezultaty porównano z wynikami analizy tej samej czaszy podanymi w pracy [3]. Porównanie to wykazało dobrą zgodność wyników pod względem jakościowym. Różnice ilościowe wynikają z przyjęcia większego obciążenia przy pełzaniu (ze względu na czas obliczeń) oraz stosowania różnych elementów (autorzy pracy [3] stosują znacznie prostszy, bardziej sztywny element o zerowej krzywiznie południkowej).

4.3. Sprężysto-plastyczna i sprężysto-lepkoplastyczna analiza zbiornika osiowo-symetrycznego

Zbiornik osiowo-symetryczny (rys. 7a) obciążony ciśnieniem wewnętrznym podzielono na 20 elementów i poddano analizie sprężysto-plastycznej oraz sprężysto-lepkoplastycznej. Rozwiązanie sprężysto-plastyczne przedstawiono na rys. 7b, natomiast sprężysto-lepkoplastyczne dla różnych współczynników lepkości na rys. 7c.



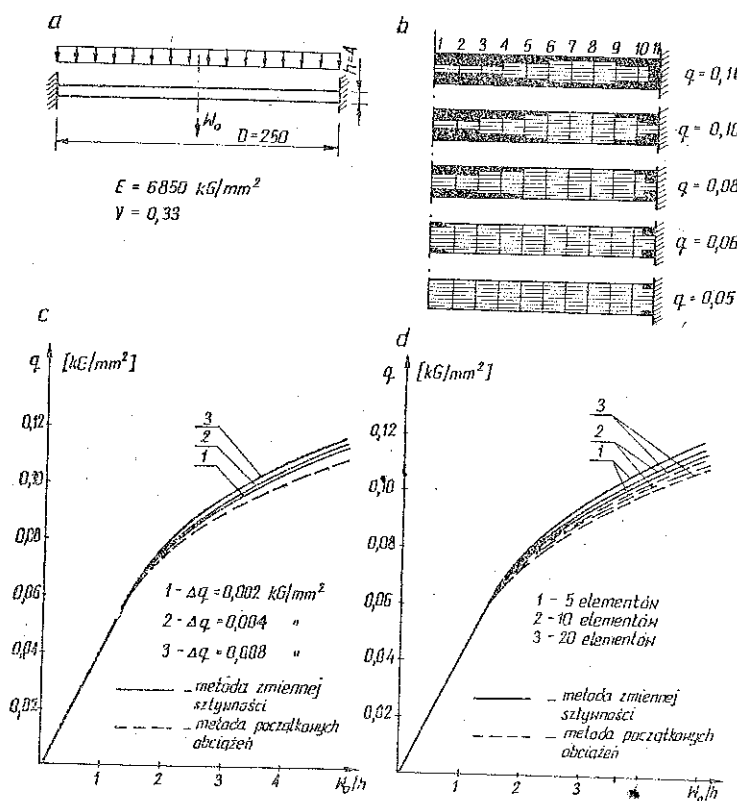
Rys. 7

Krzywe uzyskane dla wzrastających współczynników lepkości wykazują tendencję do asymptotycznego zbliżania się do rozwiązania sprężysto-plastycznego ($\gamma = \infty$). Na rys. 7d zilustrowano możliwości programu w zakresie wykorzystania zjawiska płynięcia lepkoplastycznego do analizy powłok wykonanych z materiałów mających własności lepkie. Przyjmując współczynnik lepkości $\gamma = 400$ l/s powłokę obciążono do wartości ciśnienia $0,32 \text{ kg/mm}^2$ i w procesie płynięcia lepkoplastycznego (przy

stałym p) otrzymano punkt A odpowiadający w przybliżeniu rozwiązaniu sprężysto-plastycznemu. W podobny sposób uzyskano punkt B dla obciążenia $0,35 \text{ kG/mm}^2$. Większa różnica w stosunku do rozwiązania sprężysto-plastycznego wynika z faktu znajdowania się materiału w stanie zaawansowanego płynięcia plastycznego. Uzyskane rozwiązania zarówno sprężysto-plastyczne jak i sprężysto-lepkoplastyczne wykazują dobrą zgodność z wynikami podanymi w [4].

4.4. Sprężysto-plastyczna analiza płyty kołowej utwierdzonej na obwodzie

Schemat płyty przedstawiono na rys. 8a, natomiast jej charakterystykę materiałową na rys. 5b. Analizę wykonano przy założeniu małych przemieszczeń przyjmując różne wielkości przyrostu obciążenia oraz różny podział na elementy. Dla każdego przypadku obliczenia przeprowadzono dwukrotnie: metodą zmiennej



Rys. 8

sztywności i metodą początkowych obciążeń. Wpływ wielkości kroku obciążenia zilustrowano na rys. 8c, natomiast wpływ liczby elementów na rys. 8d. Na rys. 8b pokazano również charakter powstających stref plastycznych.

Uzyskane rezultaty wskazują, że dobór wymienionych wyżej parametrów, a szczególnie liczby elementów może mieć istotny wpływ na otrzymane rozwiązania. Jedynie w przypadku metody początkowych obciążeń, dla trzech przypadków przy-

rostu obciążenia, otrzymano praktycznie te same wyniki. Jednak i w tym przypadku stosowanie dużych przyrostów obciążenia jest niecelowe ze względu na wzrost liczby iteracji na każdym kroku, a tym samym wzrost czasu obliczeń. W rozważanym przykładzie liczba iteracji w jednym kroku obciążenia zmieniała się od 3 do 7 dla $\Delta q=0,002$ do 8–20 dla $\Delta q=0,008$, przy czym różnice te zwiększały się w miarę rozwoju stref plastycznych. Porównując obydwie metody rozwiązania należy również podkreślić, że niezależnie od wyboru parametrów (Δq lub liczby elementów) w przypadku metody zmiennej sztywności konstrukcja jest sztywniejsza («numerycznie») niż w metodzie początkowych obciążeń. Wynika to z faktu nieuwzględnienia na danym kroku w metodzie zmiennej sztywności wpływu uplastycznień pojawiających się w ramach tego kroku.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. KLEIBER, *Ogólna teoria powłok sprężysto-plastycznych*, Materiały Sympozjum "Konstrukcje powłokowe", Kraków 1974.
2. M. KLEIBER, *Discretized formulation of the exact, non-linear theory of elasto-plastic shells*, Materiały Sympozjum "Discrete methods in engineering, Mediolan 1974.
3. G. YAGAWA, N. MIYAZAKI, Y. ANDO, *An analysis of elastic-plastic creep buckling of axis-symmetric shells by the finite element method*, Arch. Mech., 27, 869–882, 1975.
4. S. NAGARAJAN, E. P. POPOV, *Plastic and viscoplastic analysis of axis-symmetric shells*, Int. J. Solids Struc., 11, 1–19, 1975.
5. M. KLEIBER, *Numeryczne aspekty sprężysto-plastycznej analizy ciał i konstrukcji*, Mat. III konferencji „Metody komputerowe w mechanice konstrukcji, Opole 1977.
6. M. KLEIBER, *Finite elements in nonlinear mechanics and large deformation elasto-plasticity*, Mat. III Francusko-Polskiej Konferencji "Nonlinear mechanics", Kraków 1977.
7. P. M. NAGHDI, *Fundation of elastic shell theory*, Solid Mechanics, IV, John Wiley, New York 1963.
8. S. YAGHAMI, *Incremental analysis of large deformation in mechanics of solids with application to axisymmetric shells of revolution*, Univ. of Calif., Berkeley, Calif., SESM Report 68–17, 1968.
9. M. KHOJASTEH-BAKHSH, E. P. POPOV, *Analysis of elasto-plastic shells of revolution*, J. Eng. Mech. Div., 327–340, June 1970.
10. M. DACKO, *Zginanie sprężysto-plastycznej, kolowo-symetrycznej płyty o dużych ugięciach*, Biul. WAT, 19, 9, 1970.
11. P. PERZYNA, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, Quart, Appl. Math., 20, 321–332, 1962.
12. M. KLEIBER, *SHELAX—Analiza dużych deformacji cienkich osiowo-symetrycznych powłok sprężysto-plastycznych metodą elementów skończonych*, Prace IPPT, nr 49, Warszawa 1977.
13. J. H. ARGYRIS, J. ST. DOLTSYNIS, M. KLEIBER, *Incremental formulation in nonlinear mechanics and large strain analysis of elasto-plastic and elasto-viscoplastic problems natural finite element approach*, 232, Stuttgart 1978; także Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., 14, 2, 254–294, May 1978.
14. H. BALMER, J. ST. DOLTSYNIS, M. KÖNIG, *Elastoplastic and creep analysis with the ASCA program system*, Comp. Met. in Appl. Mech. and Eng., 3, 87–104, 1974.
15. W. H. SUTHERLAND, *AXICRP—finite element computer code for creep analysis of plane stress, plane strain and axisymmetric bodies*, Nuclear Engineering and Design, 11, North-Holland Publishing Company, 269–285, Amsterdam 1970.
16. J. DONEA, S. GIULIANI, *Creep analysis of transversely isotropic bodies subjected to time-dependent loading*, Nuclear Engineering and Design 24, North-Holland Publishing Company, 410–419, Amsterdam 1973.

Резюме

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ СТАТИКИ ТОНКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ
ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Представлена программа ШЕЛАКС 1, которая дает возможность провести линейный и нелинейный анализы тонких, осесимметричных оболочек в упругой, упруго-пластической, ползучести, при постоянной во времени нагрузке, и упруго-вязкопластической областях. Приведены основные геометрические соотношения, а также определяющие уравнения описывающие упруго-пластические и реологические свойства материала оболочки. Помещен алгоритм программы и ряд примеров иллюстрирующих ее возможности.

SUMMARY

NONLINEAR ANALYSIS OF STATICS OF THIN AXI-SYMMETRIC SHELLS BY MEANS
OF THE FINITE ELEMENT METHOD

The paper presents the SHELAX 1 program which enables the linear and nonlinear analysis of the axi-symmetric shells in the ranges of elastic and elastic-plastic deformations, creep under time-independent load and elastic-viscoplastic deformations. Fundamental geometrical relations and constitutive equations describing the elastic-plastic and rheological properties of the material are given. Algorithm of the program and several examples illustrating its possibilities are presented.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 lipca 1979 r.