ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 29—2, 2, 22938, 1981
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

PIERSCIENIOWY STEMPEL NA WARSTWIE POPRZECZNIE IZOTROPOWEJ Z DOWOLNYMI WARUNKAMI NA BRZEGU DOLNYM

BOGDAN ROGOWSKI (ŁÓDŹ)

Rozpatrzono zagadnienie sprężystego kontaktu dla warstwy poprzecznie izotropowej, spoczywającej na dwuparametrowym podłożu Winklera, w którą wciskany jest sztywny pierścieniowy stempel o dowolnej podstawie spełniającej warunl i osiowej symetrii. Mieszane zagadnienia brzegowe napisano w postaci potrójnych równań całkowych, które następnie zredukowano do równania całkowego Fredholma pierwszego rodzaju. To ostatnie zostało zastąpione układem czterech równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju względem czterech funkcji wyznaczających poszukiwane rozwiązanie, wygodnym przy iteracyjnej metodzie.

Podano wzory dla normalnych naprężeń kontaktowych i siły działającej na stempel oraz iteracyjne rozwiązanie dla przypadku pierścieniowego stempla o płaskiej podstawie i grubej warstwy.

1. Wstęp

Osiowo-symetryczne zagadnienie kontaktowe stempla i warstwy na dwuparametrowym podłożu Winklera, rozpatrzone w pracy, obejmuje dziewięć przypadków warunków podparcia dolnego brzegu warstwy. Rozwiązania odpowiadające niektórym z nich można znaleźć w literaturze zagadnienia. Zagadnienie warstwy na sztywnym podłożu rozpatrzyli Lebiediew i Ufland [1], Aleksandrow i Worowicz [2] w przypadku izotropii i England [3], Kizyma i Rudnicki [4] dla warstwy poprzecznie izotropowej. Zagadnieniem kontaktowym warstwy izotropowej spoczywającej na izotropowej, sprężystej półprzestrzeni zajmowali się Dhaliwal [5], Dhaliwal i Rau [6] oraz Dhaliwal i Singh [7].

2. Równania podstawowe i ich rozwiązania

W walcowym układzie współrzędnych r, θ, z, w przypadku osiowej symetrii, wektor przemieszczenia U_i ma składowe $(u_r, 0, u_z)$, a tensor naprężenia σ_{ij} jest postaci $(\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta\theta})$ Równania równowagi sprężystego, jednorodnego ciała poprzecznie izotropowego spełniają dwie funkcje $\varphi_\alpha(r, z)$ $(\alpha=1, 2)$ będące rozwiązaniami równań [8]

$$(\partial_r^2 + r^{-1}\,\partial_r + s_\alpha^{-2}\partial_z^2)\,\varphi_\alpha = 0. \tag{2.1}$$

Składowe wektora przemieszczenia i tensora naprężenia wyznacza się za pomocą wzorów

$$
\begin{aligned}
&u_r=\partial_r(k\varphi_1+\varphi_2), \quad u_z=\partial_z(\varphi_1+k\varphi_2),\\
&\sigma_{zz}=G_1(k+1)\,\partial_z^2(s_1^{-2}\varphi_1+s_2^{-2}\varphi_2),\\
(2.2)\qquad &\sigma_{rz}=G_1(k+1)\,\partial_{rz}^2(\varphi_1+\varphi_2),\\
&\begin{pmatrix}\sigma_{rr}\\ \sigma_{\theta\theta}\end{pmatrix}=-G_1(k+1)\,\partial_z^2(\varphi_1+\varphi_2)-2G\begin{pmatrix}r^{-1}\partial_r\\ \partial_r^2\end{pmatrix}(k\varphi_1+\varphi_2),
\end{aligned}
$$

gdzie s_α, $(\alpha=1,2)$ oraz k są charakterystycznymi parametrami ciała poprzecznie izotropowego, zależnymi od następujących technicznych stałych: E, ν — w płaszczyźnie izotropii, E_1, G_1, ν_1 — w płaszczyznach prostopadłych, które wyznacza się za pomocą wzorów

$$
\begin{aligned}
&s_{1,2}=\varepsilon\sqrt{\rho\pm\sqrt{\rho^2-1}}, \quad k=\mu+\sqrt{\mu^2-1},\\
&\varepsilon=\left[\frac{1}{1-\nu^2}H(1-\nu_1^2H)\right]^{1/4}, \quad \rho=(\Gamma-\nu_1H)\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}H(1-\nu_1^2H)\right]^{-1/2},\\
(2.3)\qquad &\mu=\Gamma[\nu_1H+\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{H}{\Gamma}(1-\nu-2\nu_1^2H)]^{-1}-1,\\
&\Gamma=\frac{G}{G_1}, \quad H=\frac{E}{E_1}.
\end{aligned}
$$

Stosując metodę transformacji całkowej Hankela napiszemy rozwiązania równań (2.1) w postaci

$$(2.4)\qquad \varphi_\alpha(r,z)=\frac{s_{\alpha\pm1}}{G_1(k+1)(s_1-s_2)}\mathbf{H}_0\{\xi^{-2}[A_\alpha(\xi)\,sh s_\alpha\xi z+B_\alpha(\xi)\,ch s_\alpha\xi z];r\},$$

gdzie $A_\alpha(\xi)$, $B_\alpha(\xi)$ są nieznanymi funkcji, a H_α jest operatorem

$$(2.5)\qquad \mathbf{H}_\nu[f(\xi,z);r]=\int_0^\infty \xi f(\xi,z)\,J_\nu(\xi r)\,d\xi,$$

wyznaczającym transformację Hankela rzędu ν funkcji $f(\xi,z)$ względem parametru transformacji ξ.

Podstawiając (2.4) do (2.2) otrzymujemy wzory na składowe wektora przemieszczenia i tensora naprężenia:

$$
\begin{aligned}
&u_r(r,z)=-\frac{1}{G_1(k+1)(s_1-s_2)}\mathbf{H}_1\{\xi^{-1}[ks_2(A_1\,\mathrm{sh}\,s_1\xi z+B_1\,\mathrm{ch}\,s_1\xi z)+\\
&\qquad\qquad s_1(A_2\,\mathrm{sh}\,s_2\xi z+B_2\,\mathrm{ch}\,s_2\xi z)];r\},\\
(2.6)\qquad &u_z(r,z)=\frac{s_1s_2}{G_1(k+1)(s_1-s_2)}\mathbf{H}_0\{\xi^{-1}[A_1\,\mathrm{ch}\,s_1\xi z+B_1\,\mathrm{sh}\,s_1\xi z+\\
&\qquad\qquad +k(A_2\,\mathrm{ch}\,s_2\xi z+B_2\,\mathrm{sh}\,s_2\xi z)];r\},
\end{aligned}
$$

$$\sigma_{zz}(r,z)=\frac{1}{s_1-s_2}\mathrm{H}_0\{[s_2(A_1\operatorname{sh}s_1\xi z+B_1\operatorname{ch}s_1\xi z)+s_1(A_2\operatorname{sh}s_2\xi z+$$

(2.6) [cd.]

$$+B_2\operatorname{ch}s_2\xi z)];r\},$$

$$\sigma_{rz}(r,z)=-\frac{s_1 s_2}{s_1-s_2}\mathrm{H}_1\{(A_1\operatorname{ch}s_1\xi z+B_1\operatorname{sh}s_1\xi z+A_2\operatorname{ch}s_2\xi z+$$

$$+B_2\operatorname{sh}s_2\xi z);r\}.$$

3. Sformułowanie zagadnienia i sprowadzenie go do równań całkowych

Rozpatrzmy nieskończoną, poprzecznie izotropową, sprężystą, jednorodną warstwę ograniczoną płaszczyznami $z=0$ i $z=h$, której brzeg $z=h$ spoczywa na dwuparametrowym podłożu Winklera o parametrach κ_1 i κ_2. Brzeg $z=0$ kontaktuje (bez sił tarcia) na pierścieniowym polu $a\leqslant r\leqslant b$ ze stemplem ograniczonym powierzchnią obrotową $f(r)$ ($f(0)=0$) i obciążonym osiowo-symetrycznie; poza tym obszarem jest wolny od naprężeń. Wybierzemy walcowy układ współrzędnych r, θ, z tak, aby oś Oz była prostopadła do płaszczyzny izotropii i skierowana wzdłuż geometrycznej osi stempla, a płaszczyzna $z=0$ pokrywała się z górną płaszczyzną warstwy.

Dla rozwiązania postawionego zagadnienia należy określić poszukiwane funkcje spełniające następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned}
&u_z(r,0)=\delta-f(r), && a\leqslant r\leqslant b;\\
&\sigma_{zz}(r,0)=0, && 0\leqslant r<a,\quad r>b;\\
&\sigma_{rz}(r,0)=0, && r\geqslant 0;\\
&\sigma_{zz}(r,h)=-\kappa_1 u_z(r,h), && r\geqslant 0;\\
&\sigma_{zr}(r,h)=-\kappa_2 u_r(r,h), && r\geqslant 0.
\end{aligned}\tag{3.1}$$

Ze wzorów (2.6) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
u_z(r,0)&=\frac{s_1 s_2}{G_1(k+1)(s_1-s_2)}\mathrm{H}_0[\xi^{-1}(A_1+kA_2);r],\\
\sigma_{zz}(r,0)&=\frac{1}{s_1-s_2}\mathrm{H}_0[(s_2B_1+s_1B_2);r].
\end{aligned}\tag{3.2}$$

Warunki brzegowe $(3.1)_{3,4,5}$ w równaniach (3.1) prowadzą do zależności

$$A_1=-A_2=[1+H(\xi h)]G(\xi),\qquad \frac{s_2}{s_1-s_2}B_1+\frac{s_1}{s_1-s_2}B_2=G(\xi),\tag{3.3}$$

gdzie $G(\xi)$ jest nieznaną funkcją, dla której otrzymuje się z warunków $(3.1)_{1,2}$, po uwzględnieniu (3.2) i (3.3), potrójne równania całkowe

$$\begin{aligned}
&-\frac{s_1 s_2(k-1)}{G_1(k+1)(s_1-s_2)}\mathrm{H}_0[\{1+H(\xi h)\}\xi^{-1}G(\xi);r]=\delta-f(r),\qquad a=r\leqslant b,\\
&\mathrm{H}_0[G(\xi);r]=0,\qquad 0\leqslant r<a,\qquad r>b.
\end{aligned}\tag{3.4}$$

Występująca w (3.4) funkcja $H(\xi h)$ jest zdefiniowana wzorem

$$H(\xi h)=\frac{\sum_{i=0}^{3} c_i L_i(\xi h)}{\sum_{i=0}^{3} c_i M_i(\xi h)}-1, \tag{3.5}$$

gdzie $L_i(x)$, $M_i(x)$ $(x=\xi h)$ są postaci

$$\begin{aligned}
M_0(x)&=\operatorname{ch}(s_1+s_2)x-(s_1-s_2)^{-2}\,[(s_1+s_2)^2\operatorname{ch}(s_1-s_2)x-4s_1s_2],\\
M_1(x)&=x^{-1}\,[\operatorname{sh}(s_1+s_2)x+(s_1+s_2)(s_1-s_2)^{-1}\operatorname{sh}(s_1-s_2)x],\\
M_2(x)&=x^{-1}\,[\operatorname{sh}(s_1+s_2)x-(s_1+s_2)(s_1-s_2)^{-1}\operatorname{sh}(s_1-s_2)x],\\
M_3(x)&=x^{-2}(s_1-s_2)^{-1}\{(k^2s_2-s_1)\operatorname{ch}(s_1+s_2)x+(s_1-s_2)^{-1}[(k^2s_2+\\
&\qquad+s_1(s_1+s_2)\operatorname{ch}(s_1-s_2)x-4ks_1s_2]\},\\
L_0(x)&=\operatorname{sh}(s_1+s_2)x+(s_1+s_2)(s_1-s_2)^{-1}\operatorname{sh}(s_1-s_2)x;\\
L_1(x)&=x^{-1}\,[\operatorname{ch}(s_1+s_2)x-\operatorname{ch}(s_1-s_2)x],\\
L_2(x)&=x^{-1}\,[\operatorname{ch}(s_1+s_2)x+\operatorname{ch}(s_1-s_2)x],\\
L_3(x)&=x^{-2}(s_1-s_2)^{-1}\,[(k^2s_2-s_1)\operatorname{sh}(s_1+s_2)x-(k^2s_2+s_1)\operatorname{sh}(s_1-s_2)x].
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Współczynniki C_i zależą zaś od parametrów podłoża i stałych sprężystości warstwy:

$$c_0=1,\qquad \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{pmatrix}\frac{h(k-1)\{s_1s_2,1\}}{G_1(k+1)(s_1-s_2)},\qquad c_3=\frac{\varkappa_1\varkappa_2h^2}{G_1^2(k+1)^2}. \tag{3.7}$$

Jeżeli w (3.5) ograniczymy się do jednego składnika w sumach, to otrzymamy funkcje $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$ odpowiadające szczególnym przypadkom podparcia brzegu dolnego warstwy odpowiednio

$$\begin{aligned}
&i=0, && \sigma_{zr}=\sigma_{zz}=0 && (\varkappa_1=\varkappa_2=0)\\
&i=1, && u_z=\sigma_{zr}=0 && (\varkappa_1=\infty,\quad \varkappa_2=0)\\
&i=2, && u_r=\sigma_{zz}=0 && (\varkappa_1=0,\quad \varkappa_2=\infty)\\
&i=3, && u_r=u_z=0 && (\varkappa_1=\infty,\quad \varkappa_2=\infty).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Pozostałe pięć przypadków warunków podparcia dolnego brzegu warstwy są opisane odpowiednimi kombinacjami funkcji zgodnie z (3.5).

Dla przypadku warstwy izotropowej, dla której $s_1\to s_2\to 1$, $k\to 1$, otrzymuje się, wykonując przejście graniczne

$$\begin{aligned}
M_0(x)&=\operatorname{ch}2x-2x^2-1,\\
M_1(x)&=x^{-1}(\operatorname{sh}2x+2x),\\
M_2(x)&=x^{-1}(\operatorname{sh}2x-2x),\\
M_3(x)&=x^{-2}\left[(3-4\nu)\operatorname{ch}2x+2x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(3-4\nu)^2\right],
\end{aligned} \tag{3.9}$$

(3.9) [cd.]
$$L_0(x)=\mathrm{sh}\,2x+2x,$$
$$L_1(x)=x^{-1}(\mathrm{ch}\,2x-1)$$
$$L_2(x)=x^{-1}(\mathrm{ch}\,2x+1),$$
$$L_3(x)=x^{-2}[(3-4\nu)\,\mathrm{sh}\,2x-2x].$$
$$c_0=1,\quad c_1=\frac{\kappa_1 h(1-\nu)}{G},\quad c_2=\frac{\kappa_2 h(1-\nu)}{G},\quad c_3=\frac{\kappa_1\kappa_2 h^2}{4G^2}.$$

Dla szczególnych przypadków warunków podparcia brzegu dolnego warstwy izotropowej, postaci (3.8), otrzymujemy funkcje [1]

(3.10)
$$H_0(x)=\frac{\mathrm{sh}\,2x+2x}{\mathrm{ch}\,2x-2x^2+1}-1,$$
$$H_1(x)=\frac{\mathrm{ch}\,2x-1}{\mathrm{sh}\,2x+2x}-1,$$
$$H_2(x)=\frac{\mathrm{ch}\,2x+1}{\mathrm{sh}\,2x-2x}-1,$$
$$H_3(x)=\frac{2(3-4\nu)\,\mathrm{sh}\,2x-4x}{2(3-4\nu)\,\mathrm{ch}\,2x+4x^2+1+(3-4\nu)^2}-1.$$

Wszystkie funkcje odpowiadające przypadkom szczególnym jak i funkcja $H(x)$, dana wzorem (3.5) dążą do zera, gdy x dąży do nieskończoności. Dla przypadku sprężystej półprzestrzeni ($h\to\infty$) funkcja $H(x)$ znika. Z drugiego wzoru w (3.4) wynika, że funkcja $G(\xi)$ jest transformatą Hankela naprężeń $\sigma_{zz}(r, 0)$.

Wprowadzimy funkcję $g(r)$ określającą te naprężenia w przedziale $a<r<b$ taką, że

$$\mathrm{H}_0[G(\xi); r]=-\frac{G_1(k+1)(s_1-s_2)}{s_1 s_2(k-1)}r^{-1}g(r),\qquad a<r<b. \tag{3.11}$$

Z drugiego równania (3.4) i z (2.5) otrzymuje się

$$G(\xi)=-\frac{G_1(k+1)(s_1-s_2)}{s_1 s_2(k-1)}\int_a^b g(u)J_0(u\xi)\,du. \tag{3.12}$$

Uwzględniając $G(\xi)$ z (3.12) w pierwszym równaniu (3.4) można stwierdzić, że $g(u)$ spełnia następujące równanie całkowe Fredholma pierwszego rodzaju:

$$\int_a^b g(u)K(u, r)\,du=\delta-f(r),\qquad a<r<b, \tag{3.13}$$

w którym jądro $K(u, r)$ ma postać

$$K(u, r)=\int_0^\infty [1+H(\xi h)]J_0(u\xi)J_0(r\xi)\,d\xi. \tag{3.14}$$

Funkcja $g(u)$ (rozwiązanie równania (3.13)) określa naprężenia kontaktowe za pomocą wzoru wynikającego z (3.11)

$$\sigma_{zz}(r, 0)=-C_1 r^{-1}g(r),\qquad a<r<b. \tag{3.15}$$

W przypadku stempla o gładkim profilu podstawy, równania

$$g(a)=0, \quad g(b)=0 \tag{3.16}$$

określają obszar kontaktu $a<r<b$. Dla stempla o płaskiej podstawie a i b są promieniami pierścieniowego stempla.

Z warunku równowagi stempla otrzymuje się związek między siłą P a osiadaniem δ:

$$P=2\pi C_1 \int_a^b g(u)\,du. \tag{3.17}$$

Występujący we wzorach (3.15) i (3.17) parametr C_1 zależy od właściwości sprężystych materiału warstwy. Określa go wzór

$$C_1=G_1\frac{k+1}{k-1}\,\frac{s_1-s_2}{s_1 s_2}\xrightarrow{\text{izotrop}} C=\frac{G}{1-\nu}. \tag{3.18}$$

Dla materiałów kompozytowych wykazujących silną poprzeczną anizotropię ($\Gamma=G/G_1\gg 1$, $H=E/E_1\gg 1$), a więc podatnych na deformację poprzecznego ścinania i poprzeczne normalne odkształcenia, zachodzi relacja $C_1 \ll C$. Na przykład dla materiału o współczynnikach Poissona $\nu=0{,}20$ i $\nu_1=0{,}10$ dla różnych stosunków modułów mamy

E/E_1	G/G_1	C/C_1
2	2	2,0379
2	20	5,1223
5	10	6,0067
10	5	6,8242
20	20	14,2464

Stała C_1 charakteryzuje wpływ poprzecznej anizotropii materiału na osiadanie, obszar kontaktu i rozkład naprężeń kontaktowych w przypadku półprzestrzeni ($h\to\infty$, $H(\xi h)\to 0$). W przypadku warstwy efekt anizotropii materiału uwzględnia także funkcja $H(\xi h)$ dana wzorami (3.5)–(3.7). Rozwiązanie zagadnienia kontaktowego dla warstwy z materiału kompozytowego, z uwzględnieniem jego poprzecznej anizotropii, daje wyniki różniące się ilościowo od rozwiązania otrzymanego dla ciała izotropowego. Ze wzrostem poprzecznej anizotropii zwiększa się obszar kontaktu oraz osiadanie stempla w warstwę, a naprężenia kontaktowe charakteryzują się łagodniejszym przebiegiem.

4. Sprowadzenie równania całkowego zagadnienia do układu równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju

Z pomocą metody przedstawionej w pracy [9] i stosowanej do równań całkowych Fredholma I-go rodzaju w [7] można sprowadzić równanie całkowe (3.13) do układu czterech równań całkowych Fredholma II–go rodzaju, wygodnego przy iteracyjnej metodzie konstruowania rozwiązań.

Otrzymuje się dla czterech nieznanych funkcji $S_1(r)$, $S_2(r)$, $T_1(r)$, $T_2(r)$ następujący układ równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju:

$$S_1(r)+\int_0^b L_1(r,\nu)\,S_1(\nu)\,d\nu-\int_b^\infty L_1(r,\nu)\,T_1(\nu)\,d\nu=F_1(r),\qquad 0<r<b,$$

$$S_2(r)+\int_a^\infty L_2(r,\nu)\,S_2(\nu)\,d\nu-\int_0^a L_2(r,\nu)\,T_2(\nu)\,d\nu=F_2(r),\qquad a<r<\infty,$$

(4.1)

$$T_1(r)=\frac{2}{\pi}\int_r^\infty\frac{dt}{\sqrt{t^2-r^2}}\,\frac{d}{dt}\int_a^t\frac{uS_2(u)}{\sqrt{t^2-u^2}}\,du-\frac{2}{\pi}\int_0^a\frac{uT_2(u)}{\sqrt{r^2-u^2}}\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\,0,\,\frac{3}{2},\,\frac{u^2}{r^2}\right)du,\qquad b<r<\infty,$$

$$T_2(r)=-\frac{2}{\pi}\int_0^r\frac{dt}{\sqrt{r^2-t^2}}\,\frac{d}{dt}\int_t^b\frac{uS_1(u)}{\sqrt{u^2-t^2}}\,du+\frac{2}{\pi}\,r\int_b^\infty\frac{T_1(u)}{\sqrt{u^2-r^2}}\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\,0,\,\frac{3}{2},\,\frac{1^2}{u^2}\right)du,\qquad 0<r<a,$$

gdzie

$$F_1(r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{d}{dr}\int_0^r\frac{uf_1(u)}{\sqrt{r^2-u^2}}\,du,$$

$$F_2(r)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{d}{dr}\int_r^\infty\frac{uf_2(u)}{\sqrt{u^2-r^2}}\,du,$$

(4.2)

$$L_{1,2}(r,\nu)=(r\nu)^{1/2}\int_0^\infty pH(ph)\,J_{\mp\frac{1}{2}}(rp)J_{\mp\frac{1}{2}}(\nu p)\,dp,$$

$$f_1(r)=\sum_{n=0}^\infty a_n\left(\frac{r}{b}\right)^n,\qquad 0\leqslant r<b,$$

$$f_2(r)=\sum_{n=1}^\infty a_{-n}\left(\frac{a}{r}\right)^n,\qquad a<r<b,$$

$$\delta-f(r)=\sum_{n=0}^\infty\left[a_n\left(\frac{r}{b}\right)^n+\sum_{n=1}^\infty a_{-n}\left(\frac{a}{r}\right)^n\right],\qquad a<r<b$$

i gdzie ${}_2F_1(\ldots)$ jest funkcją hypergeometryczną.

Poszukiwana funkcja $g(r)$ zdefiniowana jest następująco:

$$g_1(r)+g_2(r)=\begin{cases}0, & 0\leqslant r<a;\\ g(r), & a\leqslant r\leqslant b;\\ 0, & b<r<\infty,\end{cases}\tag{4.3}$$

gdzie

$$g_1(r)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{d}{dr}\left[\int_t^b\frac{uS_1(u)}{\sqrt{u^2-r^2}}\,du-\int_b^\infty\frac{uT_1(u)}{\sqrt{u^2-r^2}}\,du\right],\qquad r<b\tag{4.4}$$

(4.4) [cd.]
$$g_2(r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dr}\left[\int_a^r \frac{uS_2(u)}{\sqrt{r^2-u^2}}du-\int_0^a \frac{uT_2(u)}{\sqrt{r_y-u^2}}du\right],\qquad r>a.$$

Dla naprężeń kontaktowych i siły działającej na stempel otrzymuje się uwzględniając w (3.15), (3.17) wzory (4.3) i (4.4)

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}(r,0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}C_1\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Bigg[\int_r^b \frac{uS_1(u)}{\sqrt{u^2-r^2}}du-\int_b^\infty \frac{uT_1(u)}{\sqrt{u^2-r^2}}du-\\ -\int_a^r \frac{uS_2(u)}{\sqrt{r^2-u^2}}du+\int_0^a \frac{uT_2(u)}{\sqrt{r^2-u^2}}du\Bigg],\qquad a<r<b,\end{aligned}\tag{4.5}$$

$$P=2\sqrt{2\pi}\,C_1\left[\int_0^b S_1(u)\,du-\int_b^\infty T_1(u)\,du\right].$$

5. Przypadek płaskiego pierścieniowego stempla

W zagadnieniu kontaktowym płaskiego, pierścieniowego stempla osiadającego w warstwę na głębokość δ mamy $f(r)=0$. Z (4.2) otrzymuje się

$$F_1(r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\delta,\qquad F_2(r)=0.\tag{5.1}$$

Iteracyjne rozwiązanie układu równań (4.1) dla przypadku grubej warstwy przy założeniach

$$\frac{a}{b}=\lambda\ll 1,\qquad \frac{b}{h}=\varepsilon\ll 1,\qquad \varepsilon=0(\lambda),\qquad \frac{a}{h}=\lambda\varepsilon=0(\lambda^2)\tag{5.2}$$

ma postać

$$\begin{aligned}T_1(b\rho)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{4\lambda^3\delta}{3\pi^2\rho^2}\left(1-\frac{2\epsilon}{\pi}I_0\right)+0(\epsilon^5),\quad 1<\rho<\infty,\\ S_1(b\rho)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta\Bigg[1-\frac{2\epsilon}{\pi}I_0+\frac{4\epsilon^2}{\pi^2}I_0^2+\varepsilon^3\left(\frac{\rho^2}{\pi}I_2+\frac{1}{3\pi}I_2-\frac{8}{\pi^3}I_0^3\right)+\\ &\quad+2\epsilon^4\left(\frac{8}{\pi^4}I_0^4-\frac{1}{\pi^2}I_0I_2-\frac{\rho^2}{\pi^2}I_0I_2\right)\left(\frac{8\lambda^3\epsilon}{3\pi^3}I_0\right)\Bigg]+0(\epsilon^5),\quad 0<\rho<1,\\ T_2(a\rho)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2\delta}{\pi}\left[\lambda\rho\left(1-\frac{2\epsilon}{\pi}I_0+\frac{4\epsilon^2}{\pi^2}I_0^2\right)+\frac{\lambda^3\rho^3}{3}I_2\right]+0(\lambda^4),\quad 0<\rho<1,\\ S_2(a\rho)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{4\lambda^4\epsilon^3\delta}{3\pi^2}I_2[\rho+0(\epsilon)],\quad 1<\rho<\infty.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Występujące w (5.3) I_n $(n=0, 1, 2, 3, \ldots)$ są całkami postaci

$$I_n=\frac{1}{(2n)!}\int_0^\infty p^{2n}H(p)\,dp,\tag{5.4}$$

w których funkcja $H(p)$ określona wzorami (3.5)–(3.7) zależy od warunków na dolnym brzegu warstwy, a także od właściwości sprężystych materiału.

Uwzględniając (5.3) w (4.5) i wykonując całkowanie, otrzymuje się wzory na naprężenia kontaktowe i siłę:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{zz}(r,0) = {} & \frac{4\delta}{\pi^2 b} C_1 \left\{ \left(1 - \frac{2\varepsilon}{\pi} I_0 + \frac{4\varepsilon^2}{\pi^2} I_0^2\right) \left[\arcsin\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{a}{\sqrt{r^2-a^2}} - \right.\right. \\
& \left. - \frac{\pi b}{2\sqrt{b^2-r^2}}\right] + \frac{\lambda^2 I_2}{6}\left[3\left(\frac{r}{a}\right)^2 \arcsin\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{3r^2-a^2}{a\sqrt{r^2-a^2}}\right] + \\
& + \frac{\lambda^3}{3}\left(\frac{b}{r}\right)^3 \left[1 - \frac{2}{\pi}\arccos\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{2r}{\pi\sqrt{b^2 r^2}}\right] + \\
& \left. + \frac{b\varepsilon^3}{3\sqrt{b^2-r^2}}\left[I_2\left(1 - 3\frac{r^2}{b^2}\right) + \frac{12}{\pi^2} I_0^3\right] + 0(\lambda^4)\right\}, \qquad a<r<b,
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

$$
\begin{aligned}
P = 4\delta b C_1 \Big[& 1 - \frac{2\varepsilon}{\pi} I_0 + \frac{4\varepsilon^2}{\pi^2} I_0^2 + \frac{2\epsilon^3}{\pi}\left(\frac{1}{3} I_2 - \frac{4}{\pi^2} I_0^3\right) + \frac{8\epsilon^4}{\pi^2} I_0 \times \\
& \times \left(\frac{2}{\pi^2} I_0^3 - \frac{1}{3} I_2\right) - \frac{4\lambda^3}{3\pi^2}\left(1 - \frac{4\varepsilon}{\pi} I_0\right) + 0(\epsilon^5)\Big].
\end{aligned}
$$

Dla dowolnych warunków podparcia dolnego brzegu warstwy i danego materiału można ze wzoru (5.4) obliczyć kolejne zbieżne całki, a z (5.5) naprężenia kontaktowe i osiadanie stempla. Otrzymane rozwiązania pozwalają na badanie wpływu efektu anizotropii materiału warstwy i warunków brzegowych na jej dolnym brzegu na interesujące w zagadnieniu kontaktowym fizyczne wielkości.

LITRATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Н. Н. Лебедев, И. С. Уфлянн, *Осесимметричная задача для упругого слоя*, ПММ, **22**, 320, 1958.
2. В. М. А. Александров, И. И. Ворович, *Одействии штампа на упругий слой конечной тащины*, №ММ, **24**, 323, 1960
3. A. N. England, *A punch problem for a transversely isotropic layer*, Proc. Camb. Phil. Soc., **58**, 537, 1962.
4. I. M. Kizyma, W. B. Rudnicki, *Osiowo-symetryczne zagadnienie kontaktowe dla poprzecznie izotropowej warstwy z uwzględnieniem naprężeń stycznych w obszarze kontaktu*, Rozpr. Inżyn., **21**, 55, 1973.
5. R. S. Dhaliwal, *Punch problem for an elastic layer overlying an elastic foundation*, Int. J. Engng. Sci., **8**, 273, 1970.
6. R. S. Dhaliwal and I. S. Rau, *The axisymmetric Boussinesq problem for a thick elastic layer under a punch of arbitrary profile*, Int. J. Engng. Sci., **8**, 843, 1970.
7. R. S. Dhaliwal and B. M. Singh, *Annular punch on an elastic layer overlying an elastic foundation*, Int. J. Engng. Sci., **15**, 263, 1977.
8. B. Rogowski, *Funkcje przemieszczeń dla ośrodka poprzecznie izotropowego*, Mech. Teor. i Stos., **13**, 69, 1975.
9. В. С. Губенко, В. И. Моссаковский, *Давление осесимметриметричного кольцевого штампа на упругое полупространство*, ПММ, **24**, 334, 1960.

Резюме

КОЛЬЦЕВОЙ ШТАМП НА ПОПЕРЕЧНО ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА НИЖНЕМ КРАЕ

Рассмотрена задача упругого контакта для поперечно изотропного слоя, находяащегося на двухпараметрическом основании Винклера. В который вдавливается жесткий кольцевой штамп с произвольной основой, удовлетворяющей условиям осевой симметрии. Смешанная краевая задача записана в виде тройных интегральных уравнений, которые затем сведены к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Это последнее уравнение заменено системой четырех интегральных уравнений Фредгольма второго рода по отношению к четырем функциям, определяющим искомое решение, выгодное при итерационном методе, Приведены формулы для нормальных контактных напряжений и силы действующей на штамп, а такие итерационное решение для случая кольцевого штампа с плоской основой и толстого слоя.

Summary

ANNULAR PUNCH ACTING ON A TRANSVERSELY ISOTROPIC LAYER WITH ARBITRARY BOUNDARY CONDITIONS AT THE LOWER SURFACE

An elastic, transversely isotropic layer is resting on a two-parameter Winkler-type foundation. The layer is loaded by a rigid annular punch bounded from below by an arbitary axi-symmetric surface. The mixed boundary value problem is written in the form of a triple integral equation which is then reduced to the Fredholm equation of the first kind. The latter equation is replaced by a set of four Fredholm equations of second kind containing four functions which constitute the solution of the problem, suitable for iterative methods.

Normal contact stress distributions and forces acting on the punch are derived as also the iterative solution is found for the case of an annular punch with a plane base acting on a thick layer.

INSTYTUT INŻYNIERII BUDOWLANEJ
POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 lipca 1979 r.