

MAŁOWYNIOSŁA POWŁOKA SFERYCZNA Z LOSOWYMI ODCHYLEKAMI KSZTAŁTU*)

CZESŁAW BRANICKI I MIROSŁAW SKOWRONEK (GDAŃSK)

Praca zawiera analizę stochastycznie nieliniowego zagadnienia statyki mało-wyniosłej powłoki sferycznej, której powierzchnia środkowa ma charakter losowy. Rozpatrzono problem wpływu osiowo-symetrycznych odchyłek zależnych od jednej zmiennej losowej dla powłoki obciążonej stałym ciśnieniem radialnym.

Zastosowano metodę małego parametru, uzyskując rozwiązania analityczne dla pierwszego i drugiego przybliżenia. Przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych dla powłoki wolnopodpartej i zamocowanej, które porównano z dyskretnym rozwiązaniem problemu stochastycznie nieliniowego.

WSTĘP

Proces wytwarzania konstrukcji powłokowych prowadzi może do powstawania odchyłek geometrycznych względem projektowanego kształtu. Niektóre typy powłok są wrażliwe na małe zmiany geometryczne: małym zmianom towarzyszą istotne zmiany wielkości statycznych. Dotyczy to w szczególności problemu stateczności powłok; tematu tego nie będziemy jednak w tej pracy rozpatrywać.

W niniejszym artykule zajmiemy się problemem statycznym wpływu losowych odchyłek geometrycznych w sferycznych powłokach o małej wyniosłości. Problem wynika z doświadczenia autorów w ocenie bezpieczeństwa sferycznych pokryw zbiorników ciśnieniowych. W procesie technologicznym wycinania powłoki ze sferycznej kształtki i formowania elementów łączących, występuje — podczas procesu stygnięcia materiału — «wyprostowanie się» powłoki. W rezultacie otrzymuje się pokrywę o mniejszej (losowej) krzywiznie i po przyłożeniu ciśnienia następuje znaczny — względem stanu projektowanego — wzrost sił wewnętrznych.

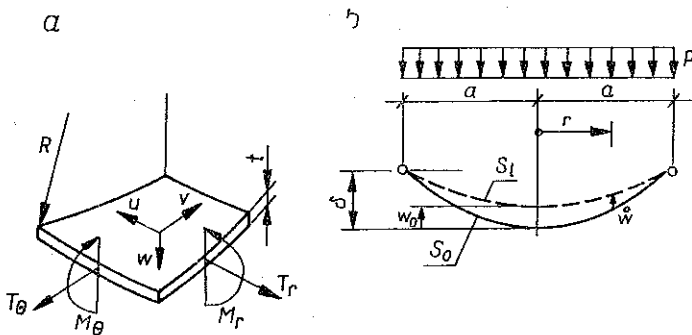
Powłoki o kształcie losowym można obliczać z uwzględnieniem efektów losowych, posługując się rachunkiem prawdopodobieństwa, analizując problem, w którym występują wielkości będące zmiennymi losowymi lub funkcjami losowymi. Innym podejściem jest wybór najbardziej niekorzystnego kształtu powłoki i analiza deterministyczna tak wybranej powłoki. Wymieniony pierwszy ze sposobów wymaga pełnej informacji dotyczącej cech losowych dopuszczalnego zbioru realizacji kształtu powłoki.

*) Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego cytowanego w poz. [4], skoordynowanego przez IPPT PAN

W przedstawionej pracy podjęto próbę losowego ujęcia problemu, opisując kształt powłoki parametrem losowym i poszukując rozwiązań wyrażonych również przez parametry losowe. Charakterystyki losowe powierzchni środkowej powłoki przyjęto dość dowolnie, zachowując jedynie obserwowaną w praktyce tendencję zmian parametrów geometrycznych; nacisk położono na formalne aspekty ujęcia problemu.

1. POWŁOKA Z LOSOWYM POLEM ODCHYLEK

Przedmiotem rozważań jest mało-wyniosła, cienka, sprężysta powłoka o obrotowo-symetrycznej powierzchni środkowej. Przyjęto, że losowa realizacja powierzchni środkowej S_1 powstaje przez nałożenie na sferyczną powierzchnię projektowaną S_0 (zwaną dalej powierzchnią «idealną» powłoki) obrotowo symetrycznego pola odchyłek radialnych $\overset{\circ}{w}(r)$ (rys. 1a). Losowe pole odchyłek jest zdefiniowane w poszczególnych przekrojach przez wartość oczekiwaną $\langle \overset{\circ}{w}(r) \rangle$ i funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $f(\overset{\circ}{w}, r)$.



Rys. 1

Równanie zagadnienia dla teorii geometrycznie i fizycznie liniowej, bez uwzględnienia możliwości utraty stateczności, na podstawie [1] jest następujące:

$$(1.1) \quad \Psi|_{\alpha\beta} + \frac{i}{\lambda} \epsilon^{\alpha\sigma} \epsilon^{\beta\gamma} b_{\alpha\beta} \Psi|_{\sigma\gamma} = p/D.$$

W równaniu tym $\Psi(\theta^\alpha, \theta^\beta)$ jest poszukiwaną zespoloną funkcją problemu; $\theta^\alpha, \theta^\beta$ są krzywoliniowymi współrzędnymi Gaussa parametryzującymi powierzchnię S_1 ; pionowe kreski oznaczają różniczkowanie kowariantne względem tych współrzędnych. Symbole $\epsilon^{\alpha\sigma}$ i $b_{\alpha\beta}$ oznaczają odpowiednie tensory powierzchni środkowej S_1 powłoki.

Funkcja Ψ ma postać

$$(1.2) \quad \Psi = w + ib\Phi,$$

gdzie $w = \text{Re}(\Psi)$ jest polem radialnych przemieszczeń powłoki, a $\Phi = \text{Im}(\Psi)/b$ jest funkcją naprężeń, przez pochodne której wyrażają się przekrojowe siły błonowe.

W (1.1) ograniczono się do przypadku stałego obciążenia radialnego p . Ponadto

$$(1.3) \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$(1.4) \quad b = \frac{1}{\sqrt{DEt}} = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Et^2}, \quad \lambda = \sqrt{D/Et} = \frac{t}{\sqrt{12(1-\nu^2)}},$$

gdzie E , ν są stałymi materiałowymi, a t grubością powłoki.

W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że odchyłki $\overset{\circ}{w}$ są «małe». Wówczas na podstawie [4] w równaniach (1.1) utożsamiamy geometrię wewnętrzną powierzchni S_1 i S_0 , a jako przybliżenie tensora $\mathbf{b}_{\alpha\beta}$ drugiej formy kwadratowej powierzchni S_1 przyjmujemy

$$(1.5) \quad \mathbf{b}_{\alpha\beta} \approx b_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{w}|_{\alpha\beta},$$

gdzie $b_{\alpha\beta}$ jest tensorem drugiej formy kwadratowej powierzchni S_0 .

Po uwzględnieniu obrotowej symetrii problemu oraz faktu, że powierzchnia S_0 jest sferą o promieniu R i wobec (1.5) — równanie problemu (1.1) dla zmiennej bezwymiarowej $\alpha = r/k = \theta^1$ przybierze postać

$$(1.6) \quad \nabla_\alpha^4 \Psi - i \nabla^2 \Psi_\alpha = \frac{pk^4}{D} + \frac{i}{\lambda\alpha} (\overset{\circ}{w},_{\alpha} \Psi_{,\alpha}),$$

gdzie

$$(1.7) \quad \nabla_\alpha^2 = \frac{d^2}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\alpha},$$

$$k^2 = \lambda R,$$

przecinek zaś oznacza zwykłe różniczkowanie. Operator różniczkowy po lewej stronie równania (1.6) jest taki sam, jak dla mało-wyniosłej powłoki sferycznej o promieniu R .

Równanie (1.6) różni się od odpowiedniego równania dla powłoki idealnej (bez odchyłek $\overset{\circ}{w}$) występowaniem drugiego wyrazu po prawej stronie. Składnik ten zależy od nieznannej funkcji Ψ oraz od danej funkcji losowej $\overset{\circ}{w}$.

Do dalszej analizy przyjęto losowe pole odchyłek o postaci

$$(1.8) \quad \overset{\circ}{w} = W_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right),$$

gdzie W_0 jest zmienną losową o znanej funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $f(w_0)$ oraz a jest promieniem do linii brzegu powłoki (rys. 1a). Wstawiając (1.8) do (1.6) otrzymamy równanie problemu względem poszukiwanej funkcji $\Psi = \Psi(r, W_0)$:

$$(1.9) \quad \nabla_\alpha^4 \Psi - i \nabla_\alpha^2 \Psi = \frac{pk^4}{D} - i \left(\frac{W_0}{\delta} \right) \nabla_\alpha^2 \Psi,$$

gdzie $\delta = a^2/R$ jest wyniosłością czaszy sferycznej powierzchni S_0 . Zależność funkcji Ψ od losowego parametru W_0 ma charakter nieliniowy (problem jest stochastycznie nieliniowy).

W dalszej części pracy równanie (1.9) rozwiążemy metodą małego parametru. Wyniki otrzymane tą metodą dla pewnej powłoki porównamy z wynikami numerycznymi po dyskretyzacji stochastycznej problemu z tzw. metody tworzenia zbioru realizacji [5].

2. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA METODĄ MAŁEGO PARAMETRU

Przyjmujemy, że odchyłki powierzchni S_1 od powierzchni S_0 są statystycznie małe. Pozwala to składnik W_0/δ w równaniu (1.9) przedstawić w postaci $\varepsilon (W_0/\delta)$, gdzie ε jest małym parametrem. Przyjmując wówczas rozwiązanie równania (1.9) w postaci

$$(2.1) \quad \Psi = \Psi_0 + \varepsilon \left(\frac{W_0}{\delta} \right) \Psi_1 + \varepsilon^2 \left(\frac{W_0}{\delta} \right)^2 \Psi_2 + \dots,$$

otrzymujemy następujący nieskończony ciąg równań różniczkowych względem deterministycznych funkcji Ψ_i , $i=0, 1, 2, \dots$:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \nabla_\alpha^4 \Psi_0 - i \nabla_\alpha^2 \Psi_0 &= \frac{pk^4}{D}, \\ \nabla_\alpha^4 \Psi_0 - i \nabla_\alpha^2 \Psi_0 &= -i \nabla_\alpha^2 \Psi_0, \\ \nabla_\alpha^4 \Psi_2 - i \nabla_\alpha^2 \Psi_2 &= -i \nabla_\alpha^2 \Psi_1. \end{aligned}$$

Równanie (2.2)₁ odnosi się do powłoki «idealnej» obciążonej równomiernie ciśnieniem radialnym p ; jego rozwiązanie jest podane np. w pracy [2] i ma postać

$$(2.3) \quad \Psi_0 = A_1 + A_2 I_0(\alpha \sqrt{i}) + i\alpha^2 \frac{pk^4}{4D},$$

gdzie $A_1, A_2 = A + iB$ są stałymi zespolonymi zależnymi od warunków brzegowych, $I_0(\alpha \sqrt{i})$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessela pierwszego rodzaju, rzędu zerowego.

2.1. Pierwsze przybliżenie

Dla pierwszego przybliżenia równanie (2.2)₂ względem Ψ_1 po podstawieniu (2.3) przyjmie postać

$$(2.4) \quad \nabla_\alpha^4 \Psi_1 - i \nabla_\alpha^2 \Psi_1 = (A + iB) I_0(\alpha \sqrt{i}) + \frac{pk^4}{D},$$

gdzie A i B są stałymi rzeczywistymi z rozwiązania Ψ_0 dla powłoki idealnej; dla różnych sposobów podparcia powłoki wzory i algorytmy wyznaczenia tych wiel-

kości podano w [3]. Równanie (2.4) można interpretować jako równanie opisujące powłokę sferyczną bez odchyłek, obciążoną funkcyjnym «obciążeniem zespolonym».

Rozwiązania Ψ_1 poszukujemy w postaci sumy

$$(2.5) \quad \Psi_1 = \Psi_{10} + \Psi_{1p},$$

gdzie Ψ_{10} jest całką ogólną równania niejednorodnego (2.4)

$$(2.6) \quad \Psi_{10} = C_1 + (A_1 + iB_1) (\text{ber } \alpha + i \text{bei } \alpha),$$

Ψ_{1p} zaś jest całką szczególną równania jednorodnego (2.4)

$$(2.7) \quad \Psi_{1p} = -(A + iB) \frac{\alpha}{2} (\text{ber}' \alpha + i \text{bei}' \alpha) + i\alpha^2 \frac{pk^4}{4D},$$

gdzie $I_0 = \text{ber } \alpha + \text{bei } \alpha$, $I'_0 = \text{ber}' \alpha + i \text{bei}' \alpha$.

Rzeczywiste stałe C_1 , A_1 , B_1 wyznacza się znowu z tych samych co Ψ_0 warunków brzegowych. Na miejsce tych stałych wprowadzimy za pracą [3] stałe bezwymiarowe:

$$(2.8) \quad X - X \left(\frac{a}{\delta} \right)^2 \frac{pa^2}{Et}, \quad X = A_1, B_1, C_1, \quad X = A_1, B_1, C_1.$$

Wydzielając z rozwiązania Ψ_1 przemieszczenie radialne $w_1 = \text{Re}(\Psi_1)$ oraz funkcję naprężeń $\sigma = \text{Im}(\Psi_1) b$, wyznaczono pole sił wewnętrznych i pola przemieszczeń dla pierwszego przybliżenia:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} T_{r1} &= \frac{t}{k^2 \alpha} \Phi_{1,\alpha} = \frac{2pa^2}{\delta} \left[A_1 \frac{\text{bei}' \alpha}{\alpha} + B_1 \frac{\text{ber}' \alpha}{\alpha} \right] + T_{rp}, \\ T_{\theta1} &= \frac{t}{k^2} \Phi_{1,\alpha\alpha} = \frac{2pa^2}{\delta} \left[A_1 \left(\text{ber } \alpha - \frac{\text{bei}' \alpha}{\alpha} \right) - B_1 \left(\text{bei } \alpha + \frac{\text{ber}' \alpha}{\alpha} \right) \right] + T_{\theta p}, \\ M_{r1} &= -\frac{D}{k^2} \left(w_{1,\alpha\alpha} + \frac{\nu}{\alpha} w_{1,\alpha} \right) = \frac{4pa^2}{\alpha_0^2} \left[A_1 \left(\text{bei } \alpha + (1-\nu) \frac{\text{ber}' \alpha}{\alpha} \right) + \right. \\ &\quad \left. + B_1 \left(\text{ber } \alpha - (1-\nu) \frac{\text{bei}' \alpha}{\alpha} \right) \right] + M_{rp}, \\ M_{\theta1} &= -\frac{D}{k^2} \left(\frac{w_{1,\alpha}}{\alpha} + \nu w_{1,\alpha\alpha} \right) = \frac{4pa^2}{\alpha_0^2} \left[A_1 \left(\nu \text{bei } \alpha - (1-\nu) \frac{\text{ber}' \alpha}{\alpha} \right) + \right. \\ &\quad \left. + B_1 \left(\nu \text{ber } \alpha + (1-\nu) \frac{\text{bei}' \alpha}{\alpha} \right) \right] + M_{\theta p}, \\ w_1 &= \frac{4pa^2}{\alpha_0^4 D} [C_1 + A_1 \text{ber } \alpha - B_1 \text{bei } \alpha] + w_{1p}, \\ u_{11} &= -\frac{8\delta pa^4}{aD\alpha_0^5} [C_1 \alpha + (1+\nu) (A_1 \text{bei}' \alpha + B_1 \text{ber}' \alpha)] + u_{1p}. \end{aligned}$$

$T_{r_p}, T_{\theta_p}, M_{r_p}, M_{\theta_p}, w_{1p}$ i u_{1p} są funkcjami odpowiadającymi całce szczególnej (2.7).
Funkcje te są następujące:

$$\begin{aligned}
 T_{r_p} &= \frac{pa^2}{4\delta} [1 - 4A \operatorname{ber} \alpha + 4B \operatorname{bei} \alpha] = \frac{pa^2}{4\delta} T_{r_p}, \\
 T_{\theta_p} &= \frac{pa^2}{4\delta} [1 - 4A (\operatorname{ber} \alpha + \alpha \operatorname{ber}' \alpha) + 4B (\operatorname{bei} \alpha + \alpha \operatorname{bei}' \alpha)] - \frac{pa^2}{4\delta} T_{r_p}, \\
 M_{r_p} &= \frac{pa^2}{\alpha_0^2} \{-2A [(1+\nu) \operatorname{bei} \alpha + \alpha \operatorname{bei}' \alpha] + \\
 &\quad -2B [(1+\nu) \operatorname{ber} \alpha + \alpha \operatorname{ber}' \alpha]\} = \frac{pa^2}{\alpha_0^2} M_{r_p}, \\
 (2.10) \quad M_{\theta_p} &= \frac{pa^2}{\alpha_0^2} \{-2A [(1+\nu) \operatorname{bei} \alpha + \nu \alpha \operatorname{bei}' \alpha] - 2B [(1+\nu) \operatorname{ber} \alpha + \\
 &\quad + \nu \alpha \operatorname{ber}' \alpha]\} = \frac{pa^2}{\alpha_0^2} M_{\theta_p}, \\
 w_{1p} &= -\frac{2pa^4}{D\alpha_0^4} \alpha [A \operatorname{ber}' \alpha - B \operatorname{bei}' \alpha] = -\frac{pa^4}{D\alpha} W_{1p}, \\
 u_{1p} &= \frac{1}{\alpha_0^5} \left(\frac{\delta}{a}\right) \frac{pa^4}{D} \left\{ (1-\nu) \alpha + 8A \left[2 \operatorname{bei}' \alpha - (3-\nu) \frac{\alpha}{2} \operatorname{ber} \alpha \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 8B \left[2 \operatorname{ber}' \alpha + (3-\nu) \frac{\alpha}{2} \operatorname{bei} \alpha \right] \right\} = \frac{1}{\alpha_0^5} \left(\frac{\delta}{a}\right) \frac{pa^4}{D} U_{1p}.
 \end{aligned}$$

Stałe A i B są sprowadzonymi do postaci bezwymiarowej stałymi A i B z równania (2.4).

2.2. Drugie przybliżenie

Po podstawieniu w prawą stronę równania (2.2)₃ wyrażeń (2.6) i (2.7) otrzymamy równanie różniczkowe względem Ψ_2 :

$$(2.11) \quad \nabla_\alpha^4 \Psi_2 - i \nabla_\alpha^2 \Psi_2 = -(A + iB) \left(\frac{\alpha}{2} I'_0 + I_0 \right) + (A_1 + iB_1) I_0 + pk^4/D.$$

Całka Ψ_{20} tego równania różni się od (2.6) tylko stałymi:

$$(2.12) \quad \Psi_{20} = (A_2 + iB_2) (\operatorname{ber} \alpha + i \operatorname{bei} \alpha),$$

a całka szczególna Ψ_{2p} — jak łatwo sprawdzić — ma postać

$$(2.13) \quad \Psi_{2p} = (A + iB) \frac{\alpha}{4} \left(i \frac{\alpha}{2} I_0 + I'_0 \right) - (A_1 + iB_1) \frac{\alpha}{2} I'_0 + i\alpha^2 \frac{pk^4}{4D}.$$

Stosując analogiczne postępowanie do (2.1), otrzymano następujące siły wewnętrzne dla drugiego przybliżenia:

$$\begin{aligned}
 T_r &= \frac{2pa^2}{\delta} \left\{ \mathbf{A}_2 \frac{\text{bei}' \alpha}{\alpha} + \mathbf{B}_2 \frac{\text{ber}' \alpha}{\alpha} + T_{rp} \right\}, \\
 T_\theta &= \frac{2pa^2}{\delta} \left\{ \mathbf{A}_2 \left(\text{ber} \alpha - \frac{\text{bei}' \alpha}{\alpha} \right) - \mathbf{B}_2 \left(\text{bei} \alpha + \frac{\text{ber}' \alpha}{\alpha} \right) + T_{\theta p} \right\}, \\
 M_r &= \frac{4pa^2}{\alpha_0^2} \left\{ \mathbf{A}_2 \left(\text{bei} \alpha + (1-\nu) \frac{\text{ber}' \alpha}{\alpha} \right) + \mathbf{B}_2 \left(\text{ber} \alpha - (1-\nu) \frac{\text{bei}' \alpha}{\alpha} \right) + M_{rp} \right\}, \\
 M_\theta &= \frac{4pa^2}{\alpha_0^2} \left\{ \mathbf{A}_2 \left(\nu \text{bei} \alpha - (1-\nu) \frac{\text{ber}' \alpha}{\alpha} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{B}_2 \left(\nu \text{ber} \alpha + (1-\nu) \frac{\text{bei}' \alpha}{\alpha} \right) + M_{\theta p} \right\}, \\
 W_2 &= \frac{4pa^4}{\alpha_0^4 D} \{ \mathbf{A}_2 \text{ber} \alpha - \mathbf{B}_2 \text{bei} \alpha + \mathbf{C}_2 + \mathbf{W}_{2p} \}.
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

Składniki T_{rp} , ..., $M_{\theta p}$, W_{2p} pochodzą od całki szczególnej i są następujące:

$$\begin{aligned}
 T_{rp} &= \frac{1}{4} (\mathbf{A}\varphi_1 - \mathbf{B}\varphi_2) + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}_1 + \frac{\mathbf{A}}{2} \right) \text{ber} \alpha + \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}_1 + \frac{\mathbf{B}}{2} \right) \text{bei} \alpha, \\
 T_{\theta p} &= \frac{1}{4} (\mathbf{A}\varphi_3 - \mathbf{B}\varphi_4) + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}_1 + \frac{\mathbf{A}}{2} \right) (\text{ber} \alpha + \alpha \text{ber}' \alpha) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}_1 + \frac{\mathbf{B}}{2} \right) (\text{bei} \alpha + \alpha \text{bei}' \alpha), \\
 M_{rp} &= \frac{1}{4} \mathbf{A} (\varphi_4 + \nu\varphi_2) + \frac{1}{4} \mathbf{B} (\varphi_3 + \nu\varphi_1) - \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}_1 + \frac{\mathbf{A}}{2} \right) [(1+\nu) \text{bei} \alpha + \\
 &\quad + \alpha \text{bei}' \alpha] - \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}_1 + \frac{\mathbf{B}}{2} \right) [(1+\nu) \text{ber} \alpha + \alpha \text{ber}' \alpha], \\
 W_{2p} &= -\frac{1}{8} \mathbf{A}\alpha^2 \text{bei} \alpha - \frac{1}{8} \mathbf{B}\alpha^2 \text{ber} \alpha - \frac{\alpha}{2} \left(\mathbf{A}_1 + \frac{\mathbf{A}}{2} \right) \text{ber}' \alpha + \\
 &\quad + \frac{\alpha}{2} \left(\mathbf{B}_1 + \frac{\mathbf{B}}{2} \right) \text{bei}' \alpha, \\
 M_{\theta p} &= \frac{1}{4} \mathbf{A} (\varphi_2 + \nu\varphi_4) + \frac{1}{4} \mathbf{B} (\varphi_1 + \nu\varphi_3) - \left(\frac{1}{2} \mathbf{A}_1 + \frac{\mathbf{A}}{2} \right) [(1+\nu) \text{bei}' \alpha + \\
 &\quad + \nu\alpha \text{bei}' \alpha] - \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}_1 + \frac{\mathbf{B}}{2} \right) \left[(1+\nu) \text{ber} \alpha + \nu\alpha \text{ber}' \alpha \right],
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

gdzie

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \text{ber } \alpha + \frac{\alpha}{2} \text{bei}' \alpha, & \varphi_2 &= \text{bei } \alpha + \frac{\alpha}{2} \text{bei}' \alpha, \\ \varphi_3 &= \text{ber } \alpha + \frac{3}{2} \alpha \text{ber}' \alpha - \frac{\alpha^2}{2} \text{bei } \alpha, \\ \varphi_4 &= \text{bei } \alpha + \frac{3}{2} \alpha \text{bei}' \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \text{ber } \alpha. \end{aligned}$$

2.3. Charakterystyki losowe wynikowych wielkości losowych

Jeżeli przez S oznaczyć dowolną wynikową losową wielkość statyczną (np. przemieszczenie lub siłę wewnętrzną) jako funkcje współrzędnej α , a przez S_0, S_1 i S_2 odpowiadające S deterministyczne funkcje dla powłoki idealnej oraz z pierwszego i drugiego przybliżenia odpowiednio, to na mocy (2.1) $S(\alpha)$ można przedstawić następująco:

$$(2.17) \quad S(\alpha) = S_0(\alpha) + \left(\frac{W_0}{\delta}\right) S_1(\alpha) + \left(\frac{W_0}{\delta}\right)^2 S_2(\alpha).$$

Powyższy wzór jest poprawny dla drugiego przybliżenia (tzn. przy uwzględnieniu dwóch wyrazów w rozwinięciu według małego parametru). W_0 jest tu znaną zmienną losową. Dla ustalonego α dwie charakterystyki: wartość oczekiwaną $\langle S \rangle$ i wariancję $\langle SS \rangle$ zmiennej losowej $S(\alpha)$ można obliczyć ze wzorów następujących:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \langle S \rangle &= S_0 + \frac{\langle w_0 \rangle}{\delta} S_1 + \frac{\langle w_0^2 \rangle}{\delta^2} S_2, \\ \langle SS \rangle &= S_1^2 \frac{\sigma w_0^2}{\delta^2} + S_2^2 \frac{1}{\delta^4} [\langle w_0^4 \rangle - (\langle w_0^2 \rangle)^2] + 2 \frac{S_1 S_2}{\delta^3} [(\langle w_0 \rangle)^3 - \langle w_0 \rangle \langle w_0^2 \rangle], \end{aligned}$$

gdzie $\sigma w_0^2 = \langle w_0^2 \rangle - (\langle w_0 \rangle)^2$ jest wariancją zmiennej losowej w_0 , $\langle w_0 \rangle$ jest jej wartością oczekiwaną, a

$$(2.19) \quad \langle w_0^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} w_0^k f(w_0) dw_0$$

są momentami początkowymi wyższych rzędów.

Ograniczając się tylko do pierwszego przybliżenia, wyrażenie na zmienną $S(\alpha)$ i jej charakterystyki $\langle S \rangle$ i $\langle SS \rangle$ otrzymamy z (2.17) i (2.18), pomijając tam wyrazy zawierające S_2 . Znając funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $f(w_0)$ zmiennej W_0 , możemy obliczyć funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $g(s)$ zmiennej losowej S (dla ustalonego α). Mianowicie znajdziemy

$$(2.20) \quad g(s) = f(\varphi(s)) |\varphi'(s)|,$$

gdzie φ jest funkcją odwrotną do (2.17), tzn. wyrażającą zmienną W_0 przez S : $W_0 = \varphi(S)$.

Dla rozkładu trójkątnego według rys. 2a, przyjętego w dalszej części pracy do analizy numerycznej, mamy

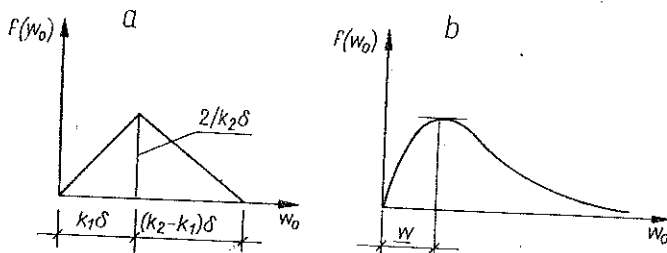
$$(2.21) \quad f(w_0) = \begin{cases} \frac{2w_0}{k_1 k_2 \delta^2}, & \text{jeśli } 0 \leq w_0 \leq k_1 \delta, \\ \frac{2}{\delta(k_2 - k_1)} \left[1 - \frac{w_0}{k_2 \delta} \right], & \text{jeśli } k_1 \delta \leq w_0 \leq k_2 \delta, \end{cases}$$

dla pierwszego przybliżenia

$$(2.22) \quad g(s) = \begin{cases} \frac{2(s - S_0)}{S_1^2(k_1 k_2)}, & \text{jeśli } S_0 \leq s \leq S_0 + k_1 S_1; \\ \frac{2}{S_1(k_2 - k_1)} \left[1 - \frac{s - S_0}{k_2 S_1} \right], & \text{jeśli } S_0 + k_1 S_1 \leq s \leq S_0 + k_2 S_1; \end{cases}$$

dla drugiego przybliżenia

$$(2.23) \quad g(s) = \begin{cases} \frac{1}{k_1 k_2 S_2} \left[1 - \frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 + 4S_2(s - S_0)}} \right], & \text{jeśli } S_0 \leq s \leq S_0 + k_1 S_1 + k_1^2 S_2, \\ \frac{1}{k_2(k_2 - k_1) S_2} \left[\frac{2k_2 S_2 + S_1}{\sqrt{S_1^2 + 4S_2(s - S_0)}} - 1 \right], & \text{jeśli } S_0 + k_1 S_1 + k_1^2 S_2 \leq s \leq S_0 + k_2 S_1 + k_2^2 S_2. \end{cases}$$

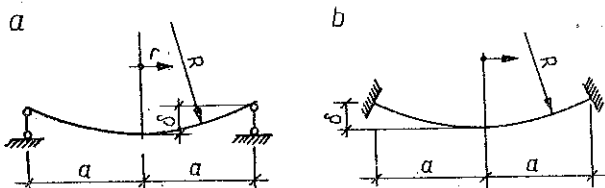


Rys. 2

2.4. Powłoka swobodnie podparta

Dla powłoki podpartej (rys. 3a), o następujących warunkach brzegowych dla $r = a$ ($\alpha = a/k \equiv \alpha_0$)

$$(2.24) \quad T_r|_{\alpha=\alpha_0} = 0, \quad M_r|_{\alpha=\alpha_0} = 0, \quad w|_{\alpha=\alpha_0} = 0.$$



Rys. 3

Stałe występujące w związkach (2.9), (2.15) i (2.14) mają postać:

a) Dla pierwszego przybliżenia

$$(2.25) \quad \begin{aligned} A_1 &= -\frac{\alpha_0}{4A_0} \left[\frac{1}{2} T_{rp}(\alpha_0) \left(\text{ber } \alpha_0 - (1-\nu) \frac{\text{bei}' \alpha_0}{\alpha_0} \right) M_{rp}(\alpha_0) \frac{\text{ber}' \alpha_0}{\alpha_0} \right], \\ B_1 &= -\frac{\alpha_0}{4A_0} \left[M_{rp}(\alpha_0) \frac{\text{bei}' \alpha_0}{\alpha_0} - \frac{1}{2} T_{rp}(\alpha_0) \left(\text{bei } \alpha_0 + (1-\nu) \frac{\text{ber}' \alpha_0}{\alpha_0} \right) \right], \\ C_1 &= \frac{1}{4} W_{1p} - A_1 \text{ber } \alpha_0 + B_1 \text{bei } \alpha_0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.26) \quad \Delta_0 = \text{ber } \alpha_0 \text{bei}' \alpha_0 - \text{bei } \alpha_0 \text{ber}' \alpha_0 - \frac{1-\nu}{\alpha_0} [(\text{ber}' \alpha_0)^2 + (\text{bei}' \alpha_0)^2].$$

b) Dla drugiego przybliżenia

$$(2.27) \quad \begin{aligned} A_2 &= \frac{\alpha_0}{2} \left\{ T_{rp}(\alpha_0) \left[\text{ber } \alpha_0 - (1-\nu) \frac{\text{bei}' \alpha_0}{\alpha_0} \right] + M_{rp}(\alpha_0) \frac{\text{ber}' \alpha_0}{\alpha_0} \right\}, \\ B_2 &= \frac{\alpha_0}{2} \left\{ M_{rp}(\alpha_0) \frac{\text{bei}' \alpha_0}{\alpha_0} + T_{rp}(\alpha_0) \left[\text{bei } \alpha_0 + (1-\nu) \frac{\text{ber}' \alpha_0}{\alpha_0} \right] \right\}, \\ C_2 &= -A_2 \text{ber } \alpha_0 + B_2 \text{bei } \alpha_0 - W_{2p}(\alpha_0). \end{aligned}$$

2.5. Powłoka utwierdzona

Dla powłoki podpartej (rys. 3b) o następujących warunkach brzegowych:

$$(2.28) \quad w|_{\alpha=\alpha_0}=0, \quad \frac{dw}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0}=0, \quad u|_{\alpha=\alpha_0}=0,$$

stałe całkowania dla pierwszego przybliżenia są następujące:

$$(2.29) \quad \begin{aligned} A_1 &= -\frac{\text{bei}' \alpha_0}{A} \left[\frac{1}{8} U_{1p}(\alpha_0) - \alpha_0 \frac{1}{4} W_{1p}(\alpha_0) \right] + \frac{W_{p,\alpha}(\alpha_0)}{4A} \times \\ &\quad \times [(1+\nu) \text{ber}' \alpha_0 + \alpha_0 \text{bei } \alpha_0], \\ B_1 &= -\frac{W_{p,\alpha}}{4A} [(1+\nu) \text{bei}' \alpha_0 - \alpha_0 \text{ber } \alpha_0] - \frac{\text{ber}' \alpha_0}{A} \times \\ &\quad \times \left[\frac{1}{8} U_{1p}(\alpha_0) - \frac{1}{4} W_{1p}(\alpha_0) \alpha_0 \right]; \\ C_1 &= \frac{1}{4} W_{1p} - A_1 \text{ber } \alpha_0 + B_1 \text{bei } \alpha_0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.30) \quad \begin{aligned} W_{p,\alpha}(\alpha_0) &= 2\alpha_0 (A \text{bei } \alpha_0 + B \text{ber } \alpha_0), \\ \Delta &= \alpha_0 (\text{ber } \alpha_0 \text{bei}' \alpha_0 - \text{ber}' \alpha_0 \text{bei } \alpha_0) - (1+\nu) \times [(\text{ber}' \alpha_0)^2 + (\text{bei}' \alpha_0)^2]. \end{aligned}$$

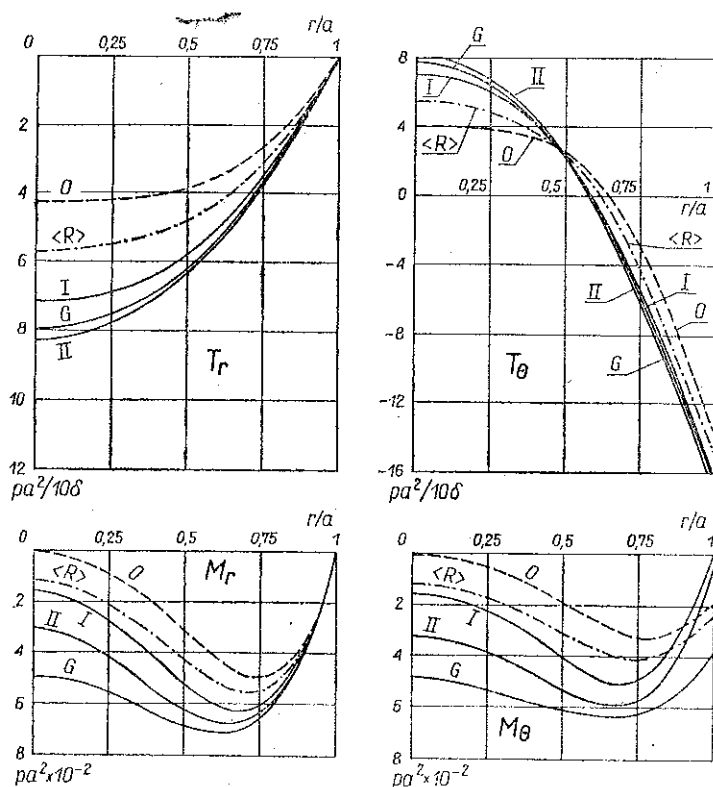
3. OBLICZENIA NUMERYCZNE

Posługując się przedstawioną w p.2. metodą analizy wpływu losowych odchyłek wielkości geometrycznych powłoki, wykonano szereg obliczeń numerycznych. Do tego celu wykorzystano opisany w pracy autorów [6] program na komputer. Program ten zmodyfikowano w ten sposób, że umożliwia on analizę sferycznych powłok wolnopodpartych i zamocowanych z obrotowo-symetrycznymi odchyłkami o postaci (1.7) dla dowolnych charakterystyk zmiennej losowej W_0 .

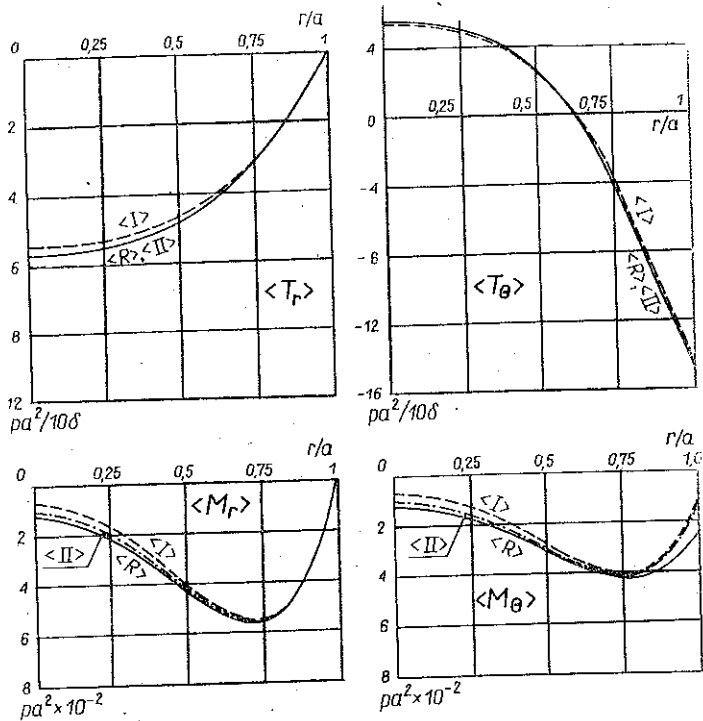
W przykładach numerycznych rozpatrywano niesymetryczne, jednostronne rozkłady gęstości prawdopodobieństwa zmiennej W_0 , odpowiadające tendencji «spłaszczania się» powłoki w procesie jej wytwarzania. Rozpatrzono rozkłady następujące:

a. Trójkątny (rys. 2a), gdzie dla oznaczeń podanych na rysunku, głównie charakterystyki zmiennej W_0 mają postać

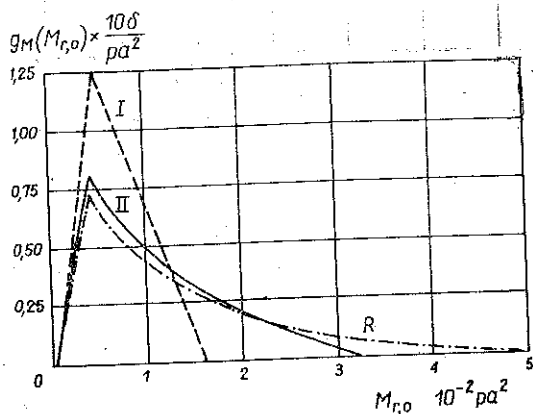
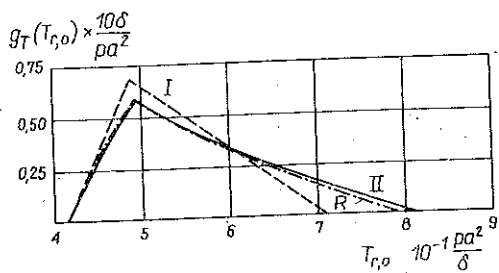
$$(3.1) \quad \langle w_0 \rangle = \frac{\delta}{3} (k_1 + k_2), \quad \langle w w_0 \rangle = \frac{\delta^2}{18} (k_1^2 - k_1 k_2 + k_2^2).$$



Rys. 4. Powłoka wolnopodparta. Porównanie rozwiązań uzyskanych metodą małego parametru. Oznaczenia: 0 — dolna skrajna realizacja (powłoka sferyczna $\delta=d$); G — górna skrajna realizacja (powłoka sferyczna $\delta=d/2$); $\langle R \rangle$ — wartość oczekiwana rozwiązania dyskretnego; I — górna skrajna realizacja 1 przybliżenia MMP; II — górna skrajna realizacja 2 przybl. MMP



Rys. 5. Powłoka wolnopodparta. Wartości oczekiwane sił wewnętrznych. Oznaczenia: $\langle R \rangle$ — rozwiązanie dyskretne; $\langle I \rangle$ — 1 przybliżenie MMP; $\langle II \rangle$ — 2 przybliżenie MMP



Rys. 6. Powłoka wolnopodparta. Funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa sił T_r , M_r dla $r=0$. I — 1 przybliżenie MMP; II — 2 przybliżenie MMP; R — rozwiązanie dyskretne

W obliczonych przykładach przyjęto $k_1=1/8$, $k_2=1/2$, otrzymując

$$\langle w_0 \rangle = \frac{5}{24} \delta, \quad \langle w w_0 \rangle = \frac{13 \delta^2}{1152},$$

$$\langle w_0^3 \rangle = \frac{51}{1536} \delta^3, \quad \langle w_0^4 \rangle = \frac{113}{40 \cdot 8^3} \delta^4.$$

b. Rozkład Rayleigha (rys. 2b) o funkcji gęstości i parametrach

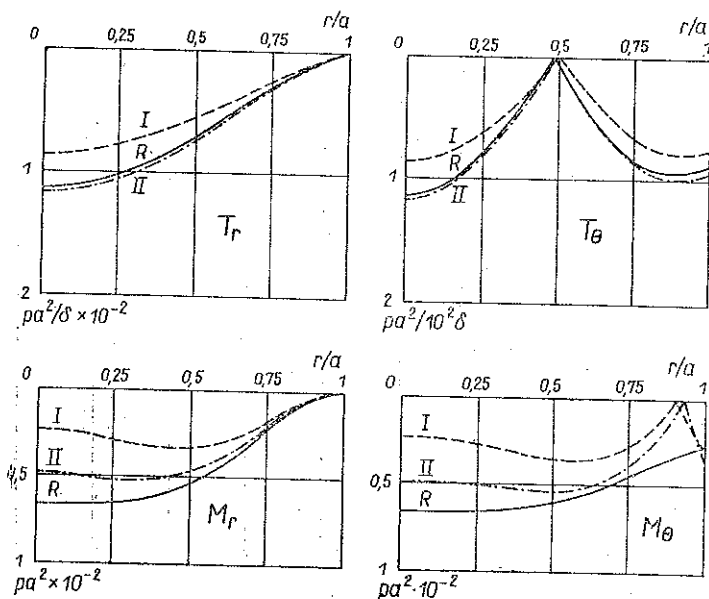
$$(3.2) \quad f(w_0) = \frac{w_0}{w^2} \exp\left(-\frac{w_0^2}{2w^2}\right),$$

$$\langle w_0 \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2}} w, \quad \sigma w_0 = 0,65513 w.$$

Do obliczeń numerycznych przyjęto $w=\delta/8$. Analizowano powłokę S_0 o danych geometrycznych identycznych z podanymi w pracy [3], to znaczy $a=56$ cm, $\delta \equiv d=7,13$ cm, $t=2$ cm, $\nu=0,3$ oraz $R=220$ cm. Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci bezwymiarowej.

Z uwagi na przyjętą postać odchyłek, zależnych tylko od jednej zmiennej losowej, w rozpatrywanym przypadku można otrzymać dyskretne rozwiązanie problemu stochastycznie nieliniowego. Daje to możliwość sprawdzenia kolejnych przybliżeń metody małego parametru.

Wymienione, dyskretne rozwiązanie problemu stochastycznego polega na generacji, według danego rozkładu gęstości zmiennej W_0 , dostatecznie reprezentacji



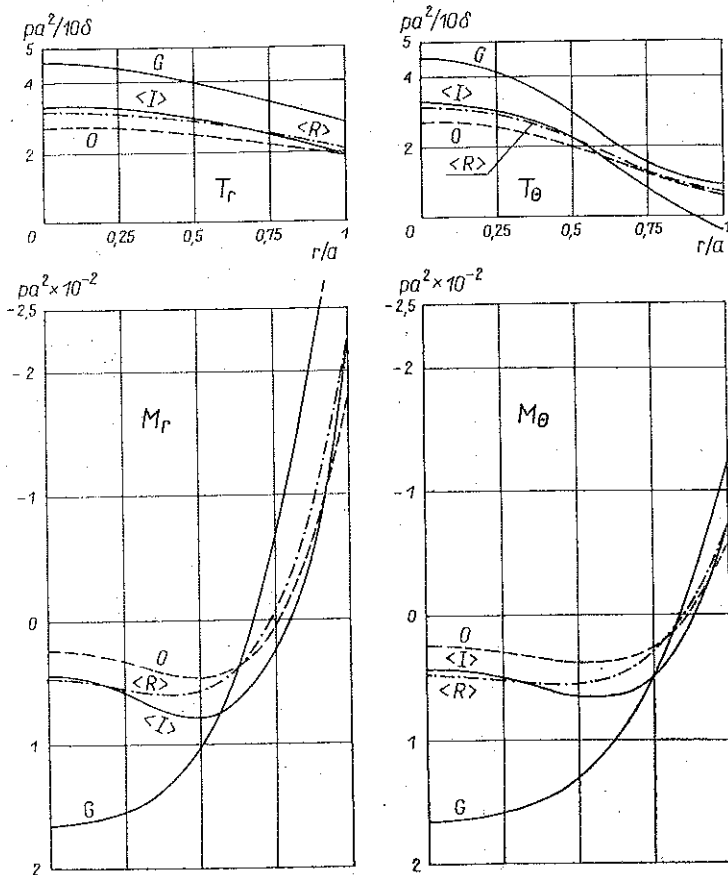
Rys. 7. Powłoka wolnopodparta. Odchylenia standardowe sił wewnętrznych. I — 1 przybliżenie MMP, II — 2 przybliżenie MMP, R — rozwiązanie dyskretne

tywnego zbioru realizacji kształtu powłoki. W rozpatrywanych przykładach generowano po prostu powłoki sferyczne o parametrze $\delta_i = d(1 - 0,5 i/l)$, $i = 0, 1, 2, \dots, l$, l — liczba realizacji, przyporządkowując każdej realizacji określone prawdopodobieństwo, które też przypisywano wynikom rozwiązania statycznego danej realizacji.

Metoda ta, nazwana w [5] metodą tworzenia zbioru realizacji, wymaga następnie zastąpienia zbioru wyników charakterystykami losowymi: wartościami oczekiwanymi poszczególnych rzędnych pól wielkości statycznych i ich macierzą korelacyjną.

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla dwóch następujących schematów podparcia powłoki:

1. Dla powłoki wolnopodpartej. Porównano tu pierwsze i drugie przybliżenie metody małego parametru z rozwiązaniem uzyskanym metodą tworzenia zbioru realizacji dla trójkątnego rozkładu $f(w_0)$ (rys. 4, 5, 6 i 7).



Rys. 8. Powłoka utwardzona. Porównanie rozwiązania i przybliżenia MMP. Oznaczenia: 0 — dolna skrajna realizacja (powłoka sferyczna $\delta=d$); G — górna skrajna realizacja (powłoka sferyczna $\delta=d/2$); $\langle R \rangle$ — wartość oczekiwana rozwiązania dyskretnego; $\langle I \rangle$ — wartość oczekiwana 1 przybliżenia MMP

2. Dla powłoki zamocowanej; porównano tu tylko pierwsze przybliżenie metody małego parametru ze stochastycznym rozwiązaniem dyskretnym dla rozkładu Rayleigha (rys. 8).

Rozwiązanie metodą tworzenia zbioru realizacji otrzymano stosując alternatywny program na komputer. Stwierdzono, że podział obszaru zmienności δ na $l=20$ przedziałów jest wystarczający (podział na $l=40$ części daje wyniki różniące się na 3-4 miejscu dziesiętnym).

4. WNIOSKI

Przeprowadzone obliczenia numeryczne, których wyniki przedstawiono na rys. 4-6, umożliwiają porównanie dokładności metody małego parametru. Założymy przy tym, że rozwiązanie otrzymane metodą tworzenia zbioru realizacji jest bliskie rozwiązaniu «ściślemu» rozpatrywanego problemu stochastycznie nieliniowego. Należy jednak pamiętać, że w obu metodach mamy do czynienia z różnymi rodzajami odchyłek; w metodzie małego parametru są to odchyłki paraboliczne, w metodzie zaś tworzenia zbioru realizacji odchyłki są różnicami dwóch ster o różnych wyniosłościach δ . Wnioski z przeprowadzonej analizy są następujące:

1. Wartości oczekiwane sił wewnętrznych, otrzymane z I i II przybliżenia metody małego parametru (*MMP*), są do siebie zbliżone i bliskie odpowiedniej wielkości otrzymanej za pomocą metody tworzenia zbioru realizacji (*MTR*). Zgodność rozwiązań *MMP* z rozwiązaniami *MTR* jest lepsza dla sił błonowych, aniżeli dla momentów zginających oraz lepsza dla powłoki wolnopodpartej, aniżeli dla zamocowanej. Wartości oczekiwane z II przybliżenia *MMP* są bliższe (dla sił T_r i T_θ prawie równe) odpowiadającej wartości z *MTR* niż z I przybliżenia.

2. Odchylenia standardowe sił wewnętrznych I przybliżenia *MMP* stanowią od 40-80% wartości «ściśłych». II przybliżenie *MMP* wynik ten znacznie poprawia, co świadczy o zbieżności metody.

3. Zbieżność metody jest szczególnie widoczna na rys. 6, przedstawiającym wynikowe rozkłady prawdopodobieństwa I i II przybliżenia *MMP* oraz *MTR* otrzymanych dla powłoki wolnopodpartej i rozkładu trójkątnego.

4. W rozpatrywanej powłoce występuje zjawisko silnej lokalnej stochastycznej nieliniowości niektórych sił wewnętrznych (np. $M_{r,0}$), co znajduje odbicie w różnym stopniu deformacji funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa.

5. Przeprowadzone porównania wykazują dużą przydatność metody małego parametru do analizy stochastycznie nieliniowych problemów powłok sprężystych. Dalszym kierunkiem badań powinno być uwzględnienie większej liczby parametrów losowych i opis odchyłek geometrycznych funkcjami losowymi.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical elasticity*, Oxford 1968.
2. A. A. Назаров, *Основы теории и методы расчета пологих оболочек*, Ленинград 1966.
3. C. BRANICKI, M. SKOWRONEK, *Obliczenie sferycznych, o małej wyniosłości, pokryw naczyń ciśnieniowych*, Arch. Bud. Maszyn, 17, 2, 1971.

4. *Obliczenia wytrzymałościowe konstrukcji powłokowych z uwzględnieniem czynników losowych*, Problem węzłowy 05.12. temat 11. 3, Gdańsk 1977.
5. E. BIELEWICZ i inni, *Procesy losowe w układach sprężystych*, Rozp. Inż., 23, 3, 1975.
6. C. BRANICKI, M. SKOWRONEK, *Obliczenia wytrzymałościowe sferycznych pokryw naczyń ciśnieniowych*, Dozór Techniczny, 5, 1976.

Р а з ю м е

ПОЛОГАЯ СФЕРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА СО СЛУЧАЙНЫМИ ОТКЛОНЕНИЯМИ ФОРМЫ

Работа содержит анализ стохастически нелинейной проблемы статики пологой сферической оболочки, срединная поверхность которой имеет случайный характер. Рассмотрена проблема влияния осесимметричных отклонений, зависящих от одной случайной переменной, для оболочки нагруженной постоянным радиальным давлением. Применен метод малого параметра, получая аналитические решения для первого и второго приближений. Представлены результаты численных расчетов для свободно подпертой и закрепленной оболочек, которые сравнены с дискретным решением стохастически нелинейной проблемы.

SUMMARY

SHALLOW SPHERICAL SHELL WITH THE RANDOM VARIATION OF GEOMETRY

In the paper an analysis of stochastically nonlinear static response of a shallow spherical shell with the middle surface of random nature is given. It has been assumed that the imperfections of geometry are rotationally-symmetrical and are described by a single random variable. The uniform inflation pressure as a load has been assumed. The analytic approximate solutions, the first and second, are derived using the small parameter method. The results of the numerical analysis of simply supported and clamped shells, compared with the discrete solution of the stochastically nonlinear problem, are presented.

POLITECHNIKA GDAŃSKA
INSTYTUT KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 czerwca 1979 r.