

## IMPULS BRZEGOWY W PLASTYCZNEJ PŁYCE PIERŚCIENIOWEJ

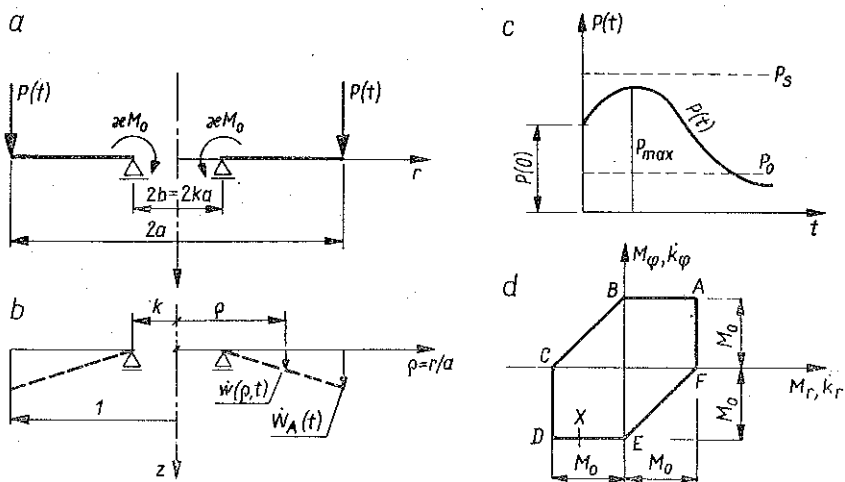
ANDRZEJ E. STAŃCZYK (WARSZAWA)

Praca zawiera studium ruchu płyt pierścieniowych, których brzeg zewnętrzny znajduje się pod działaniem dowolnie zmiennego w czasie impulsowego obciążenia poprzecznego. Przyjęto idealnie sztywno-plastyczny model materiału podlegający warunkowi Coulomba-Treski. Założono, że proces deformacji rozwija się zgodnie ze stowarzyszonym prawem płynięcia i jest ograniczony zakresem małych przemieszczeń. Analizowano płyty utwierdzone i swobodnie podparte. Przedstawiono podejście, w którym równania równowagi dynamicznej zastąpiono równaniami ruchu wynikającymi z zasad mechaniki ciał sztywnych.

Uzyskanie rozwiązania w postaci zamkniętej pozwoliło na sformułowanie ważnego prawa określającego czas przejścia konstrukcji sztywno-plastycznej w konfigurację ze stałym profilem pola prędkości, w której następuje zakończenie ruchu.

### 1. WPROWADZENIE

Obciążenie dynamiczne działające na konstrukcję sztywno-plastyczną wywołuje jej ruch wówczas, jeśli intensywność tego obciążenia przewyższa w skończonym przedziale czasu wartość obciążenia granicznego. W efekcie w konstrukcji rozwija się proces plastyczny prowadzący do trwałych deformacji. Naszym celem będzie pełny opis ruchu oraz wyznaczenia trwałych odkształceń w płytach pierścieniowych opartych na brzegu wewnętrznym. Rozpatrzmy płyty swobodnie podparte ( $\kappa=0$ ) oraz płyty utwierdzone ( $\kappa=1$ ).



Rys. 1

Na brzeg zewnętrzny działa dowolnie zmienne w czasie, osiowo symetryczne obciążenie poprzeczne  $P(t)$ .

Przyjmujemy idealnie sztywno-plastyczny materiał podlegający warunkowi Coulomba-Treski. Proces deformacji rozwija się zgodnie ze stowarzyszonym prawem płynięcia. Założymy, że granica plastyczności  $\sigma_0$  jest niewrażliwa na prędkość odkształceń plastycznych. Problem rozpatrzmy w zakresie małych ugięć.

Ścisłe rozwiązanie polega na całkowaniu równań

$$(1.1) \quad \begin{aligned} (\rho M_r)_{, \rho} - M_\phi &= \rho a T_r, \\ \rho a T_r &= -\mu a^2 \int_\rho^1 \ddot{w}(\rho, t) \rho d\rho + aP(t) \end{aligned}$$

z warunkami początkowo-brzegowymi, które są tu określone w sposób następujący:

$$(1.2) \quad w(\rho, 0) = \dot{w}(\rho, 0) = 0, \quad M_r(k, t) = -\kappa M_0, \quad M_r(1, t) = 0, \quad w(k, t) = 0.$$

Przyjęto przy tym następujące oznaczenia:  $a$ —promień zewnętrzny płyty,  $k=b/a$ —bezwymiarowy promień brzegu wewnętrznego,  $\rho=r/a$ —bezwymiarowy promień bieżący,  $\mu$ —masa odniesiona do jednostki pola powierzchni środkowej,  $\kappa$ —parameter modelujący sposób podparcia brzegu wewnętrznego ( $\kappa=0 \cup 1$ ).

Występujące w (1.1)<sub>2</sub> przyspieszenie  $\ddot{w}(\rho, t)$  wymaga, aby w pierwszej kolejności określić kształt pola prędkości. Pomocne są w tym następujące zależności między prędkościami krzywizn i prędkością ugięcia:

$$(1.3) \quad \dot{k}_r = -\frac{1}{a^2} \dot{w}_{, \rho\rho}, \quad \dot{k}_\phi = -\frac{1}{a^2 \rho} \dot{w}_{, \rho}$$

oraz stowarzyszone prawo płynięcia. Zgodnie z nim dla stanów naprężenia reprezentowanych na powierzchni granicznej (rys. 1d) punktami odcinków równoległych do osi odciętych, prędkości  $\dot{w}(\rho, t)$  są liniowymi funkcjami promienia  $\rho$ .

Zależnie od wielkości obciążenia działającego na płytę i warunków podparcia, mogą się w niej realizować różne formy ruchu. W zakresie tzw. średnich obciążeń dynamicznych forma ruchu jest jakościowo zgodna z mechanizmem odkształcania się płyty w odpowiednim zadaniu nośności granicznej. W procesie ruchu kształt pola prędkości nie ulega zmianie.

W przypadku obciążeń dużych, przyjęty model materiału prowadzi do wyodrębnienia się w płycie dwóch obszarów z różnymi równaniami prędkości ugięć. Granicą między tymi obszarami jest przemieszczający się w poziomie okrężny przegub plastyczny. W każdej chwili ruchu konfiguracja pola prędkości ulega zmianie. W tym sensie problem należy rozpatrywać w klasie zagadnień niestacjonarnych. Zgodnie ze sformułowanymi w [1] warunkami możliwych nieciągłości na ruchomej linii przegubów przyspieszenie zmienia się skokowo.

W opisie ruchu płyty będącej pod działaniem obciążeń dużych wygodnie jest operować prędkościami kątowymi płatów. Proces plastycznego odkształcania można wtedy ująć najogólniej przez wprowadzenie dwóch faz ruchu. Pierwsza

jest fazą zróżnicowanych prędkości kątowych i kończy się w chwili ich wyrównania. W drugiej fazie występuje sztywny obrót płatów względem przekroju podporowego aż do całkowitego zatrzymania się płyty.

## 2. OBCIĄŻENIA ŚREDNIE $P_0 < P_{\max} \leq P_s$

Punktem wyjścia w naszych rozważaniach jest odpowiednie zadanie statyczne nośności granicznej. Obciążenie graniczne płyty

$$(2.1) \quad P_0 = \frac{M_0}{a} \frac{1-k(1-\kappa)}{1-k}$$

jest związane z następującym rozkładem momentów zginających:

$$(2.2) \quad M_\phi = -M_0, \quad M_r = -\kappa M_0 \frac{k(1-\rho)}{\rho(1-k)}$$

Stan naprężenia jest wówczas reprezentowany przez punkt  $E$  (rys. 1d), jeśli płyta jest swobodnie podparta, lub przez punkty odcinka  $DE$  w przypadku płyty utwierdzonej. Powierzchnia deformacji ma kształt stożka ściętego.

Przy dynamicznym działaniu obciążenia, spełniającego warunek  $P_0 < P_{\max} \leq P_s$  (rys. 1c), płyta deformuje się podobnie. Elementarne płaty wyodrębnione promieniowymi liniami załomów ( $M_\phi = -M_0$ ) obracają się sztywno wokół podpory. W przekroju podporowym płyty utwierdzonej powstaje przy tym załom ujemny. Czyniąc zadość warunkom  $\dot{k}_r = 0$  i  $\dot{k}_\phi < 0$  oraz  $w(k, t) = 0$ , pole prędkości możemy przedstawić w następującej postaci:

$$(2.3) \quad \dot{w}(\rho, t) = \dot{w}_A(t) \frac{\rho-k}{1-k},$$

gdzie  $\dot{w}_A(t)$  jest nieujemną funkcją, opisującą prędkość brzegu zewnętrznego płyty. Po scałkowaniu równań (1.1) z wykorzystaniem (2.3) i brzegowych warunków naprężeniowych (1.2) oraz uwzględnieniu zależności granicznej (2.1) otrzymujemy równanie przyspieszenia

$$(2.4) \quad \ddot{w}_A(t) = \frac{12}{a} \frac{P(t) - P_0}{\mu} \frac{1}{(1-k)(3+k)},$$

które całkowane przy zerowych warunkach początkowych pozwala określić pole prędkości

$$(2.5) \quad \dot{w}(\rho, t) = \frac{12}{\mu a} \frac{\rho-k}{(3+k)(1-k)^2} [I(t) - tP_0]$$

i powierzchnię ugięcia płyty

$$(2.6) \quad w(\rho, t) = \frac{12}{\mu a} \frac{\rho-k}{(3+k)(1-k)^2} \left[ \int_0^t I(t) dt - P_0 t^2/2 \right].$$

$I(t) = \int_0^t P(t) dt$  oznacza tu całkowity impuls działający na płytę do chwili  $t$ . Z warunku  $\dot{w}(\rho, t_k) = 0$  znajdujemy czas zakończenia procesu

$$(2.7) \quad t_k = \frac{1}{P_0} \int_0^{t_k} P(t) dt = I(t_k)/P_0.$$

Maksymalne ugięcie trwałe wynosi

$$(2.8) \quad w(1, t_k) = w_A(t_k) = \frac{12}{\mu a} \frac{1}{(3+k)(1-k)} \left[ \int_0^{t_k} I(t) dt - \frac{I^2(t_k)}{2P_0} \right].$$

W przypadku obciążenia  $P(t) = P = \text{constans}$ , działającego na płytę w przeciągu czasu  $T$ , otrzymujemy odpowiednio

$$(2.9) \quad t_k = PT/P_0, \quad w_A(t_k) = \frac{6PT^2}{\mu a} \frac{P/P_0 - 1}{(3+k)(1-k)}.$$

Rozkład promieniowych momentów zginających i sił poprzecznych wynika z równań (1.1), w których należy uwzględnić  $M_\rho(\rho, t) = -M_0$ . Tak więc

$$(2.10) \quad \frac{M_r(\rho, t)}{M_0} = \left[ \frac{aP(t)}{M_0} - \frac{1-k(1-k)}{1-k} \right] \frac{\Delta(\rho)}{\rho(3+k)(1-k)} - \left[ \frac{aP(t)}{M_0} - 1 \right] \frac{1-\rho}{\rho},$$

$$\frac{aT_r(\rho, t)}{M_0} = \left\{ \frac{aP(t)}{M_0} - 2 \left[ \frac{aP(t)}{M_0} - \frac{1-k(1-k)}{1-k} \right] [2(1-\rho^3) - 3k(1-\rho^2)] \right\} \frac{1}{\rho},$$

gdzie

$$\Delta(\rho) = (1-\rho)^2 \left[ 2(2+\rho) - \frac{1-\rho^2}{1-k} \right].$$

W przypadku obciążeń średnich stan naprężenia w płycie jest reprezentowany odcinkiem  $XE$  (rys. 1d) dla płyty swobodnie podpartej lub odcinkiem  $DE$ —w płycie utwierdzonej.

Wyprowadzone powyżej wzory obowiązują do takiej intensywności  $P_s$  obciążenia, przy której w obszarze płyty pojawi się okrąg przegubów plastycznych. Promień tego okręgu oznaczmy przez  $\rho_s$ .

Warunki osiągnięcia ekstremum przez funkcję określającą moment promieniowy

$$(2.11) \quad M_r(\rho_s, t) = -M_0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial M_r}{\partial \rho}(\rho_s, t) = 0,$$

które można także zapisać w następującej postaci alternatywnej:

$$(2.11') \quad M_r(\rho_s, t) = -M_0 \quad \text{i} \quad T_r(\rho_s, t) = 0,$$

pozwalają jednoznacznie określić maksymalne obciążenie średnie  $P_s$  i promień  $\rho_s$ . Tak więc

$$(2.12) \quad P_s/P_0 = 1 + \frac{(1-k)^2(3+k)}{2[2(1-\rho_s^3) - 3k(1-\rho_s^2)] - (1-k)^2(3+k)},$$

przy czym  $\rho_s$  należy określać z równania

$$(2.13) \quad 3\rho_s^4 - 4k\rho_s^3 - k(1-k-k^2) = 0$$

w przypadku płyty swobodnie podpartej lub z równania

$$(2.14) \quad (\rho_s - k)^3 (3\rho_s + k) = 0,$$

jeśli płyta jest utwierdzona.

Dla  $k \in (0, 1)$  równanie (2.13) ma jeden pierwiastek rzeczywisty

$$(2.15) \quad \rho_s = (k/3 + B) \left[ 1 + \left( \frac{2k}{3B} - 1 \right)^{1/2} \right],$$

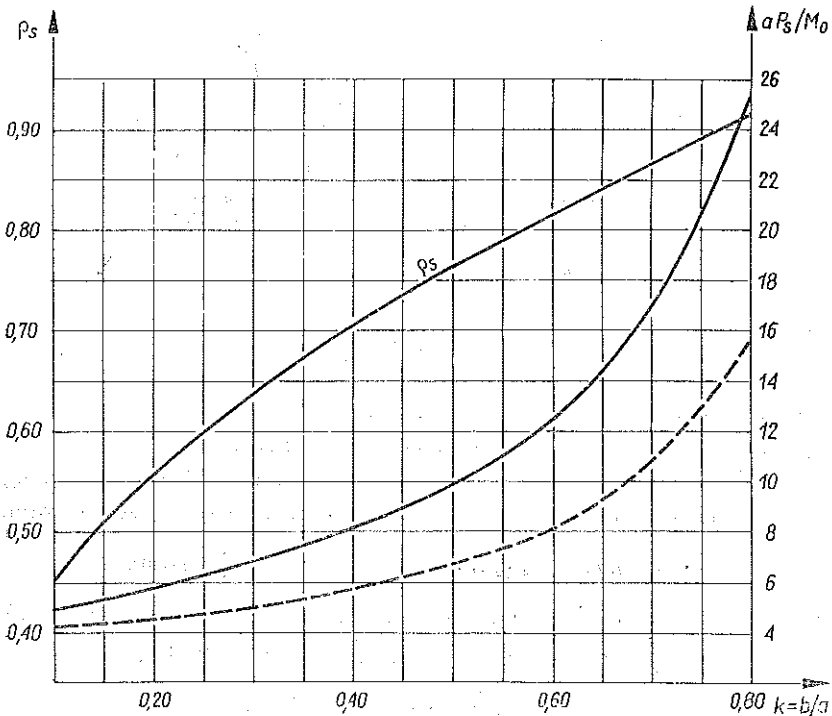
gdzie

$$A = \frac{1}{3} \sqrt[3]{k(1-k-k^2)} \left\{ \sqrt[3]{(1-k)[k(1+k)]^{1/2} + k^2} - \sqrt[3]{(1-k)[k(1+k)]^{1/2} - k^2} \right\},$$

$$B = (k^2/9 - A/2)^{1/2}.$$

W płycie utwierdzonej, jak to wynika z (2.14), moment promieniowy osiąga minimum w przekroju podporowym. Podstawiając  $\rho_s = k$  do wzoru (2.12) znajdujemy maksymalne obciążenie średnie dla tej płyty:

$$(2.16) \quad P_s = 2(2+k)P_0/(1+k).$$

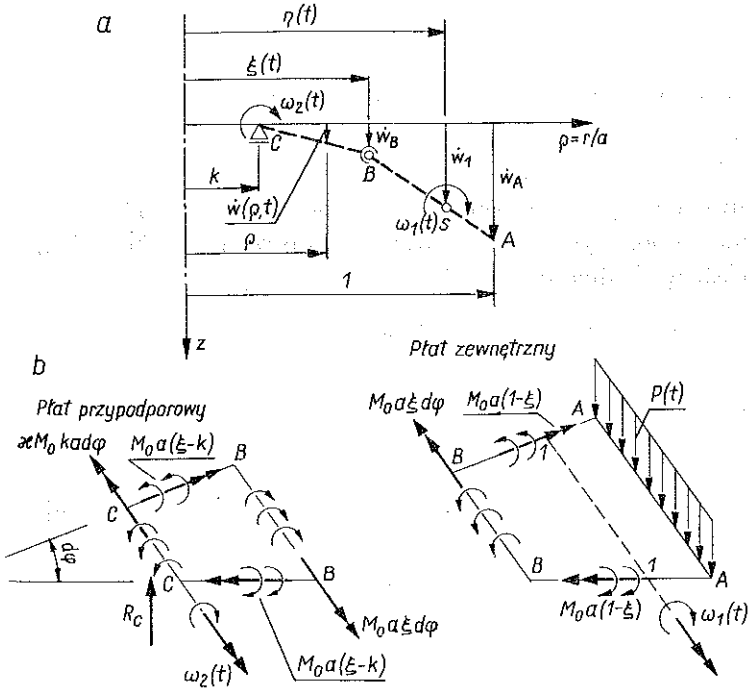


Rys. 2

Wykres pierwiastków równania (2.13) i odpowiadających im wartości stosunku  $aP_s/M_0$  dla różnych wartości parametru  $k$  pokazano na rys. 2. Liniją przerywaną naniesiono zmianę stosunku  $aP_s/M_0$  w przypadku płyty utwardzonej.

### 3. RÓWNIANIA RUCHU DLA OBCIĄŻEŃ DUŻYCH ( $P_{\max} > P_s$ )

Rozpatrywać będziemy płyty pod działaniem obciążenia typu wybuchowego, tj. określonego klasą funkcji nierosnących. Nadwyżka obciążenia ponad wartość  $P_s$  powoduje, że w chwili początkowej pojawia się w płycie okrąg przegubów plastycznych o promieniu  $\rho = \xi(0) = \xi_0$ .



Rys. 3

W procesie ruchu płyty linia przegubów  $\rho = \xi(t)$  stanowi ruchomą granicę między płatem przypodporowym  $BC$  i płatem zewnętrznym  $AB$  (rys. 3a). Do każdego z tych obszarów odnoszą się różne równania prędkości ugięć. Na okręgu przegubów występuje stan plastyczny, któremu odpowiada naroże  $D$  powierzchni granicznej:

$$(3.1) \quad M_r[\xi(t), t] = M_\theta[\xi(t), t] = -M_0, \quad T_r[\xi(t), t] = 0.$$

Stan plastyczny w płatach jest reprezentowany punktami odcinka  $DE$ . Prawo płynięcia będzie spełnione, jeśli przyjmiemy następujący rozkład prędkości poprzecznych:

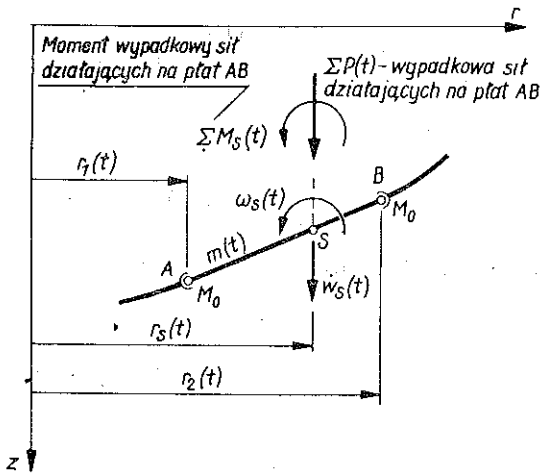
$$(3.2) \quad \dot{w}(\rho, t) = \begin{cases} a\omega_2(\rho - k), & k \leq \rho \leq \xi(t); \\ \dot{w}_1 + a\omega_1(\rho - \eta), & \xi(t) \leq \rho \leq 1. \end{cases}$$

Funkcje  $\omega_2(t)$  i  $\omega_1(t)$  opisują prędkości kątowe odpowiednich płyt,  $\dot{w}_1(t)$  jest prędkością poprzeczną środka masy płyta  $AB$ , funkcja  $\eta(t)$  określa położenie środka masy tego płyta. Na podstawie geometrycznych zależności dla trapezu

$$(3.3) \quad \eta(t) = 2(1 + \xi + \xi^2) / [3(1 + \xi)].$$

Bezpośrednia droga otrzymywania równań ruchu polega na całkowaniu równań (1.1) z wykorzystaniem zależności (3.2) przy spełnieniu naprężeniowych warunków brzegowych (1.2) i warunków (3.1) na granicy obszarów.

W [2] podano bardziej efektywny sposób zestawiania równań problemu. Z deformującej się plastycznie płyty wyodrębniono płyt trapezowy ograniczony okręgami przegubów plastycznych  $r_1(t)$  i  $r_2(t)$  oraz promieniowymi liniami załomów o elementarnym kącie rozwarcia  $\Delta\theta$ . Ruch płyta złożono z ruchu postępowego o prędkości  $\dot{w}_s(t)$  środka masy i ruchu obrotowego z prędkością  $\omega_s(t)$  względem osi przechodzącej przez środek  $S$  masy płyta.



Rys. 4

Wykorzystując zasady mechaniki ciał sztywnych oraz uwzględniając fakt, że masa płyta zmienia się w czasie (całkowita masa konstrukcji jest stała), otrzymano następujący układ równań różniczkowych:

$$(3.4) \quad \ddot{w}_s(t) + \omega_s(t) \dot{r}_s(t) = -\frac{1}{m(t)} \sum P(t),$$

$$J_s(t) \dot{\omega}_s(t) = \sum M_s(t),$$

w których wielkości

$$(3.5) \quad m(t) = \mu \Delta\theta (r_2^2 - r_1^2) / 2, \quad r_s(t) = 2(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) / [3(r_1 + r_2)],$$

$$J_s(t) = \frac{\mu \Delta\theta}{36} (r_2 - r_1)^3 (r_1^2 + 4r_1 r_2 + r_2^2) / (r_1 + r_2)$$

oznaczają odpowiednio masę płata, współrzędną środka masy oraz moment bezwładności masy względem osi przechodzącej przez środek masy. Pozostałe wielkości objaśnia rys. 4. W przypadku płatów mających stałą oś obrotu układ równań (3.4) można zredukować do równania przyspieszeń kątowych, w których wielkości  $J(t)$  i  $\sum M(t)$  należy określać względem stałej osi obrotu płata.

Forma równań uzyskanych tą drogą w istotny sposób ułatwia kinematyczną analizę procesu.

Omówioną wyżej procedurę zastosujemy do zestawienia równań ruchu w przypadku rozpatrywanych przez nas płyt. Pole prędkości ugięć i siły działające na poszczególne płaty w ustalonej chwili  $t$  pokazano na rys. 3.

Równania ruchu (3.4) przyjmują następującą postać:

dla płata  $AB$ ,  $\xi(t) \leq \rho \leq 1$

$$(3.6) \quad \ddot{w}_1 - a\omega_1 \dot{\eta} = \frac{2P(t)}{\mu a} (1 - \xi^2)^{-1},$$

$$a\dot{\omega}_1 = \left[ \frac{12P(t)}{\mu a} (1 + 2\xi) - \frac{12M_0}{\mu a^2} \frac{3(1 + \xi)}{1 - \xi} \right] / [(1 - \xi)^2 (\xi^2 + 4\xi + 1)];$$

dla płata  $BC$ ,  $k \leq \rho \leq \xi(t)$

$$(3.7) \quad a\dot{\omega}_2 = \frac{12M_0}{\mu a^2} k(1 - \kappa) / [(\xi - k)^3 (3\xi + k)].$$

Po wyeliminowaniu z równania (3.6)<sub>1</sub> funkcji  $\ddot{w}_1(t)$ , w czym pomocna jest zależność

$$(3.8) \quad \dot{w}_1 = a\omega_2 (\xi - k) + a\omega_1 (\eta - \xi),$$

otrzymujemy równanie względnej prędkości kątowej płatów:

$$(3.9) \quad a(\omega_1 - \omega_2) \dot{\xi} = \frac{6P(t)}{\mu a} \frac{1 + \xi}{(1 - \xi)(\xi^2 + 4\xi + 1)} +$$

$$- \frac{12M_0}{\mu a^2} \left[ \frac{2 + \xi}{(1 - \xi)^2 (\xi^2 + 4\xi + 1)} - \frac{k(1 - \kappa)}{(\xi - k)^2 (3\xi + k)} \right],$$

które w połączeniu z równaniami (3.6)<sub>2</sub> i (3.7) stanowi układ równań różniczkowych względem funkcji  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$  i  $\xi(t)$ , jednoznacznie opisujących ruch płyty przy niestacjonarnym polu prędkości. Równania te udało się jednokrotnie scałkować dzięki znalezieniu funkcji

$$(3.10) \quad \Delta(\xi) = \left[ 2(2 + \xi) - \frac{1 - \xi^2}{1 - k} \right] (1 - \xi)^2.$$

W rezultacie otrzymano następującą zależność między obciążeniem i prędkościami kątowymi płatów:

$$(3.11) \quad a(\omega_1 - \omega_2) \Delta(\xi) = \frac{12M_0}{\mu a^2} \left[ \frac{aI(t)}{M_0} - \frac{1 - k(1 - \kappa)}{1 - k} t \right] - a\omega_2 (1 - k)^2 (3 + k)$$



lub równoważną zależność dla prędkości okręgów charakterystycznych:

$$(3.12) \quad v_A \frac{\Delta(\xi)}{1-\xi} + v_B \frac{1-k}{\xi-k} \left[ (1-k)(3+k) - \frac{\Delta(\xi)}{1-\xi} \right] = \frac{12}{\mu a} [I(t) - tP_0].$$

Otrzymane związki odnoszą się do chwili  $t_1$ , w której prędkości kątowe płatów wyrównują się i następuje zmiana konfiguracji ruchu.

#### 4. ANALIZA RÓWNAŃ. OPIS RUCHU

##### 4.1. Faza I: $0 \leq t \leq t_1$

Równanie względem prędkości kątowej (3.9) pozwala określić początkowe i końcowe położenie okręgu przegubów. W początku ruchu mamy  $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$  i (3.9) przechodzi w następujące równanie algebraiczne względem  $\xi(0) = \xi_0$ :

$$(4.1) \quad \frac{aP(0)}{2M_0} (1-\xi_0)^2 - 2 - \xi_0 + \frac{k(1-k)(1-\xi_0)^2(\xi_0^2 + 4\xi_0 + 1)}{(\xi_0 - k)^2(3\xi_0 + k)} = 0.$$

Chcąc określić początkową wartość  $\dot{\xi}(0)$  poziomej prędkości okręgu przegubów należy zróżniczkować (3.9) względem czasu, następnie wykorzystać równania (3.6)<sub>2</sub> i (3.7) oraz warunek początkowy (4.1). Otrzymujemy wówczas wzór

$$(4.2) \quad \dot{\xi}(0) = \frac{\dot{P}(0) \cdot (1-\xi_0)^2 (\xi_0^2 + 4\xi_0 + 1)/2}{P(0) \cdot (\xi_0^3 + 6\xi_0^2 + 3\xi_0 + 2) + \frac{2M_0}{a} \left[ \frac{k(1-k)(3\xi_0 - k)}{(\xi_0 - k)^3(3\xi_0 + k)^2} (1-\xi_0)^2 (\xi_0^2 + 4\xi_0 + 1)^2 - 3 \right]}$$

Rozwojowi ruchu w pierwszej fazie towarzyszy zróżnicowanie prędkości kątowych obu płatów. W jej końcu w chwili  $t_1$  prędkości kątowe płatów wyrównują się. Płyta przechodzi do konfiguracji ze stałym, trójkątnym profilem prędkości. Okrąg przegubów zajmie wówczas położenie  $\xi(t_1) = \xi_1$ , które możemy określić z równania

$$(4.3) \quad \frac{aP(t_1)}{2M_0} (1-\xi_1)^2 - 2 - \xi_1 + \frac{k(1-k)(1-\xi_1)^2(\xi_1^2 + 4\xi_1 + 1)}{(\xi_1 - k)^2(3\xi_1 + k)} = 0,$$

jeśli tylko będziemy znali czas  $t_1$ . Otrzymany w [2] i wyprowadzony dalej wzór

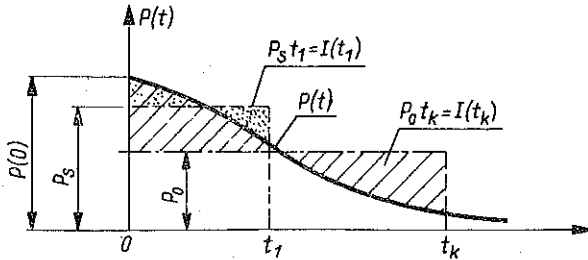
$$(4.4) \quad t_1 = I(t_1)/P_s,$$

wyraża prawo, uzależniające czas zakończenia niestacjonarnej fazy ruchu sztywno-plastycznej konstrukcji od wielkości maksymalnego obciążenia średniego i stanowi logiczne uzupełnienie znanego wzoru na całkowity czas zatrzymania się konstrukcji.

Wykorzystując (4.4) i (2.1) w równaniu (3.11) otrzymujemy wzór określający prędkość dowolnego punktu płyty w chwili przejścia do fazy ze stałym profilem prędkości:

$$(4.5) \quad \dot{w}(\rho, t_1) = \frac{12}{\mu a} \frac{I(t_1)}{(1-k)^2(3+k)} \frac{P_s - P_0}{P_s} (\rho - k).$$

Jak widać prędkość ta jest wprost proporcjonalna do wielkości impulsu działającego na płytę oraz różnicy między maksymalnym obciążeniem średnim i obciążeniem granicznym.



Rys. 5

W przypadku płyty utwierdzonej ( $\kappa=1$ ) równania ruchu ulegają uproszczeniu, dzięki czemu można uzyskać rozwiązanie w postaci zamkniętej. Z równania (3.7) wynika bowiem, że przyspieszenie kątowe płata przypodporowego  $BC$  jest równe zero, co przy zerowych warunkach początkowych prowadzi do wniosku, że w czasie pierwszej fazy ruchu płat  $BC$  nie ugina się. Prędkości krzywizn w tym obszarze są równe zero. Cały płat przypodporowy znajduje się w stanie naroża  $D$ . Rozwiązanie sprowadza się tu do wyznaczenia dwóch funkcji:  $\omega_1(t)$  i  $\xi(t)$ . Ruch płyty swobodnie podpartej opisują trzy funkcje. Dzięki zależności (3.11) lub (3.12) problem całkowania równań sprowadza się do poszukiwania dwóch funkcji. Ich wyznaczenie jest praktycznie możliwe jedynie przez całkowanie numeryczne. Takie rozwiązanie przy założeniu obciążenia w postaci impulsu prostokątnego podamy w dalszej części pracy.

Wynikający ze stanu plastycznej deformacji oraz równań (1.1), (3.6)<sub>2</sub> i (3.7) rozkład momentów zginających w płytach jest określony w sposób następujący:

Momenty obwodowe

$$(4.6) \quad M_\varphi(\rho, t) = -M_0, \quad k \leq \rho \leq 1.$$

Momenty promieniowe w obszarze płata  $BC$  ( $k \leq \rho \leq \xi(t)$ ) w płycie utwierdzonej

$$(4.7) \quad M_r(\rho, t) = -M_0;$$

w płycie swobodnie podpartej

$$(4.8) \quad \frac{M_r(\rho, t)}{M_0} = -1 + \frac{k(\xi - \rho)^2}{\rho(\xi - k)^3(3\xi + k)} [\rho^2 + 2(\xi - k)\rho - \xi(4k - 3\xi)].$$

Momenty promieniowe w obszarze płata  $AB$  ( $\xi(t) \leq \rho \leq 1$ ) dla obu przypadków podparcia można wyrazić jednym równaniem:

$$(4.9) \quad \frac{M_r(\rho, t)}{M_0} = \frac{aP(t)}{M_0} \frac{1-\rho}{\rho} \left\{ -1 + \frac{1-\rho}{(1-\xi)^2(\xi^2 + 4\xi + 1)} \times \right.$$

$$(4.9) \quad \times \left[ (1+3\xi)(1-\xi)(2+\rho) - (1+2\xi)(1-\rho^2) \right] + \frac{1-\rho}{\rho} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{1-\rho}{(1-\xi)^3(\xi^2+4\xi+1)} [3(1+\xi)(1-\rho^2) - 2(1+2\xi)(1-\xi)(2+\rho)] \right\}.$$

Łatwo sprawdzić, że równania (4.8) i (4.9) spełniają naprężeniowe warunki brzegowe i warunki (3.1) na granicy płatów.

#### 4.2. Faza II: $t_1 \leq t \leq t_k$

Począwszy od chwili  $t_1$ , płyty wchodzi w drugą fazę ruchu, która charakteryzuje się sztywnym obrotem elementarnych płatów  $AC$  względem osi przechodzącej przez podporę. Kształt płatów pozostaje taki jak w końcu pierwszej fazy. Rozwiązanie przebiega zupełnie podobnie, jak w zakresie obciążeń średnich: pole prędkości ma stały trójkątny profil. Należy całkować równanie przyspieszeń (2.4) z warunkami początkowymi wynikającymi z końca pierwszej fazy. Warto zauważyć, że dzięki uzyskaniu równania (3.11) i wynikającej z niej zależności (4.5) możemy ściśle określić prędkość w czasie drugiej fazy ruchu:

$$(4.10) \quad \dot{w}(\rho, t) = \frac{12}{\mu a} [I(t) - t(P_0)] \frac{\rho - k}{(1-k)^2(3+k)},$$

a następnie, żądając by ta prędkość była równa zeru, uzyskać zamkniętą postać wzoru na czas zakończenia procesu:

$$(4.11) \quad t_k = I(t_k)/P_0.$$

## 5. PŁYTA UTWIERDZONA

### 5.1. Dowolne obciążenie wybuchowe $P(t)$

Faza I:  $0 \leq t \leq t_1$ . Pamiętając, że w czasie pierwszej fazy ruchu  $\omega_2(t) = 0$  i wykorzystując w (3.11) związki

$$(5.1) \quad a\omega_1 = \frac{v_A(t)}{1-\xi(t)}, \quad \dot{w}(\rho, t) = v_A \frac{\rho - \xi}{1-\xi}, \quad \xi(t) \leq \rho \leq 1,$$

otrzymujemy zależność

$$(5.2) \quad v_A(1-\xi) \left[ 2(2+\xi) - \frac{1-\xi^2}{1-k} \right] = \frac{12M_0}{\mu a^2} \left[ \frac{aI(t)}{M_0} - \frac{t}{1-k} \right].$$

Poziomą prędkość okręgu przegubów wyznaczmy wykorzystując (5.1)<sub>1</sub> w równaniu (3.9) i porównując je z (5.2). Otrzymujemy stąd

$$(5.3) \quad \xi(t) = \frac{2(2+\xi) - (1-\xi^2)/(1-k)}{\xi^2 + 4\xi + 1} \frac{aP(t)(1-\xi^2)/2 - M_0(2+\xi)}{aI(t) - M_0 t/(1-k)}.$$

Całkę tego równania można znaleźć, jeśli pomnożymy je przez mianownik i podzielimy przez  $[2(2+\xi)-(1-\xi^2)/(1-k)]^2$ . Wyraża się ona następująco:

$$(5.4) \quad (1-\xi^2)/(2+\xi)=2M_0 t/[aI(t)].$$

Z równania (5.4) możemy określić położenie okręgu przegubów w dowolnej chwili procesu. Dodatni pierwiastek tego równania

$$(5.5) \quad \xi(t)=\{[2-(1-k)tP_0/I(t)]^2-3\}^{1/2}-(1-k)tP_0/I(t),$$

gdzie zgodnie z (2.1) mamy  $P_0=M_0/[a(1-k)]$ . W chwili początkowej

$$(5.6) \quad \xi(0)=\{[2-(1-k)P_0/P(0)]^2-3\}^{1/2}-(1-k)P_0/P(0).$$

Tę samą zależność otrzymalibyśmy rozwiązując równanie (4.1) dla  $\kappa=1$ . Z (5.6) wynika, że jeśli  $P(0)\rightarrow\infty$ , to  $\xi(0)\rightarrow 1$ . Nietrudno też sprawdzić, że dla  $P(0)=P_s$  otrzymujemy  $\xi(0)=k$ .

Różniczkując równanie (5.4) znajdujemy dogodniejszą niż (5.3) postać równania prędkości poziomej:

$$(5.7) \quad \dot{\xi}(t)=-\frac{2M_0}{a} \frac{(2+\xi)^2}{(2+\xi)^2-3} \frac{I(t)-tP(t)}{I^2(t)}.$$

Widać z niej, że dla obciążeń określonych funkcjami spełniającymi warunek  $I(t)>tP(t)$ , prędkość okręgu przegubów jest zawsze wielkością ujemną (ruch w stronę podpory). Nie jest też możliwe zatrzymanie się okręgu przed dojściem do podpory. W przypadku obciążeń początkowo rosnących, linia przegubów porusza się w stronę brzegu zewnętrznego do czasu  $t_z$ , który można określić z równania  $I(t_z)-t_z P(t_z)=0$ , potem przemieszcza się do podpory. Dla obciążeń impulsem prostokątnym prędkość  $\dot{\xi}(t)$  w czasie działania obciążenia jest równa zero. Ostatnia uwaga jest ogólnie poprawna w opisie ruchu belek i płyt sztywno-plastycznych. Czas  $t_1$ , w którym linia przegubów osiąga podporę, określimy z równania (5.4), wykorzystując warunek  $\xi(t_1)=k$ . Otrzymujemy wówczas wzór

$$(5.8) \quad t_1=\frac{1+k}{2(2+k)} \frac{I(t_1)}{P_0}$$

lub po wykorzystaniu (2.16)—sygnalizowane wcześniej prawo dla czasu przejścia konstrukcji w konfigurację ze stałym profilem prędkości:

$$(5.9) \quad t_1=I(t_1)/P_s.$$

Prędkość poprzeczną punktów płyty znajdujemy z pomocą wzorów (5.1), (5.2) i (5.4):

$$(5.10) \quad \dot{w}(\rho, t)=\begin{cases} 0 & , \quad k \leq \rho \leq \xi(t); \\ \frac{6I(t)}{\mu a} \frac{\rho-\xi}{(1-\xi)^2(2+\xi)}, & \xi(t) \leq \rho \leq 1. \end{cases}$$

Ugięcia można wyrazić w sposób następujący:

$$(5.11) \quad w(\rho, t) = \begin{cases} 0 & , \quad k \leq \rho \leq \xi(t); \\ \frac{6}{\mu a} \int_{t^*}^t \frac{I(t)(\rho - \xi)}{(1 - \xi)^2 (2 + \xi)} dt, & \xi(t) \leq \rho \leq \xi_0; \\ \frac{6}{\mu a} \int_0^t \frac{I(t)(\rho - \xi)}{(1 - \xi)^2 (2 + \xi)} dt, & \xi_0 \leq \rho \leq 1. \end{cases}$$

Czas  $t^*$  określa chwilę, w której okrąg przegubów przechodzi przez rozpatrywany przekrój. Możemy go określić z równania (5.4), w którym podstawimy  $\xi(t^*) = \rho$ :

$$(5.12) \quad \frac{2M_0 t^*}{aI(t^*)} = \frac{1 - \rho^2}{2 + \rho}.$$

Prędkość i ugięcia w końcu pierwszej fazy są równe odpowiednio:

$$(5.13) \quad \dot{w}(\rho, t_1) = \frac{6I(t_1)}{\mu a} \frac{\rho - k}{(1 - k)^2 (2 + k)}, \quad k \leq \rho \leq 1;$$

$$(5.14) \quad w(\rho, t_1) = \begin{cases} \frac{6}{\mu a} \int_{t^*}^{t_1} \frac{I(t)(\rho - \xi)}{(1 - \xi)^2 (2 + \xi)} dt, & k \leq \rho \leq \xi_0; \\ \frac{6}{\mu a} \int_0^{t_1} \frac{I(t)(\rho - \xi)}{(1 - \xi)^2 (2 + \xi)} dt, & \xi_0 \leq \rho \leq 1. \end{cases}$$

W końcu fazy powierzchnia ugięcia płyty składa się z formy stożkowej w obszarze  $(\xi_0, 1)$  i powierzchni zakrzywionej dla  $\rho \in (k, \xi_0)$ . Momenty zginające w I fazie ruchu są określone wzorami (4.6), (4.7) i (4.9).

*Faza II:*  $t_1 \leq t \leq t_k$ . Po dojściu do podpory okrąg przegubów nie zmienia już swego położenia. Wykorzystując wzory (2.3) i (2.4) otrzymujemy równanie przyspieszeń

$$(5.15) \quad \ddot{w}(\rho, t) = \frac{12}{\mu a} \frac{\rho - k}{(1 - k)^2 (3 + k)} [P(t) - P_0],$$

które po scałkowaniu z warunkiem początkowym (5.13) prowadzi do następującego wzoru na prędkość:

$$(5.16) \quad \dot{w}(\rho, t) = \frac{12}{\mu a} \frac{\rho - k}{(1 - k)^2 (3 + k)} [I(t) - tP_0],$$

gdzie  $I(t) = \int_0^t P(t) dt$  oznacza całkowity impuls obciążenia zewnętrznego. Z warunku  $\dot{w}(\rho, t_k) = 0$  otrzymujemy czas zakończenia procesu:

$$(5.17) \quad t_k = I(t_k) / P_0.$$

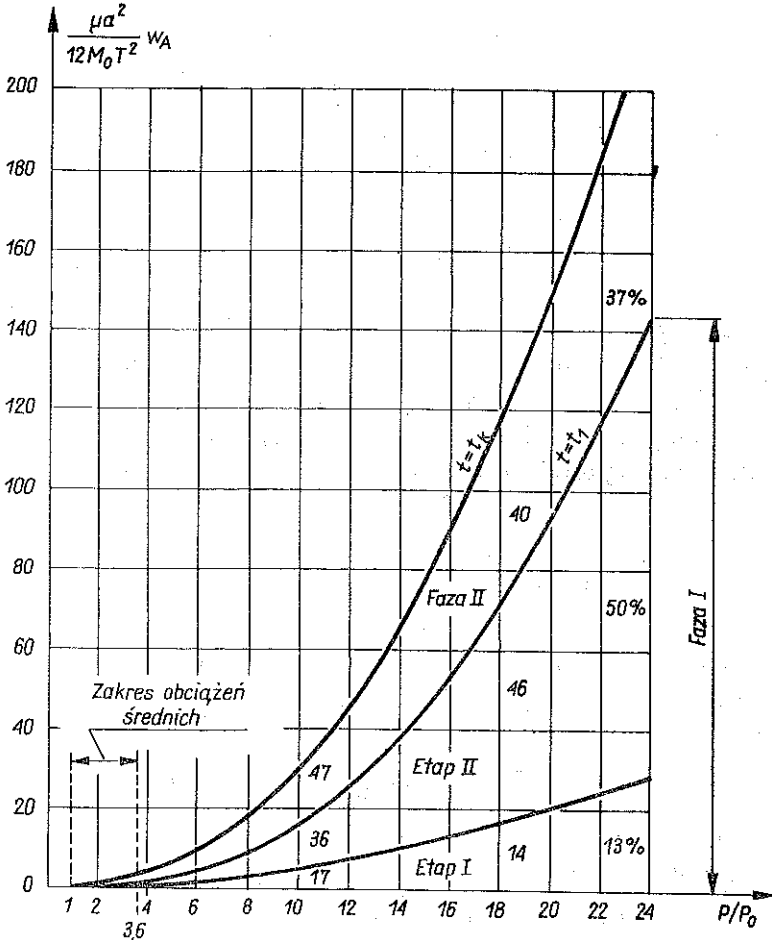
Z (5.16) i (5.14) wynika równanie powierzchni odkształconej

$$(5.18) \quad w(\rho, t) = w(\rho, t_1) + \frac{12}{\mu a} \frac{\rho - k}{(1 - k)^2 (3 + k)} \left[ \int_{t_1}^t I(t) dt - P_0 (t^2 - t_1^2) / 2 \right].$$

Maksymalne ugięcie trwałe występuje na brzegu zewnętrznym. Wyraża je następujący wzór:

$$(5.19) \quad w(1, t_k) = \frac{6}{\mu a} \int_0^{t_1} \frac{I(t)}{(1 - \xi)(2 + \xi)} dt + \frac{6}{\mu a} \frac{1}{(1 - k)(3 + k)} \times \left[ 2 \int_{t_1}^{t_k} I(t) dt + I^2(t_k) / P_s - I^2(t_k) / P_0 \right].$$

W drugiej fazie ruchu  $M_\varphi(\rho, t) = -M_0$ . Promieniowe momenty zginające są opisane przez (2.10) dla  $\kappa = 1$ .



Rys. 6

### 5.2. Impuls prostokątny

W przypadku obciążenia  $P(t) = P = \text{const.}$ , działającego w przeciągu czasu  $T$ , ruch płyty w fazie zróżnicowanych prędkości kątowych przebiega w dwóch etapach. W czasie działania obciążenia (etap I) okrąg przegubów plastycznych zajmuje stałe położenie  $\xi_0$  określone równaniem (5.7). W drugim etapie ( $T < t \leq t_1$ ) linia przegubów przemieszcza się w stronę podpory zgodnie z równaniem

$$(5.20) \quad \xi(t) = \{[2 - (1-k)tP_0/PT]^2 - 3\}^{1/2} - (1-k)tP_0/PT,$$

osiągając ją w czasie  $t_1 = PT/P_s$ . Poprzez fazę sztywnych obrotów płyta kończy ruch w chwili  $t_k = PT/P_0$ . Zgodnie z (5.19) maksymalne ugięcie trwałe

$$(5.21) \quad w(1, t_k) = \frac{3P_0 T^2}{\mu a} \frac{P/P_0}{(1-\xi_0)(2+\xi_0)} + \frac{P_0 T^2}{\mu a} \frac{(P/P_0)^2}{1-k} \times \\ \times \left[ \frac{2}{3} \ln \frac{(2+\xi_0)(1-k)}{(2+k)(1-\xi_0)} - \frac{7+2k}{2(2+k)^2} + \frac{7+2\xi_0}{2(2+\xi_0)^2} \right] + \\ + \frac{6P_0 T^2}{\mu a} \frac{1}{(1-k)(3+k)} \left[ \frac{P}{P_s} \left( \frac{P_s}{P_0} - 1 \right) \right]^2.$$

Wykres ugięć brzegu zewnętrznego w poszczególnych fazach ruchu płyty dla  $k=0,25$ , w zależności od intensywności obciążenia, pokazano na rys. 6. W miarę wzrostu obciążenia zaznacza się coraz większy wpływ etapu niestacjonarnego okręgu przegubów plastycznych.

### 5.3. Wymuszenia kinematyczne

Wynikająca z (5.10)<sub>2</sub> zależność

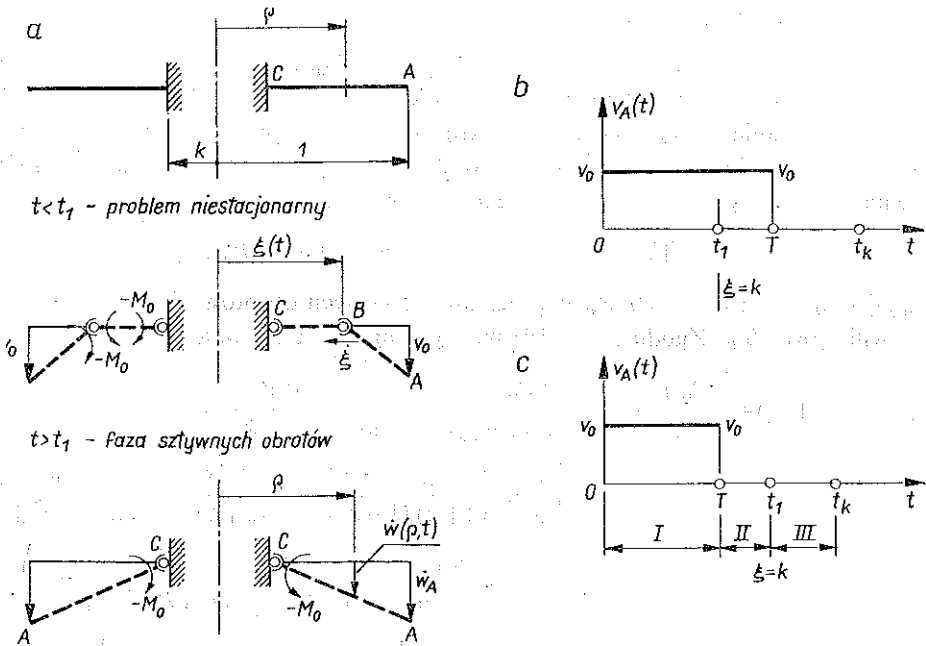
$$(5.22) \quad v_A(t)(1-\xi)(2+\xi) = \frac{6I(t)}{\mu a},$$

wiążąca prędkość brzegu płyty z impulsem obciążenia, stwarza możliwość opisanie ruchu, wywołanego dynamicznym wymuszeniem stałej prędkości  $v_0$  w obszarze wąskiego pierścienia przylegającego do brzegu zewnętrznego płyty. Przez analogiczne postępowanie przedstawiona niżej procedura może być rozszerzona na inne przypadki zmiany funkcji  $v_A(t)$ .

W chwili  $t=0$  nieskończenie blisko brzegu zewnętrznego powstaje okrąg przegubów plastycznych ( $M_r = -M_0$ ) i zaczyna przemieszczać się w stronę podpory. Przebieg rozwiązania problemu (rys. 7) zależy od relacji między czasem  $T$  trwania wymuszenia, a czasem  $t_1$  dojścia okręgu przegubów do podpory i obejmuje dwa przypadki:

1)  $T > t_1$  (rys. 7b). Prędkość pozioma  $\xi(t)$  okręgu przegubów jest opisana jednym równaniem. Po osiągnięciu podpory przez linię przegubów ( $t=t_1$ ) płyty obracają się sztywno bez udziału sił masowych do chwili  $t=T$ . Potem następuje faza zakończenia ruchu.

2) Proces wymuszania stałej prędkości  $v_0$  zostaje zakończony przed dojściem okręgu przegubów do podpory, tzn.  $T < t_1$  (rys. 7c).



Rys. 7

Przypadek pierwszy analizował G. S. SZAPIRO [3]. Rozwiązanie drugiego zagadnienia zawiera istotne różnice. Po zakończeniu procesu wymuszania prędkości  $v_0$  warunki ruchu linii przegubów ulegają zmianie. Do podpory dochodzi ona według innego równania prędkości. Rozwiązanie tego problemu przedstawimy poniżej. Ruch płyty ujmijemy w trzech fazach: faza wymuszania prędkości  $v_0$ , faza dojścia okręgu przegubów do podpory i faza zakończenia ruchu (faza stałego profilu pola prędkości).

Faza I:  $0 \leq t \leq T$ . Warunki początkowe problemu są następujące:

$$(5.23) \quad w(\rho, 0) = 0, \quad \dot{w}(\rho, 0) = \begin{cases} 0, & k \leq \rho < 1; \\ v_0, & \rho = 1. \end{cases}$$

Wykorzystując (5.22) w (5.4) otrzymujemy równanie dla funkcji  $\xi(t)$ , które w przypadku  $v_A(t) = v_0$  przyjmuje postać

$$(5.24) \quad (1 - \xi)^2 (1 + \xi) = \frac{12M_0}{\mu a^2 v_0} t.$$

Dla  $t=0$  mamy  $\xi(0) = 1$ . Pierwiastek równania (5.24) spełniający warunki problemu wyraża się wzorem

$$(5.25) \quad \xi(t) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \cos \left\{ \frac{1}{3} \left[ \arccos \left( \frac{81}{4} \frac{M_0 t}{\mu a^2 v_0} - 1 \right) - 2\pi \right] \right\}.$$

Różniczkując (5.24) znajdujemy prędkość poziomą:

$$(5.26) \quad \dot{\xi}(t) = -\frac{12M_0}{\mu a^2 v_0} [(1 - \xi)(1 + 3\xi)]^{-1}.$$



Wykorzystując (5.26) w zróżniczkowanym równaniu (5.22) możemy określić charakter obciążenia wymuszającego stałą prędkość brzegu płyty. Obciążenie to powinno zmieniać się według równania

$$(5.27) \quad P(t) = \frac{2M_0}{a} \frac{1+2\xi}{(1-\xi)(1+3\xi)}$$

Warunkiem wytworzenia się przegubów plastycznych na okręgu  $\xi_0=1$  jest oddziaływanie w chwili  $t=0$  obciążenia nieograniczenie dużego.

Ugięcia w poszczególnych obszarach płyty zostały opisane równaniami (5.11). Po wykonaniu całkowań z wykorzystaniem (5.22) i (5.26) otrzymujemy

$$(5.28) \quad w(\rho, t) = \begin{cases} 0, & k \leq \rho \leq \xi(t); \\ \frac{\mu a^2 v_0^2}{24M_0} (\rho - \xi)^2 (1 + \rho + 2\xi), & \xi(t) \leq \rho \leq 1. \end{cases}$$

Położenie  $\xi(T) = \xi_T$  okręgu przegubów w chwili zakończenia procesu wymuszania prędkości  $v_0$  można wyznaczyć z (5.25). Ugięcie brzegu zewnętrznego  $w(1, T) = v_0 T$ .

Siły wewnętrzne w płacie  $AB$  określimy z równań (1.1), w których  $P(t)$  należy przyjąć według (5.27), przyspieszenie zaś zgodnie ze wzorem

$$(5.29) \quad \ddot{w}(\rho, t) = \frac{12M_0}{\mu a^2} \frac{1-\rho}{(1-\xi)^3 (1+3\xi)}$$

W rezultacie otrzymujemy

$$(5.30) \quad \begin{aligned} M_r(\rho, t) &= -M_0 \frac{1-\rho}{\rho(1-\xi)(1+3\xi)} \left[ 1 + 2\xi + 3\xi^2 - \frac{(1-\rho)^2(1+\rho)}{(1-\xi)^2} \right], \\ T_r(\rho, t) &= \frac{2M_0}{a} \frac{1}{\rho(1-\xi)(1+3\xi)} \left[ 1 + 2\xi - \frac{(1-\rho)^2(1+2\rho)}{(1-\xi)^2} \right], \end{aligned}$$

gdzie  $\xi_T \leq \rho \leq 1$ . Na okręgu  $\rho = \xi(t)$  oraz w obszarze płata przypodporowego  $BC$  siła poprzeczna jest równa zero.

Faza II;  $T < t \leq t_1$ . W czasie pierwszej fazy płycie został dostarczony impuls

$$(5.31) \quad I(T) = \frac{\mu a v_0}{6} (1 - \xi_T) (2 + \xi_T).$$

Dalszy ruch odbywa się wyłącznie pod wpływem sił bezwładności. Z (5.7) dla  $P(t) = 0$  otrzymujemy

$$(5.32) \quad \dot{\xi}(t) = -\frac{2M_0}{aI(T)} \frac{(2+\xi)^2}{(2+\xi)^2 - 3}.$$

Na granicy faz funkcja  $\dot{\xi}(t)$  zmienia się skokowo. Zgodnie z (5.4) położenie okręgu przegubów określa równanie

$$(5.33) \quad \frac{1-\xi^2}{2+\xi} = \frac{2M_0}{a} \frac{t}{I(T)},$$

którego pierwiastek

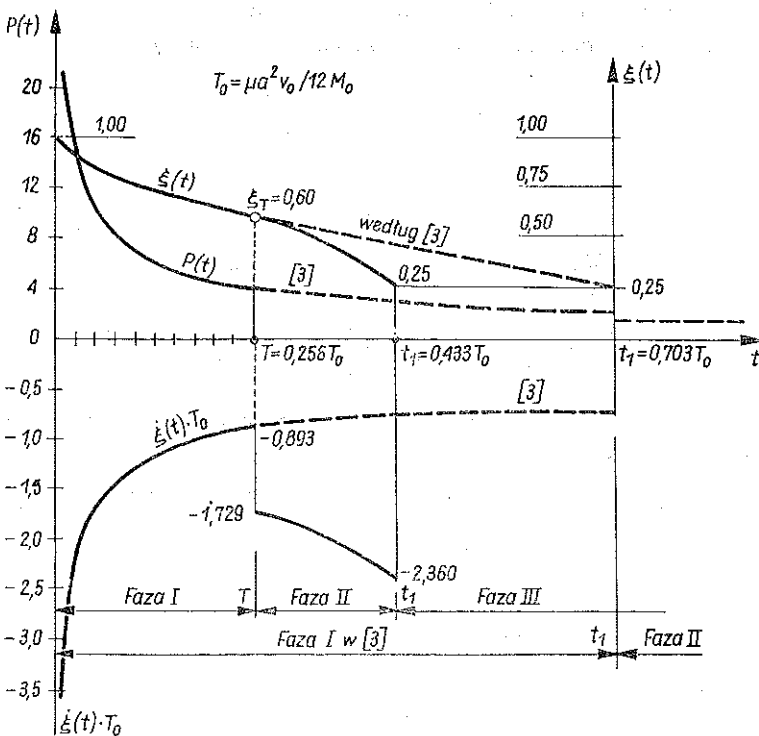
$$(5.34) \quad \xi(t) = \sqrt{\left[2 - \frac{M_0 t}{aI(T)}\right]^2 - 3} - \frac{M_0 t}{aI(T)}.$$

Z warunku  $\xi(t_1) = k$  znajdujemy czas osiągnięcia podpory:

$$(5.35) \quad t_1 = \frac{1-k^2}{2+k} \frac{aI(T)}{2M_0} = \frac{\mu a^2 v_0}{12M_0} \frac{1-k^2}{2+k} (1-\xi_T)(2+\xi_T).$$

Wynik jest zgodny z prawem (5.9).

Na rys. 8 podano przebieg zmiany obciążenia oraz wykresy prędkości poziomej i drogi dla  $k=0,25$  przy założeniu, że czas  $T$  wymuszania prędkości  $v_0$  trwał na tyle długo, aby okrąg przegubów przemieścił się do położenia  $\xi_T=0,60$ . Dla porównania liniami przerywanymi naniesiono odpowiednie wielkości, otrzymane według [3].



Rys. 8

W obu problemach początek ruchu przebiega jednakowo. Z chwilą zakończenia wymuszania prędkość pozioma okręgu przegubów gwałtownie wzrasta i do podpory dochodzi on wcześniej niż w problemie [3].

Prędkość poprzeczną punktów płyty określają równania (5.10). Całkując te równania ( $I(t)=I(T)=\text{const}$ ) i wykorzystując warunek ciągłości ugięć na granicy obu faz, ugięcia w II fazie ruchu można napisać w następujący sposób:

$$(5.36) \quad w(\rho, t) = \begin{cases} 0 & , \quad k \leq \rho \leq \xi(t); \\ \frac{3I^2(T)}{\mu M_0} \int_{\xi}^{\rho} (\rho - \xi) f(\xi) d\xi & , \quad \xi(t) \leq \rho \leq \xi_T; \\ w(\rho, T) + \frac{3I^2(T)}{\mu M_0} \int_{\xi}^{\xi_T} (\rho - \xi) f(\xi) d\xi, & \xi_T \leq \rho \leq 1, \end{cases}$$

gdzie funkcja

$$f(\xi) = \frac{\xi^2 + 4\xi + 1}{(1 - \xi)^2 (2 + \xi)^3}.$$

Ugięcia w końcu II fazy są równe odpowiednio:

w obszarze  $k \leq \rho \leq \xi_T$

$$(5.37) \quad w(\rho, t_1) = \frac{3I^2(T)}{\mu M_0} \left\{ 2 \ln \frac{(1-k)(2+\rho)}{(2+k)(1-\rho)} - 2 \frac{\rho-k}{1-k} - \frac{(\rho-k)(1+2\rho)}{(2+k)(2+\rho)} + \right. \\ \left. - \frac{3}{2} (2+\rho) [(2+k)^{-2} - (2+\rho)^{-2}] \right\};$$

w obszarze  $\xi_T \leq \rho \leq 1$

$$(5.38) \quad w(\rho, t_1) = w(\rho, T) + \frac{3I^2(T)}{\mu M_0} \left\{ 2 \ln \frac{(1-k)(2+\xi_T)}{(2+k)(1-\xi_T)} - 2 \frac{(1-\rho)(\xi_T-k)}{(1-\xi_T)(1-k)} + \right. \\ \left. - \frac{(1+2\rho)(\xi_T-k)}{(2+k)(2+\xi_T)} - \frac{3}{2} (2+\rho) [(2+k)^{-2} - (2+\xi_T)^{-2}] \right\}.$$

Z (5.38) otrzymujemy ugięcie brzegu zewnętrznego:

$$(5.39) \quad w(1, t_1) = v_0 T + \frac{3I^2(T)}{\mu M_0} \left\{ 2 \ln \frac{(1-k)(2+\xi_T)}{(2+k)(1-\xi_T)} + \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \left[ \frac{7+2k}{(2+k)^2} - \frac{7+2\xi_T}{(2+\xi_T)^2} \right] \right\}.$$

Momenty zginające w poszczególnych obszarach płyty w II fazie ruchu wynikają z (4.6), (4.7) i (4.9) dla  $P(t)=0$  oraz  $\xi(t)$  według (5.34) i określone są następująco:

płat AB;  $\xi(t) \leq \rho \leq 1$

$$(5.40) \quad M_r(\rho, t) = M_0 \frac{1-\rho}{\rho} \left\{ 1 + \frac{1-\rho}{(1-\xi)^3 (\xi^2 + 4\xi + 1)} \times \right. \\ \left. \times [3(1+\xi)(1-\rho^2) - 2(1+2\xi)(1-\xi)(2+\rho)] \right\};$$

płat BC,  $k \leq \rho \leq \xi(t)$

$$(5.41) \quad M_\varphi(\rho, t) = M_r(\rho, t) = -M_0.$$

Faza III:  $t_1 \leq t \leq t_k$ . Płyta kończy ruch z przyspieszeniem określonym przez równanie (5.15). Całka tego równania przyjmuje w tym przypadku postać

$$(5.42) \quad \dot{w}(\rho, t) = \frac{\rho - k}{(1 - k)^2 (3 + k)} \left[ 2v_0 (1 - \xi_T) (2 + \xi_T) - \frac{12M_0}{\mu a^2} \frac{t}{1 - k} \right].$$

Czas zakończenia ruchu

$$(5.43) \quad t_k = \frac{\mu a^2 v_0}{6M_0} (1 - k) (1 - \xi_T) (2 + \xi_T) = I(T)/P_0.$$

Całkując (5.42) otrzymujemy ugięcie

$$(5.44) \quad w(\rho, t) = w(\rho, t_1) + \frac{\rho - k}{(1 - k)^2 (3 + k)} \left[ 2v_0 (1 - \xi_T) (2 + \xi_T) + \right. \\ \left. - \frac{6M_0}{\mu a^2} \frac{t + t_1}{1 - k} \right] (t - t_1).$$

Funkcja  $w(\rho, t_1)$  jest określona zależnie od obszaru równaniami (5.37) lub (5.38). Końcowa powierzchnia ugięć

$$(5.45) \quad w(\rho, t_k) = w(\rho, t_1) + \frac{3}{2} \frac{I^2(T)}{\mu M_0} \frac{(\rho - k)(3 + k)}{(1 - k)(2 + k)^2}.$$

Dla  $\rho = 1$  otrzymujemy maksymalne ugięcie trwałe:

$$(5.46) \quad w(1, t_k) = w(1, t_1) + \frac{\mu a^2}{24M_0} \frac{(3 + k)(1 - \xi_T)^2 (2 + \xi_T)^2}{(2 + k)^2}.$$

Ugięcie  $w(1, t_1)$  jest określone przez (5.39). Począwszy od chwili  $t_1$  w przekroju podporowym pojawia się nieciągłość w kącie nachylenia normalnej do przekroju, aby w momencie zatrzymania się płyty osiągnąć wartość

$$(5.47) \quad \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \rho}(k, t_k) = \frac{3}{2} \frac{I^2(T)}{\mu a M_0} \frac{3 + k}{(1 - k)(2 + k)^2}.$$

Siły wewnętrzne w trzeciej fazie ruchu wynikają z (2.10) dla  $\kappa = 1$ . W szczególności dla  $T = t_1$  i  $\xi_T = k$ , czyli po wyeliminowaniu II fazy; rezultaty pokrywają się z rozwiązaniem [3].

## 6. PŁYTA SWOBODNIE PODPARTA. PROSTOKĄTNY IMPULS CIŚNIENIA

W punktach 3 i 4 zestawiono równania ruchu i podano wszystkie uwarunkowania, które to związki dla  $\kappa = 0$  opisują proces deformacji płyty swobodnie podpartej, będącej pod działaniem obciążenia określonego nierosnącą funkcją  $P(t)$ . W szczególnym przypadku tego obciążenia, tj. dla impulsu prostokątnego, początkowa prędkość pozioma okręgu przegubów, jak wynika z (4.2), jest równa zero. W czasie  $T$  działania obciążenia (I etap ruchu), okrąg przegubów jest stacjonarny, zajmując położenie  $\xi_0$  określone równaniem (4.1). Wartości  $\xi_0$  w zależności od stosunku  $P/P_0$  i parametru  $k$  zestawiono w tabelicy 1.

Tablica 1, Początkowe  $\xi_0$  i końcowe  $\xi_1$  położenie okręgu przegubów plastycznych

$k=b/a$	$\xi_0$					$\xi_1$
	$P/P_0$					
	8	12	16	20	24	
0,10	0,612463	0,740632	0,806818	0,846281	0,872263	0,314255
0,20	0,636816	0,745588	0,808431	0,846986	0,872762	0,428875
0,30	0,666555	0,753378	0,811056	0,848131	0,873355	0,521499
0,40		0,765668	0,815543	0,850112	0,874378	0,603297
0,50		0,784541	0,823522	0,853796	0,876298	0,678330
0,60			0,837800	0,861130	0,880280	0,748600

Forma ugięcia płyty składa się z dwóch powierzchni stożkowych. Można ją opisać funkcjami  $w_A(t)$  i  $w_B(t)$  wyrażającymi ugięcia okręgów charakterystycznych płyty (rys. 3a). W tym celu należy wykorzystać wzory

$$(6.1) \quad a\omega_1(t) = (\dot{w}_A - \dot{w}_B)/(1 - \xi_0), \quad a\omega_2(t) = \dot{w}_B/(\xi_0 - k)$$

w równaniach (3.6)<sub>2</sub> i (3.7) oraz określić przyspieszenia poprzeczne tych okręgów:

$$(6.2) \quad \frac{\mu a^2}{12M_0} \ddot{w}_A = \ddot{W}_A = \left[ \frac{P}{2P_0} (1 + 3\xi_0) - \frac{1 + 2\xi_0}{1 - \xi_0} \right] \frac{1}{(1 - \xi_0)(\xi_0^2 + 4\xi_0 + 1)},$$

$$\frac{\mu a^2}{12M_0} \ddot{w}_B = \ddot{W}_B = \frac{k}{(\xi_0 - k)^2 (3\xi_0 + k)}.$$

Po dwukrotnym całkowaniu (6.2) z zerowymi warunkami początkowymi otrzymujemy poszukiwane funkcje ugięć:

$$(6.3) \quad \frac{\mu a^2}{12M_0} w_A(t) = \ddot{W}_A t^2/2, \quad \frac{\mu a^2}{12M_0} w_B(t) = \ddot{W}_B t^2/2.$$

W czasie trwania obciążenia względna prędkość kątowa płatów  $\omega(t) = \omega_1 - \omega_2$  jest liniową funkcją czasu. W chwili  $T$ , zgodnie z (3.11), osiąga wartość określoną wzorem

$$(6.4) \quad \frac{\mu a^3}{12M_0 T} \omega(T) = \left[ \frac{P}{P_0} - 1 - \frac{k(1-k)^2(3+k)}{(\xi_0 - k)^3(3\xi_0 + k)} \right] \frac{1}{\Delta(\xi_0)}.$$

Po usunięciu obciążenia (etap II) okrąg przegubów przemieszcza się w stronę podpory, odkształcając plastycznie płat  $BC$ . Względna prędkość kątowa płatów i prędkość pozioma okręgu przegubów zmieniają się według funkcji

$$(6.5) \quad \frac{\mu a^3}{12M_0} \omega^\xi = - \left[ \frac{2 + \xi}{(1 - \xi)^2 (\xi^2 + 4\xi + 1)} - \frac{k}{(\xi - k)^2 (3\xi + k)} \right],$$

$$\frac{\mu a^3}{12M_0} \dot{\omega} = - \left[ \frac{3(1 + \xi)}{(1 - \xi)^3 (\xi^2 + 4\xi + 1)} - \frac{k}{(\xi - k)^3 (3\xi + k)} \right].$$

W chwili  $t_1$  wyrównania się prędkości kątowych płatów okrąg przegubów zajmuje końcowe położenie  $\xi_1$  określone przez (4.3) dla  $P(t_1)=0$ . Uzyskane numerycznie pierwiastki  $\xi_1$  dla kilku wartości parametru  $k$  zestawiono w tabelicy 1.

Układ równań (6.5) nie zawiera jawnie występującej zmiennej czasu i w związku z tym może być scałkowany przez rozdzielenie zmiennych:

$$(6.6) \quad \omega(t) = \omega(T) \exp \int_{\xi_0}^{\xi} \times \\ \times \frac{3(1+\xi)(3\xi+k)(\xi-k)^3 + k(1-\xi)^3(\xi^2+4\xi+1)}{(\xi-k)(1-\xi)[(2+\xi)(\xi-k)^2(3\xi+k) - k(1-\xi)^2(\xi^2+4\xi+1)]} d\xi.$$

Całka (6.6) i zależność (3.11) pozwalają określić prędkości kątowe poszczególnych płatów płyty. Niedogodność tego podejścia wiąże się z obliczaniem występującej w (6.6) całki. W mianowniku funkcji podcałkowej występuje trudny do ogólnego rozłożenia na czynniki proste wielomian czwartego stopnia, zawierający parametr  $k$ . Tym niemniej dla ustalonego  $k$  takie rozłożenie jest zawsze możliwe, gdyż dla  $k \in (0, 1)$  wielomian ma dwa rzeczywiste miejsca zerowe. Jedno z nich jest ujemne, drugie zaś spełniające warunki zadania, to scharakteryzowane wcześniej  $\xi_1$ .

Przy ograniczeniu analizy do poszukiwania maksymalnego ugięcia trwałego, praktycznie bardziej wygodną metodą jest bezpośrednie numeryczne całkowanie równań ruchu. Przekształcając je tak, by zawierały prędkości okręgów charakterystycznych, a następnie eliminując z pomocą (3.12) funkcję  $\dot{w}_B(t)$ , ruch płyty w czasie  $T < t \leq t_1$  możemy opisać następującym układem równań różniczkowych:

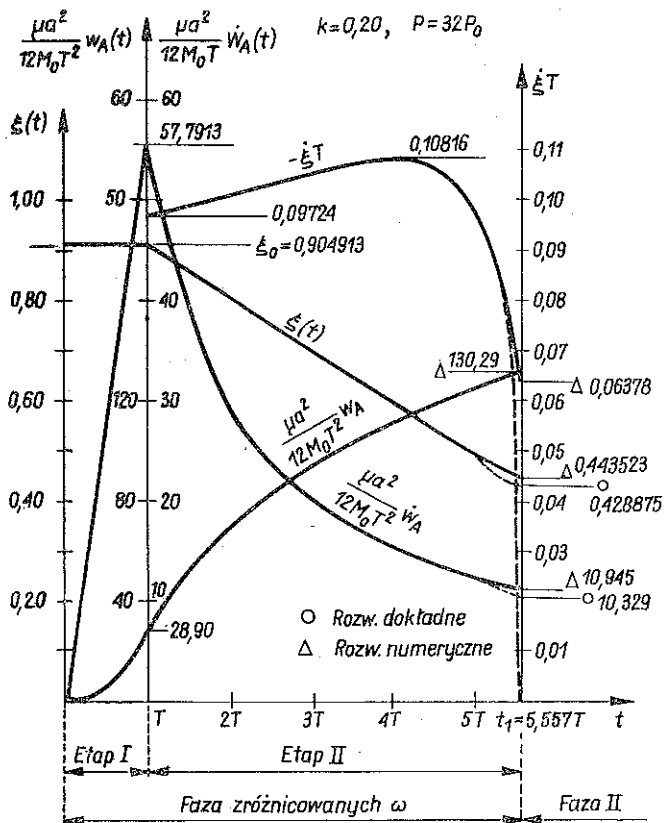
$$(6.7) \quad \begin{aligned} \frac{\mu a^2}{12M_0} \ddot{w}_A(t) &= \frac{(1+2\xi)}{(1-\xi)^2(\xi^2+4\xi+1)}, \\ \xi(t) &= \frac{\left[ \frac{2+\xi}{(1-\xi)(\xi^2+4\xi+1)} - \frac{k(1-\xi)}{(\xi-k)^2(3\xi+k)} \right] \left[ \frac{\Delta(\xi)}{1-\xi} - (1-k)(3+k) \right]}{\frac{aPT}{M_0} - t - \frac{\mu a^2}{12M_0}(1-k)(3+k)\dot{w}_A(t)}. \end{aligned}$$

Warunki początkowe wynikają z końca pierwszego etapu i mogą być określone z (6.3). Dla przykładu na rys. 9 pokazano wynik całkowania numerycznego równań (6.7) dla  $k=0,20$  i obciążenia  $P=32P_0$ . Zastosowano procedurę Rungego-Kutty-Gilla czwartego rzędu wprowadzając krok  $\Delta t = (t_1 - T)/50$ .

W otoczeniu punktu  $\xi_1$ , dla którego równanie (6.7)<sub>2</sub> ma osobliwość typu 0/0, propaguje się błąd rozwiązania. W stosunku do dokładnej wartości prędkości brzegu płyty

$$(6.8) \quad \frac{\mu a^2}{12M_0} \dot{w}_A(t_1) = \frac{PT}{P_0} \left( 1 - \frac{P_0}{P_s} \right) \frac{1}{(1-k)(3+k)},$$

otrzymanej z pomocą (4.5), błąd wynosi 6%. Wpływ błędu na ugięcie jest znikomy z uwagi na rzeczywisty (linia przerywana), prawie pionowy spadek do zera wartości funkcji  $\xi(t)$ .



Rys. 9

Po wyrównaniu się prędkości kątowych płatów płyta wchodzi w fazę zakończenia ruchu ( $t_1 \leq t \leq t_k$ ). Zgodnie z (4.8) prędkość w tej fazie

$$(6.9) \quad \frac{\mu a^2}{12M_0} \dot{w}(\rho, t) = \left( \frac{PT}{P_0} - t \right) \frac{\rho - k}{(1-k)^2 (3+k)}$$

Całkując to równanie z uwzględnieniem ciągłości na granicy faz, otrzymujemy ugięcie

$$(6.10) \quad w(\rho, t) = w(\rho, t_1) + \frac{12M_0}{\mu a^2} \left( \frac{PT}{P_0} - \frac{t+t_1}{2} \right) \frac{(t-t_1)(\rho-k)}{(1-k)^2 (3+k)}$$

gdzie, zgodnie z (4.4),  $t_1 = PT/P_s$ . Płyta kończy ruch w chwili  $t_k = PT/P_0$ . Przyrost ugięcia związany z końcową fazą ruchu wynosi

$$(6.11) \quad w(\rho, t_k) - w(\rho, t_1) = \frac{\rho - k}{2(3+k)(1-k)^2} \left[ \frac{PT}{P_s} \left( \frac{P_s}{P_0} - 1 \right) \right]^2$$

Maksymalne ugięcie końcowe płyty można określić następująco:

$$(6.12) \quad \frac{\mu a^2}{12M_0 T^2} w_A(t_k) = \frac{1}{2} \dot{W}_A + \Delta W_A^{II} + \frac{1}{2(1-k)(2+k)} \left[ \frac{P}{P_s} \left( \frac{P_s}{P_0} - 1 \right) \right]^2$$

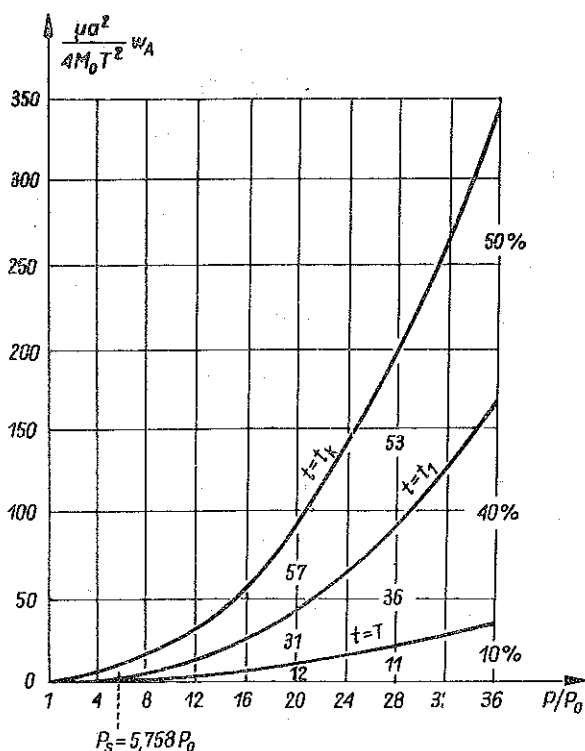
gdzie wyraz

$$(6.13) \quad \Delta W_A^H = \dot{W}_A \left( \frac{P}{P_s} - 1 \right) - \frac{1}{T^2} \int_T^{t_1} dt \int_T^t \frac{1+2\xi}{(1-\xi)^2 (\xi^2 + 4\xi + 1)} dt$$

oznacza przyrost ugięcia związany z etapem niestacjonarnej linii przegubów plastycznych.  $\dot{W}_A$  jest określone przez (6.2)<sub>1</sub>.

Wykres maksymalnych ugięć trwałych oraz przyrosty ugięć w poszczególnych fazach w zależności od intensywności obciążenia przedstawiono na rys. 10. Przyjęto  $k=0,20$ .

Podobnie, jak w przypadku płyty utwierdzonej, zwraca uwagę duży wpływ etapu niestacjonarnego okręgu przegubów na wielkość ugięcia końcowego.



Rys. 10

## 7. UWAGI KOŃCOWE

Podstawową korzyścią z zastosowanej w pracy metody, opartej na wykorzystaniu równań (3.4) ruchu płytów trapezowych z uwzględnieniem zmienności ich obszarów, jest czytelność związków wynikowych ułatwiająca kinematyczną analizę procesu deformacji. Możliwość zastosowania takiej metody jest uwarunkowana znajomością rozkładu obwodowych momentów zginających.



Ruch płyt plastycznych pod wpływem dużych obciążeń impulsowych można ująć ogólnie w dwóch zasadniczych fazach. Dla pierwszej z nich równaniem fundamentalnym jest równanie względnej prędkości kątovej płatów, pozwalające ściśle określić początkowe i końcowe położenie okręgu przegubów plastycznych. Dzięki scałkowaniu tego równania do postaci (3.11), otrzymano dla chwili przejścia w drugą fazę, ogólnie obowiązująca prawidłowość, określającą wyrównaną prędkość kątową jako wielkość proporcjonalną do różnicy  $I(t_1) - t_1 P_0$ . W rozwiązaniach numerycznych informacja ta może być pomocna w ocenie efektywności przyjętej metody całkowania. Sama druga faza, w której płyta kończy ruch przez sztywny, opóźniany obrót płatów, nie nastęrcza już żadnych trudności rachunkowych.

Poszukując rozwiązań wprowadzono założenie ograniczające obciążenie  $P(t)$  tak, aby było określone funkcjami nierosnącymi. Dla obciążeń początkowo wzrastających, jak wykazano przy dyskusji równania (5.7), funkcja  $\xi(t)$  zmienia znak. Fakt ten utrudnia matematyczny opis kształtu deformowanej plastycznie powierzchni, nie ma jednak jakościowego wpływu na ugięcie brzegu płyty, gdyż leży on poza zasięgiem ruchu linii przegubów. Stąd wyprowadzone w pracy wzory na wielkość maksymalnego ugięcia końcowego są także poprawne dla obciążeń początkowo wzrastających, jeśli tylko jest spełniony warunek  $P(0) \geq P_s$ .

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. G. HOPKINS, W. PRAGER, *On the dynamic of plastic circular plates*, ZAMP, 5, 4, 317-330, 1954.
2. D. NIEPOSTYN, A. STAŃCZYK, *Impulsowe obciążenie plastycznej płyty pierścieniowej opartej na brzegu zewnętrznym, Część I. Impuls ciśnienia*, Biul. WAT, 10, 326, 1977.
3. Г. С. Шапиро, *Удар по кольцевой жестко-пластической пластинке*, П.М.М., 23, 1, 234-241, 1959.

#### Резюме

#### КРАЕВОЙ ИМПУЛЬС В ПЛАСТИЧЕСКОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛИТЕ

Работа содержит исследование движения кольцевых плит, внешний край которых находится под действием произвольно переменной во времени импульсной поперечной нагрузки. Принята идеально жесткопластическая модель материала, подлежащего условию Кулона-Треска. Предположено, что процесс деформации развивается согласно ассоциированному закону течения и ограничен областью малых перемещений. Анализируются закрепленные и свободно подпертые плиты. Представлен подход, в котором уравнения динамического равновесия заменены уравнениями движения, вытекающими из принципов механики жестких тел.

Получение уравнения в замкнутом виде позволило сформулировать важный закон определяющий время перехода жестко-пластической конструкции в конфигурацию с постоянным профилем поля скоростей, в которой заканчивается движение.

## SUMMARY

## BOUNDARY PULSE IN A PLASTIC ANNULAR PLATE

The paper presents a study of the motion of annular plates with external boundaries exposed to the action of a transversal load pulse being an arbitrary function of time. A perfect rigid-plastic model of material satisfying the Coulomb-Tresca condition is assumed. The deformation process is assumed to obey the associated flow rule and remains bounded by the small deformation range. Plates with clamped and simply supported edges are analyzed. An approach is presented in which the dynamic equilibrium equations are replaced by the equations of motion following from the principles of rigid body mechanics. The closed-form solution obtained enabled the formulation of an important law determining the time of transition of the rigid-plastic structure into a configuration with a constant velocity profile, in which the motion is terminated.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 26 czerwca 1981 r.*