

LINIOWA ANALIZA DYNAMIKI KONSTRUKCJI OSIOWOSYMETRYCZNYCH PODDANYCH DOWOLNYM OBCIĄŻENIOM METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

MICHAŁ KLEIBER i TRAN DUONG HIEN (WARSZAWA)

Przedstawiono podstawy numerycznej analizy złożonych konstrukcji osiowosymetrycznych poddanych dowolnym obciążeniom. Analizę przeprowadzono za pomocą półanalitycznej metody elementów skończonych w ramach modelu liniowego materiału ortotropowego z uwzględnieniem czterech typów elementów.

Całkowania równań ruchu dokonano alternatywnie metodami superpozycji modalnej i całkowania bezpośredniego. Wszystkie zamieszczone w pracy przykłady policzono stosując program DYNAX-L napisany w języku FORTRAN-IV.

1. WSTĘP

W pracy przedstawiono podstawy numerycznej analizy złożonych konstrukcji osiowosymetrycznych poddanych dowolnemu, niekoniecznie osiowosymetrycznemu, obciążeniu typu statycznego lub dynamicznego. Założono, że analizę przeprowadzać się będzie w ramach modelu liniowego (ortotropowy materiał liniowo-sprężysty, małe przemieszczenia). W analizie uwzględniono cztery typy osiowosymetrycznych elementów skończonych: toroidalne elementy o radialnych przekrojach trójkątnym i czworokątnym, toroidalne elementy pośrednie oraz element cienkiej powłoki w kształcie stożka ściętego. Modelując rozpatrywany układ rzeczywisty, elementy te można dowolnie łączyć ze sobą. Dobór elementów umożliwia analizę skomplikowanych problemów inżynierskich takich jak badanie drgań własnych i wymuszonych w różnorodnych konstrukcjach czy też badanie współdziałania takich konstrukcji z podłożem w warunkach złożonych obciążeń dynamicznych.

Praca stanowi pierwszy etap badań kontynuowanych obecnie w kierunku uwzględnienia dużych deformacji oraz niesprężystego modelu materiału. Skomplikowane zagadnienia drgań nieliniowych, będące ostatecznym celem badań, wpłynęły na wybór względnie prostych elementów skończonych. Elementy te przyjęto kierując się potrzebą maksymalnej oszczędności pamięci komputera w aspekcie dalszych planów rozbudowy programu. Uwzględnienie bardziej złożonych elementów skończonych (np. powłokowych w postaci opisanej w [4]) nie powinno przedstawiać żadnych formalnych trudności. Przedstawiony poniżej opis rozpatrywanego zagadnienia wzorowany jest w dużej mierze na pierwszej z opublikowanych prac dotyczących zagadnień osiowosymetrycznych, tj. na pracy [10]. W pracy omówiono jedynie podstawowe elementy teorii wykorzystanej przy opracowywaniu programu nume-

rycznego. Pełny opis programu DYNAX-L zawarty jest w pracy [11], w której podano m.in. kompletne definicje wszystkich macierzy wykorzystanych w programie oraz dokładny opis zastosowanych algorytmów całkowania równań ruchu.

Aby umożliwić analizę z niesymetrycznym (względem osi symetrii konstrukcji) obciążeniem zewnętrznym, zastosowano w pracy koncepcję rozwinięcia poszczególnych funkcji w szeregi Fouriera. Dla stałych (wzdłuż obwodu) własności materiału i grubości konstrukcji prowadzi to do rozprzężenia się poszczególnych wyrazów rozwinięcia. Całkowania równań ruchu dokonuje się alternatywnie dwiema metodami: tzw. metodą całkowania bezpośredniego θ -Wilsona i metodą superpozycji modalnej.

2. RÓWNIANIE RÓŻNICZKOWE RUCHU

Równania ruchu otrzymano w pracy z całkowitej zasady wariacyjnej (zasady Hamiltona), wyprowadzonej wprost z zasady prac wirtualnych dla zagadnień dynamicznych [3]. Zasada ta prowadzi do równań Lagrange'a postaci

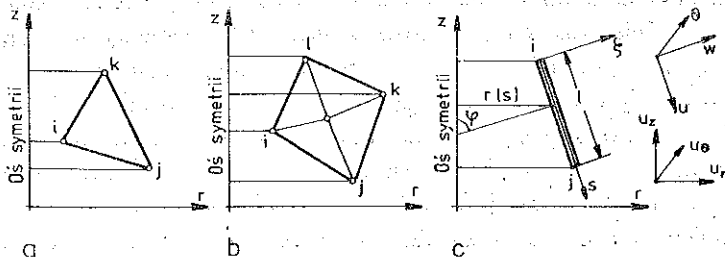
$$(2.1) \quad \frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) = 0, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

gdzie

$$(2.2) \quad L = T - E - \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{t} d(\partial\Omega) - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega,$$

Ω i $\partial\Omega$ oznaczają odpowiednio rozpatrywany obszar i jego brzeg, \mathbf{t} jest wektorem obciążeń brzegu ciała, \mathbf{b} wektorem sił masowych, T i E przedstawiają energię kinetyczną oraz energię odkształceń sprężystych układu, r_i jest i -tą współrzędną uogólnioną, \mathbf{u} wektorem przemieszczeń, m liczbą stopni swobody. Do znalezienia jawnej postaci równań ruchu należy więc podać jawne zależności od zmiennych r_i funkcji reprezentujących energię kinetyczną, energię odkształceń sprężystych oraz pracę sił zewnętrznych.

Zakładamy, że ciało osiowosymetryczne podzielone zostaje na toroidalne elementy o radialnych przekrojach trójkątnym oraz czworokątnym (rys. 1a, b). Elementy w kształcie dowolnego czworokąta tworzone są jako superelementy złożone z czterech elementów trójkątnych (por. [11]). Powłokę osiowosymetryczną idealizować będziemy za pomocą elementów będących stożkami ściętymi (rys. 1c). Ze względu na charakter rozpatrywanego problemu punkty i, j, k, l , nazywać będziemy węzłami elementów skończonych.



Rys. 1. Elementy skończone

Rozwińmy składowe stanu przemieszczenia w szeregi Fouriera względem kąta θ w następujący sposób:

$$(2.3) \quad \mathbf{u} = \sum_{n=0}^N \beta_n \boldsymbol{\theta}_n \mathbf{u}_n,$$

gdzie

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, z, \theta),$$

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_n(r, z)$$

dla ciał oraz

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(s, \theta),$$

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_n(s)$$

dla powłok;

$$\boldsymbol{\theta}_n = \boldsymbol{\theta}_n(\cos n\theta, \sin n\theta),$$

$$\beta_0 = \frac{1}{2}, \quad \beta_n = 1 \quad \text{dla } n \neq 0$$

oraz gdzie N oznacza liczbę wyrazów rozwinięcia.

Za współrzędne uogólnione przyjęto:

w przypadku elementów ciała przemieszczenia u_r^w, u_z^w, u_θ^w w każdym z trzech (lub czterech) węzłów i, j, k (rys. 1a) lub i, j, k, l (rys. 1b);

w przypadku elementu powłoki przemieszczenia u^w, w^w, v^w oraz obroty $\partial w^w / \partial s$ węzłów i, j (rys. 1c).

Wprowadzając funkcje kształtu $f(r, z)$ dla ciał i $f(s)$ dla powłok, za pomocą których wyrażać można uogólnione przemieszczenia \mathbf{u}_n dowolnego punktu w elemencie jako funkcji uogólnionych przemieszczeń węzłów \mathbf{u}_n^w , otrzymamy [11]

$$(2.4) \quad \mathbf{u} = \sum_{n=0}^N \mathbf{G}_n \mathbf{u}_n^w,$$

gdzie $\mathbf{G}_n = \mathbf{G}_n(r, z, \theta)$ dla ciał i $\mathbf{G}_n = \mathbf{G}_n(s, \theta)$ dla powłok.

Z (2.4) wynika, że w przypadku analizy ciał liniowe równania geometryczne mają postać

$$(2.5) \quad \boldsymbol{\epsilon}(r, z, \theta) = \sum_{n=0}^N \mathbf{B}_n(r, z, \theta) \mathbf{u}_n^w,$$

związki zaś konstytutywne można napisać w postaci

$$(2.6) \quad \boldsymbol{\sigma}(r, z, \theta) = \mathbf{C} \sum_{n=0}^N \mathbf{B}_n(r, z, \theta) \mathbf{u}_n^w,$$

gdzie w macierzy C dla materiału ortotropowego mamy dziewięć niezależnych stałych materiałowych

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & & \\ & & C_{33} & & & \\ & \text{sym.} & & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}.$$

Przy założeniu, że rozważamy powłoki Love'a-Kirchhoffa, równania geometryczne mają postać

$$(2.7) \quad \epsilon = \epsilon^0 + \xi \kappa^0,$$

gdzie

$$\epsilon^0(s, \theta) = \sum_{n=0}^N \mathbf{B}_n^\epsilon(s, \theta) \mathbf{u}_n^w, \quad \kappa^0(s, \theta) = \sum_{n=0}^N \mathbf{B}_n^\kappa(s, \theta) \mathbf{u}_n^w.$$

Przyjmować będziemy, że płaszczyzny symetrii materiału powłoki pokrywają się odpowiednio z płaszczyznami $s=0$, $\xi=0$ i $\theta=0$ (rys. 1c). Zakładamy ponadto, że $\sigma_{\xi\xi} = 0$. Związki konstytutywne mają postać

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \mathbf{N}(s, \theta) &= h \mathbf{C}^* \epsilon^0(s, \theta) = h \mathbf{C}^* \sum_{n=0}^N \mathbf{B}_n^\epsilon(s, \theta) \mathbf{u}_n^w, \\ \mathbf{M}(s, \theta) &= \frac{h^3}{12} \mathbf{C}^* \kappa^0(s, \theta) = \frac{h^3}{12} \mathbf{C}^* \sum_{n=0}^N \mathbf{B}_n^\kappa(s, \theta) \mathbf{u}_n^w, \end{aligned}$$

gdzie w macierzy \mathbf{C}^* mamy cztery niezależne stałe materiałowe:

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & 0 \\ & C_{22}^* & 0 \\ \text{sym.} & & C_{44}^* \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} C_{11}^* &= C_{11} - C_{13}^2 / C_{33}, & C_{12}^* &= C_{12} - C_{13} C_{23} / C_{33}, \\ C_{22}^* &= C_{22} - C_{23}^2 / C_{33}, & C_{44}^* &= C_{44}. \end{aligned}$$

Utwórzmy wyrażenie na energię kinetyczną elementu w postaci

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_A \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} r d\theta dA,$$

gdzie A jest polem radialnego przekroju elementu, a ρ gęstością masy. Wykorzystując własność ortogonalności funkcji trygonometrycznych na przedziale $0 \leq \theta \leq 2\pi$ otrzymamy

$$(2.9) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \dot{\mathbf{u}}_n^{wT} \mathbf{m}_n \dot{\mathbf{u}}_n^w,$$

gdzie $\mathbf{m}_n = \int_0^{2\pi} \int_A \rho \mathbf{G}_n^T \mathbf{G}_n r d\theta dA$ jest macierzą mas elementu dla n -tego wyrazu rozwinięcia.

Utwórzmy następnie wyrażenia na energię odkształceń sprężystych w elemencie:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_A \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} r d\theta dA \quad (\text{dla ciał}),$$

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l (\boldsymbol{\epsilon}^{0T} \mathbf{N} + \boldsymbol{\kappa}^{0T} \mathbf{M}) r(s) d\theta ds \quad (\text{dla powłok}).$$

Ze względu na ortogonalność rozwinięcia Fouriera mamy

$$(2.10) \quad E = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \mathbf{u}_n^{wT} \mathbf{k}_n \mathbf{u}_n^w,$$

gdzie \mathbf{k}_n jest macierzą sztywności elementu dla n -tego wyrazu rozwinięcia:

$$\mathbf{k}_n = \int_0^{2\pi} \int_A \mathbf{B}_n^T \mathbf{C} \mathbf{B}_n r d\theta dA \quad (\text{dla ciał}),$$

$$\mathbf{k}_n = \int_0^{2\pi} \int_0^l \left(h \mathbf{B}_n^{sT} \mathbf{C}^s \mathbf{B}_n^s + \frac{h^3}{12} \mathbf{B}_n^{kT} \mathbf{C}^k \mathbf{B}_n^k \right) r(s) d\theta ds \quad (\text{dla powłok}).$$

Praca zewnętrzna wykonywana przez siły masowe \mathbf{b} i powierzchniowe \mathbf{t} wynosi

$$W = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{t} d(\partial\Omega) + \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega.$$

Po rozwinięciu w szereg Fouriera przemieszczeń \mathbf{u} oraz obciążeń \mathbf{t} i \mathbf{b} w sposób analogiczny do definiowanego wzorem (2.3) oraz po uwzględnieniu ortogonalności funkcji trygonometrycznych na przedziale $0 \leq \theta \leq 2\pi$ otrzymamy

$$(2.11) \quad W = \sum_{n=0}^N \mathbf{u}_n^{wT} (\bar{\mathbf{t}}_n + \bar{\mathbf{b}}_n).$$

Podstawiając uzyskane wyniki ze wzorów (2.9)–(2.11) do (2.2) otrzymujemy funkcję L_j dla j -tego elementu, a zsumowanie wszystkich M elementów układu prowadzi do wzoru

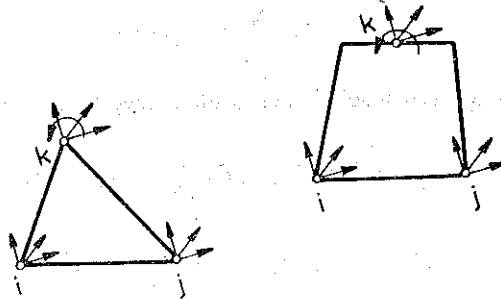
$$(2.12) \quad L = \sum_{j=1}^M L_j = \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_n^{wT} \mathbf{M}_n \dot{\mathbf{r}}_n^w - \frac{1}{2} \mathbf{r}_n^{wT} \mathbf{K}_n \mathbf{r}_n^w + \mathbf{r}_n^{wT} (\mathbf{T}_n + \mathbf{B}_n) \right),$$

gdzie $\dot{\mathbf{r}}_n^w$ jest wektorem reprezentującym— dla n -tego wyrazu rozwinięcia—wszystkie stopnie swobody układu, a \mathbf{M}_n , \mathbf{K}_n , \mathbf{T}_n i \mathbf{P}_n są odpowiednio globalnymi macierzami mas i sztywności oraz wektorami obciążenia.

Stosując wzory (2.1) i (2.12) otrzymamy w końcu równania różniczkowe ruchu układu osiowosymetrycznego:

$$(2.13) \quad \mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{r}}_n^w + \mathbf{K}_n \mathbf{r}_n^w = \mathbf{T}_n + \mathbf{P}_n, \quad n=0, 1, \dots, N.$$

Aby otrzymać równanie ruchu układu, w którym występują oba typy elementów (tj. powłokowy i przestrzenny) należy zwiększyć liczbę stopni swobody z trzech do czterech w węźle k elementu przestrzennego, wspólnego z elementem powłokowym. Zapewniając zgodność przemieszczeń (obrotów) punktów w płaszczyźnie połączenia elementów różnych typów, wykorzystujemy tzw. elementy pośrednie (rys. 2), których funkcje kształtu wyrażone są przez elementy macierzy G_n (r, z, θ) (por. (2.4)) odpowiadające trzem stopniom swobody dla każdego z węzłów i, j oraz elementy macierzy G_n (s, θ) odpowiadające czterem stopniom swobody węzła k .



Rys. 2. Elementy pośrednie

3. NUMERYCZNE CAŁKOWANIA RÓWNAŃ RUCHU

Analiza dynamiki konstrukcji polega na rozwiązywaniu układu równań ruchu postaci

$$(3.1) \quad M\ddot{r}(t) + C\dot{r}(t) + Kr(t) = R(t).$$

Znaczenie oraz sposób otrzymywania M , K i R omówiono poprzednio w p. 2. Sprawa określania macierzy tłumienia C wymaga krótkiego komentarza. Dla większości konstrukcji dokładna postać tej macierzy nie jest znana. Ponieważ wpływ jej na istotne cechy rozwiązania problemu dynamicznego jest często niewielki, usprawiedliwia to wprowadzenie pewnej przybliżonej metody jej określania. Kierując się oszczędnością pamięci komputera przyjmuje się zależność

$$(3.2) \quad C = \alpha M + \beta K,$$

dobierając stałe α i β na podstawie doświadczenia dotyczącego tłumienia modalnego.

Do całkowania równań (3.1) wykorzystuje się dwa zasadnicze podejścia. Pierwsze z nich polega na bezpośrednim całkowaniu równań ruchu metodą «krok po kroku», stosując różnicową aproksymację dla pochodnych względem czasu. Dla każdego dostatecznie małego przedziału czasu przyjmuje się, że przyrosty przyspieszenia i prędkości można wyznaczyć przez zmiany przemieszczenia, co prowadzi do zastąpienia układu równań różniczkowych zwyczajnych (3.1) układem liniowych równań algebraicznych. W pracy zastosowano tzw. metodę θ -Wilsona dla $\theta=1.4$, gwa-

rantującą w rozpatrywanym problemie bezwarunkową stabilność otrzymywanego rozwiązania. W metodzie superpozycji modelanej (MSM) rozwiązujemy równania drgań własnych układu, a następnie dokonujemy odpowiedniej transformacji wektora uogólnionych współrzędnych tak, aby otrzymać rozdzielone równania ruchu dla poszczególnych postaci drgań własnych. Równania te rozwiązywać można niezależnie od siebie. Główną zaletą MSM jest fakt, że w większości przypadków praktycznych wystarcza ograniczyć się do analizy kilku pierwszych postaci drgań własnych. W ten sposób dostatecznie dobre wyniki otrzymać można często już dla kilku uogólnionych współrzędnych, podczas gdy w metodzie całkowania bezpośredniego (MCB) uwzględnia się zawsze wszystkie współrzędne. Z drugiej strony w MSM konieczne jest rozwiązanie zagadnienia drgań własnych oraz odpowiednia transformacja układu równań, co nie jest potrzebne w MCB. Ponadto MSM stosowana może być zasadniczo tylko do zagadnień liniowych, podczas gdy w MCB nie ma żadnych ograniczeń tego rodzaju.

Obszerne omówienie zastosowanych metod podano w pracy [11].

4. PRZYKŁADY

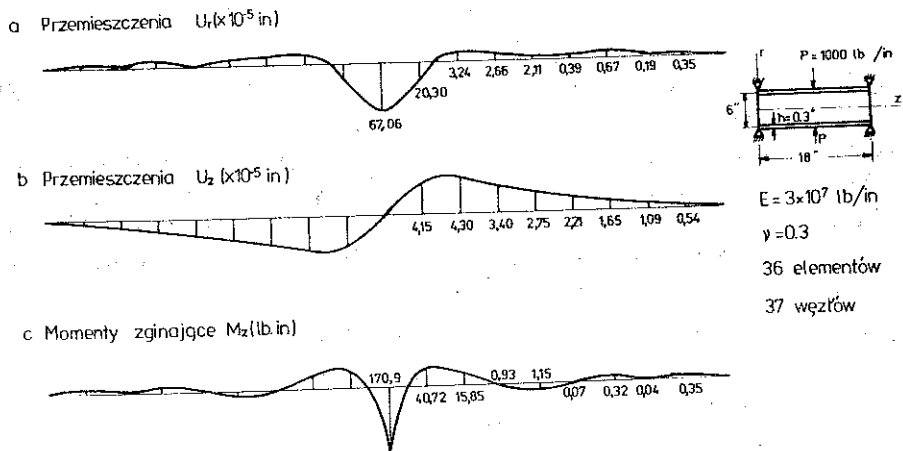
Opierając się na przedstawionej wyżej teorii opracowano program numeryczny DYNAX-L. Program napisany jest w języku FORTRAN-IV, składa się z około 2600 wyrażeń (kart perforowanych) i uruchomiony został na maszynie cyfrowej CYBER-72. Szczegółowy opis programu zawierający instrukcję wprowadzania danych oraz odpowiednie schematy blokowe podany jest w pracy [11]. Program w obecnej wersji umożliwia liniową analizę dynamiczną dowolnych konstrukcji osiowosymetrycznych zarówno typu powłokowego jak i masywnego (jak również konstrukcje złożone powłokowo-masywne). Obecnie opracowywana jest następna wersja programu umożliwiająca analizę zagadnień niesprężystych w zakresie dużych deformacji.

Poniżej przedstawiamy przykłady ilustrujące zastosowanie obecnej wersji programu. Zwracamy uwagę na to, że w punktach węzłowych leżących na osi symetrii konstrukcji, dla których $r=0$, należałoby stosować specjalnie zmodyfikowane funkcje kształtu [12]. W obecnej wersji założono dla uproszczenia, że program generuje w takich przypadkach automatycznie wartość $r=10^{-6}$.

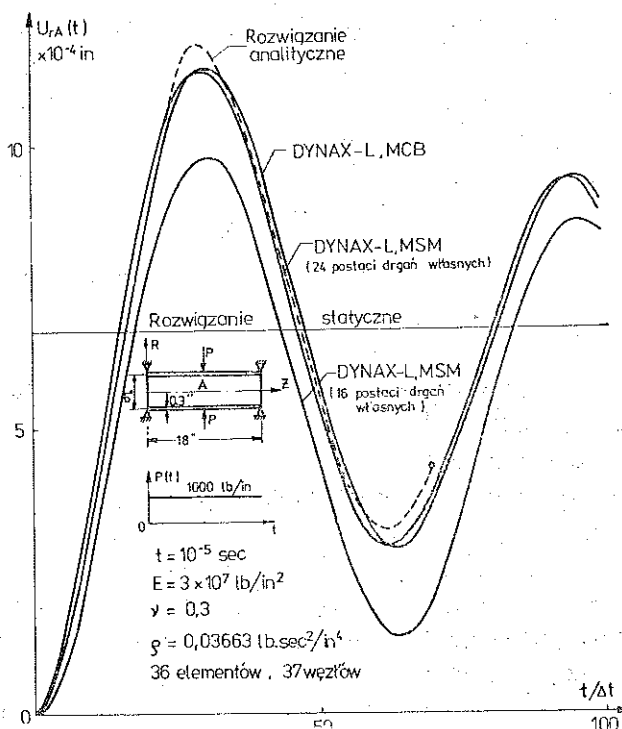
1. Analiza powłoki walcowej

Na rys. 3 podano wyniki liniowej analizy statycznej walcowej powłoki sprężystej podpartej przegubowo na obu końcach i równomiernie obciążonej wzdłuż środkowego obwodu. Obliczone przemieszczenia radialne u_r w punktach wzdłuż tworzącej (rys. 3a) określają postać odkształconej powierzchni środkowej powłoki. Na rys. 3b i 3c pokazano przemieszczenia u_z i momenty zginające M_z . Całkowity czas obliczeń (wraz z wydrukami) wyniósł 163 sek. Radialne przemieszczenia $u_r(t)$ w środkowym punkcie A powłoki poddanej działaniu nagle przyłożonego obciążenia policzono obydwiema metodami całkowania układu równań różniczkowych (MCB i MSM) dla 100 przyrostów czasu ($\Delta t=10^{-5}$ s) i przedstawiono

na rys. 4. Otrzymane przemieszczenia porównano z wynikami analitycznymi otrzymanymi na podstawie tej samej klasycznej teorii powłok [5]. Wpływ tłumienia w tym przypadku pominięto. Czas obliczeń wyniósł 259 s dla MCB oraz 358 s (16 postaci drgań własnych) i 421 s (24 p.d.w.) dla MSM.



Rys. 3. Statyczna analiza powłoki walcowej



Rys. 4. Dynamiczna analiza powłoki walcowej. Radialne przemieszczenia $u_r(t)$ w punkcie A

2. Drgania własne powłoki walcowej

Jako drugi przykład policzono drgania własne powłoki walcowej o utwardzonych brzegach, pokazanej na rys. 5. Na rysunku tym podano także odpowiednie dane geometryczne i materiałowe charakteryzujące powłokę. Macierz mas przyjęto w postaci diagonalnej. Zagadnienia własne rozwiązywane są w programie metodą Jacobiego [2]. Na rys. 5 i 6 pokazano odpowiednio sześć pierwszych postaci drgań obwodowych i osiowych oraz dwie inne możliwe postaci drgań osiowych (13-tą i 12-tą) a w tablicy 1 przedstawiono otrzymane wyniki i porównano je z wynikami eksperymentalnymi podanymi w [8] oraz z wynikami analitycznymi uzyskanymi na podstawie klasycznych równań powłok podanymi w [9]. Analizę przeprowadzono dzieląc powłokę na 10 pierścieniowych elementów skończonych.

Tablica 1

n		1	2	3	4	5	6	7
0	A			1025	700	559	525	587
	B	3427	1918	11465	765	580	530	597
	C	3426	1922	1160	769	581	534	589
1	A				1620	1210	980	875
	B	6423	3905	2538	1753	1287	1022	907
	C	6404	3912	2553	1770	1303	1034	912
2	A						1650	1395
	B		5844	4054	2921	2192	1720	1431
	C	8194	5839	4075	2953	2227	1754	1458
3	A							1960
	B		7303	5447	4104	3168	2516	2076
	C		7245	5451	4144	3222	2578	2133
4	A							
	B							
	C		8120	6550	5222	4197	3430	2867

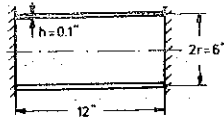
A—wg. [8], wartości doświadczalne

B—wg. [9], wartości analityczne

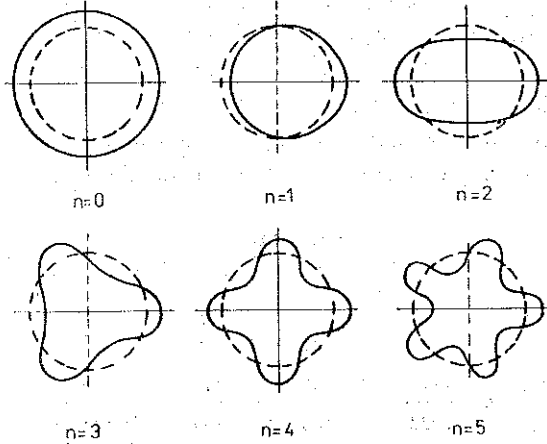
C—DYNAX-L, metoda elementów skończonych

3. Statyczna i dynamiczna analiza czaszy kulistej

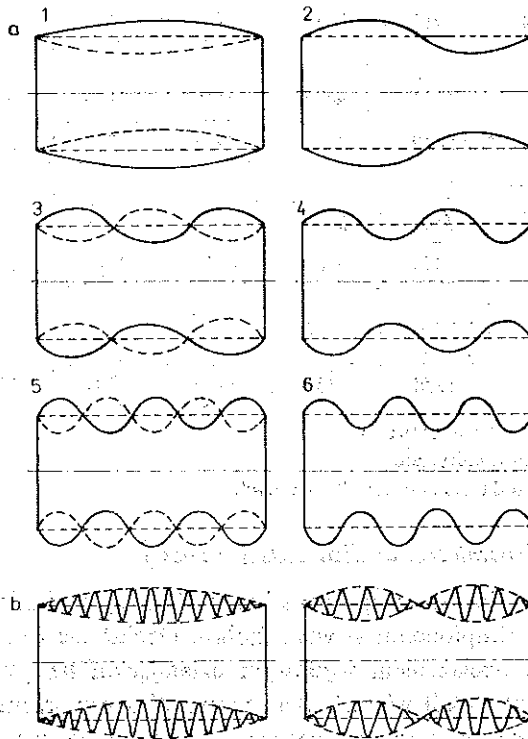
W przykładzie analizowano sprężystą czaszę kulistą utwardzoną na obwodzie poddaną obciążeniu skupionemu w wierzchołku. Obciążenie to zastąpiono równomiernie rozłożonym obciążeniem węzłowym działającym na pewnym małym obwodzie ($r=0.0445$ in) wokół wierzchołka czaszy. Wykresy przemieszczenia u , oraz momentów M_r i M_θ dla problemu statycznego pokazano na rys. 7. Czas obliczeń wyniósł 155 s.



$E = 29,6 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$
 $\nu = 0,29$
 $\rho = 0,000733 \text{ lb} \times \text{sec}^2/\text{in}^4$

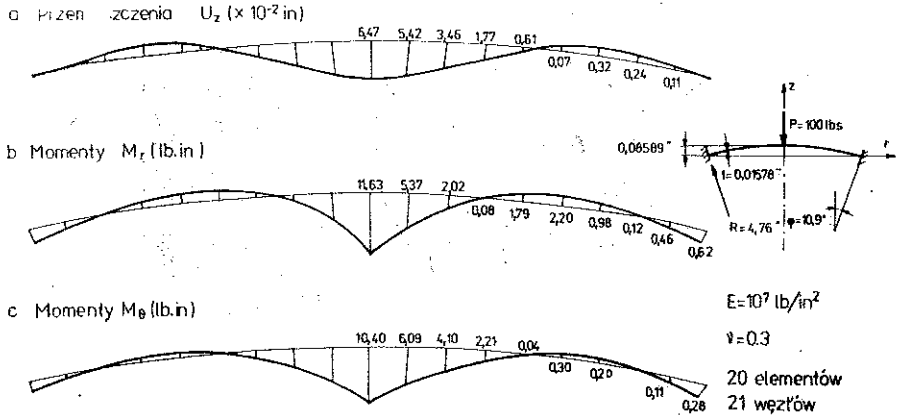


Rys. 5. Postacie drgań obwodowych powłoki walcowej

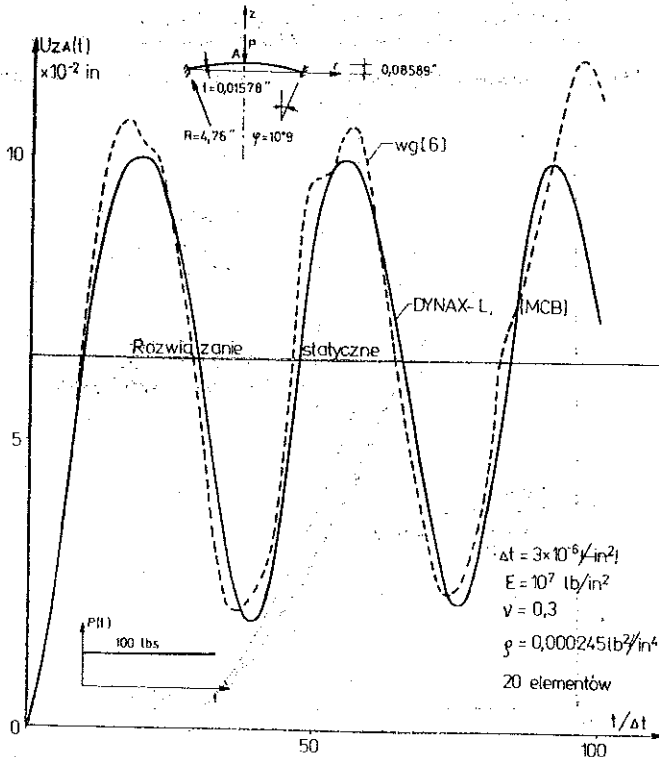


Rys. 6. Postacie drgań osiowych powłoki walcowej

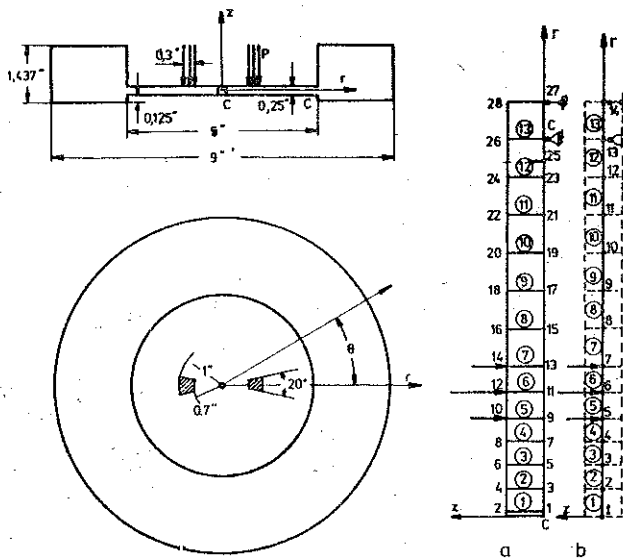
Na rys. 8 pokazano zachowanie się konstrukcji w przypadku obciążenia dynamicznego, które przyłożono w sposób nagły w chwili $t=0$ i pozostawiono niezmienną do końca analizy. Całkowania równań ruchu dokonano metodą bezpośrednią dla 100 przyróstów czasu, przy czym $\Delta t = 3.10^{-6}$ s. W porównaniu z rozwiązaniami podanymi w pracy [6] otrzymane wyniki wykazują dobrą zgodność postaci drgań i ich okresu oraz nieco gorszą zgodność w odniesieniu do amplitudy drgań. Czas obliczeń wyniósł 218 s.



Rys. 7. Statyczna analiza czaszy kulistej



Rys. 8. Dynamiczna analiza czaszy kulistej. Pionowe przemieszczenia $u_z(t)$ w punkcie wierzchołkowym



$$E = 10^7 \text{ lb/in}^2$$

$$P = 4000 \text{ lb}$$

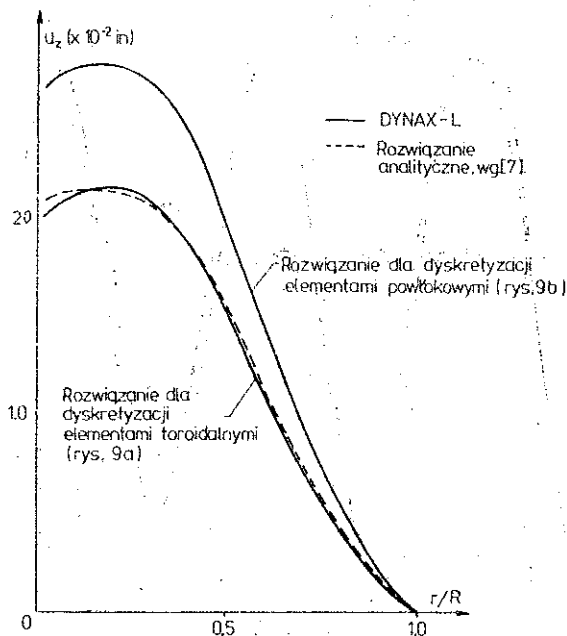
$$\nu = 0,3$$

Liczba wyrazów rozwinięcia Fouriera $n=4$

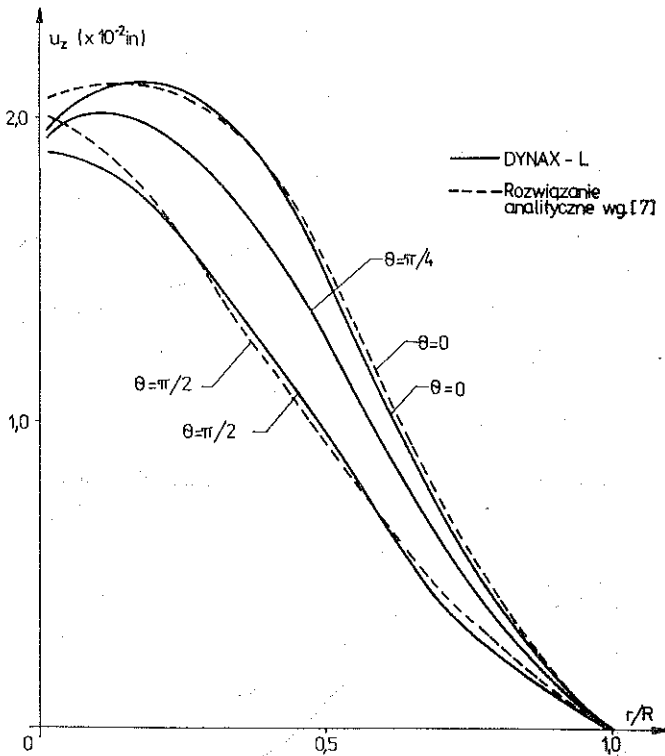
Dyskretyzacja a - 13 elementów toroidalnych, 28 węzłów

Dyskretyzacja b - 13 elementów powłokowych, 14 węzłów

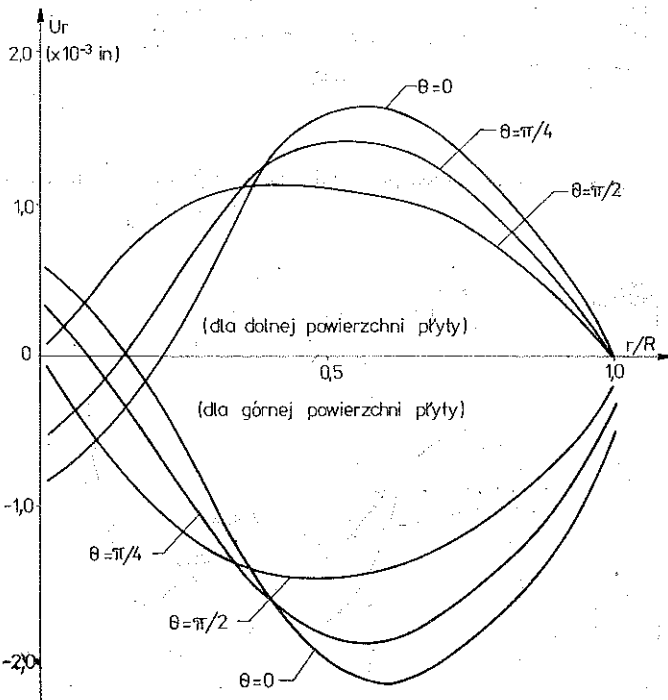
Rys. 9. Płyta poddana nieosiowosymetrycznemu obciążeniu i schematy obliczeniowe



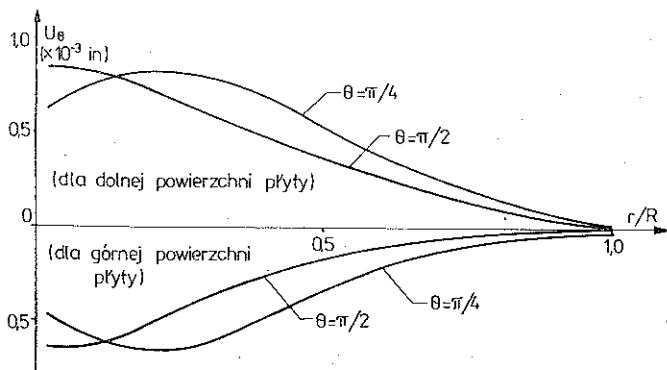
Rys. 10. Zmiany przemieszczeń u_z wzdłuż promienia górnej powierzchni płyty dla różnych kątów
Dyskretyzacja a



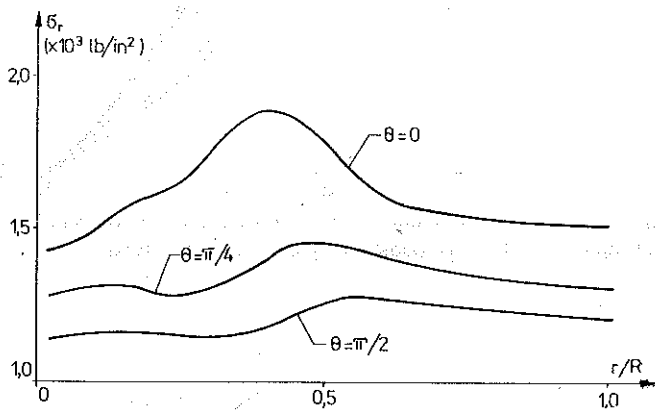
Rys. 11. Zmiany przemieszczeń u_z wzdłuż promienia środkowej powierzchni płyty dla różnych wartości kąta θ $\theta=0$ w przypadkach dyskretyzacji a i dyskretyzacji b, rys. 9



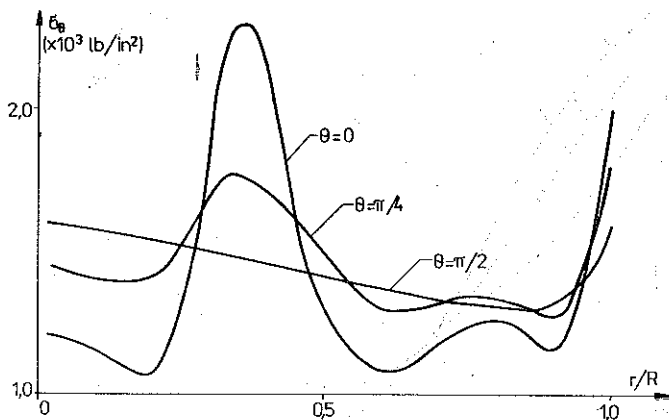
Rys. 12. Zmiany przemieszczeń u_r wzdłuż promienia dla różnych wartości kąta θ



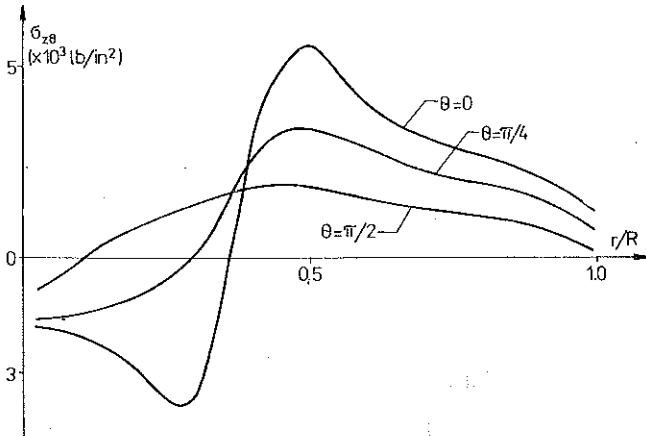
Rys. 13. Zmiany przemieszczeń u_0 wzdłuż promienia dla różnych wartości kąta θ



Rys. 14. Zmiany naprężeń σ_r wzdłuż promienia na górnej powierzchni dla różnych θ



Rys. 15. Zmiany naprężeń σ_θ wzdłuż promienia na górnej powierzchni płyty dla różnych wartości kąta θ



Rys. 16. Zmiany naprężeń $\sigma_{z\theta}$ wzdłuż promienia na górnej powierzchni płyty dla różnych θ

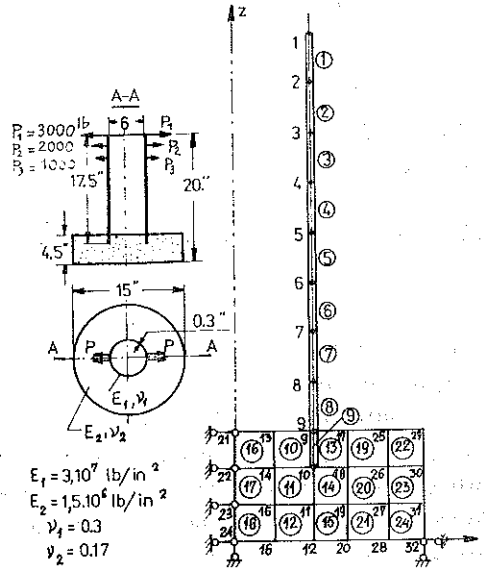
4. Analiza płyty kołowej

Za pomocą programu DYNAX-L przeprowadzono analizę konstrukcji o postaci pokazanej na rys. 9. Na rysunku tym podano również odpowiednie dane geometryczne i materiałowe oraz nieosiowosymetryczne obciążenie P . Analizowano jedynie środkową część konstrukcji traktując masywną część jako nieodkształconą. Uwzględnienie 4 wyrazów rozwinięcia Fouriera okazało się wystarczająco dokładne. Rozważono dwa przypadki konstrukcji podzielonej na 13 toroidalnych elementów o radialnym przekroju prostokątnym (dyskretyzacja a) oraz 13 elementów powłokowych (dyskretyzacja b) (rys. 9). Analiza przemieszczeń u_z (rys. 10) wykazuje znaczne zmiany przemieszczeń u_z dla różnych wartości kąta θ oraz zgodność otrzymanych wyników dla dyskretyzacji a z rozwiązaniami analitycznymi podanymi w [7]. Przemieszczenia u_z uzyskane w przypadku dyskretyzacji b są większe o maksymalnie 32% (dla $r \approx 0$) od przemieszczeń odpowiadających dyskretyzacji a (rys. 11). Ten stosunkowo znaczny błąd wynika z faktu, że w analizowanej konstrukcji nie są w pełni spełnione założenia teorii płyt cienkich, co czyni rozwiązanie otrzymane dla dyskretyzacji b niedokładnym. Na rys. 12–16 podano odpowiednio wykresy przemieszczeń u_r , u_θ oraz wykresy naprężeń σ_r , σ_θ i $\sigma_{z\theta}$ w środkowych punktach radialnego przekroju elementów. Rysunki te zamieszczone są aby zilustrować wpływ nieosiowosymetrycznego obciążenia na stan deformacji i naprężenia. Czas obliczeń wyniósł 190 s dla dyskretyzacji a, a oraz 161 s dla dyskretyzacji b.

5. Analiza współdziałania konstrukcji powłokowej z podłożem

W ostatnim przykładzie analizowano układ złożony z części powłokowej i części masywnej. Na rys. 17 podano dane geometryczne, materiałowe, nieosiowosymetryczne obciążenia statyczne oraz dyskretyzację rozpatrywanego układu. Wykorzystano w przykładzie dwa typy elementów: 9 elementów cienkiej powłoki dla górnej części oraz 15 toroidalnych elementów o kwadratowym przekroju radialnym dla podłoża. Uwzględniono 5 wyrazów rozwinięcia Fouriera. W tabelicy 2 podano przemieszczenia u_r , u_θ w niektórych punktach węzłowych dla różnych wartości kąta ($u_\theta = 0$ dla $\theta = 0$).

Uzyskane przemieszczenia określają postać odkształconego układu i wykazują wpływ braku osiowej symetrii obciążeń na zachowanie się konstrukcji. Na rys. 18 pokazano radialne przemieszczenia u_r środkowej powierzchni powłoki na szczycie (węzeł 1).

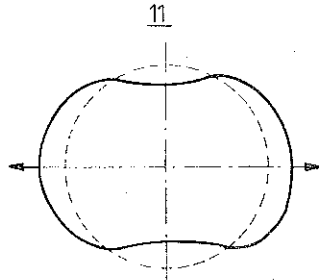


Rys. 17. Złożona konstrukcja poddana nieosiowosymetrycznemu obciążeniu i schemat obliczeniowy

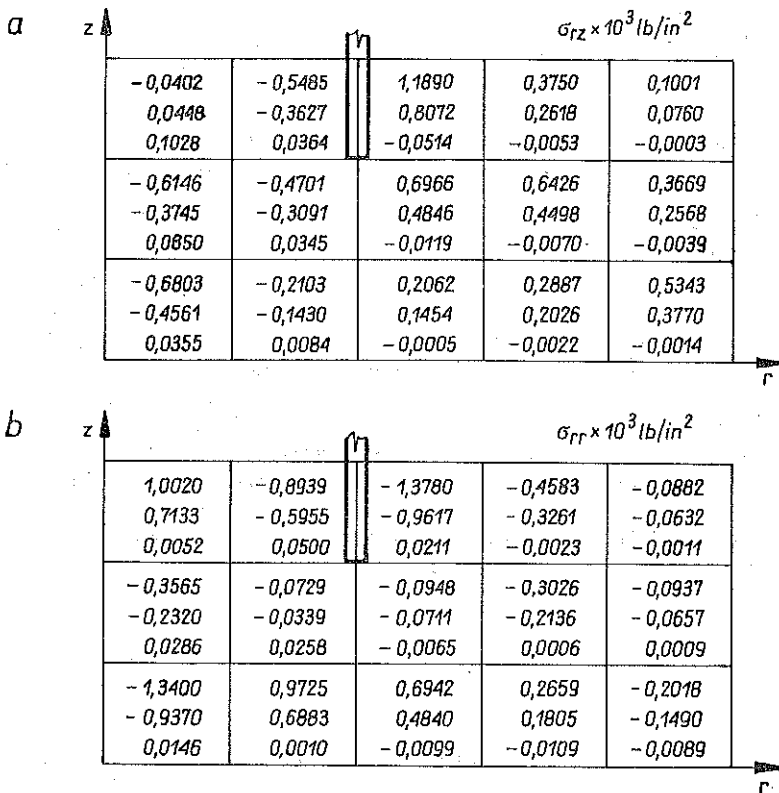
Tablica 2. Przemieszczenia u_r i u_0 dla różnych wartości kąta θ w poszczególnych węzłach

Węzeł	$u_r \times 10^{-2}$ in			$u_0 \times 10^{-2}$ in	
	$\theta=0$	$\theta=\mu/4$	$\theta=\mu/2$	$\theta=\mu/4$	$\theta=\mu/2$
1	11.2460	3.4588	-3.2146	-6.2172	-5.7862
3	6.5294	2.9900	-1.8166	-4.0887	-4.3710
5	3.5796	2.0236	-0.7341	-2.3447	-2.8262
7	1.6026	1.0247	-0.1769	-1.0545	-1.3904
9	0.1848	0.1338	-0.0037	-0.1588	-0.2318
10	0.0071	0.0101	0.0073	0.0430	0.0432
11	-0.0708	-0.0471	0.0042	0.0843	0.1114
12	-0.1391	-0.0952	0.0045	0.1676	0.2282
13	0.3107	0.2184	-0.0021	-0.1699	-0.2369
14	0.0483	0.0366	0.0035	-0.0066	-0.0158
15	-0.1276	-0.0879	0.0033	0.0701	0.0937
16	-0.2763	-0.1923	0.0043	0.1665	0.2296
17	-0.0428	-0.0239	0.0090	-0.0597	-0.0859
18	-0.0065	-0.0008	0.0053	0.0239	0.0275
19	-0.0452	-0.0292	0.0040	0.0815	0.1089
20	-0.0356	-0.0228	0.0033	0.1451	0.1973

Efekty te pokazano również na rys. 19, na którym przedstawiono naprężenia σ_{rz} oraz σ_{rr} w środkowych punktach radialnego przekroju elementów podłoża dla różnych wartości kąta θ ; $\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.



Rys. 18. Środkowa powierzchnia powłoki (węzeł 1) po odkształceniu



Rys. 19. Zmiany naprężeń σ_{rz} i σ_{rr} w środkach elementów podłoża dla różnych wartości kąta θ (odpowiednio $\theta=0$, $\theta=\pi/4$ i $\theta=\pi/2$ dla każdego elementu)

5. WNIOSKI

Na podstawie policzonych dotychczas przykładów stwierdzić można, że opracowany program DYNAX-L stanowić może już efektywne narzędzie statycznej i dynamicznej analizy konstrukcji osiowosymetrycznych. Niewielkie czasy obliczeń

przykładów testowych wskazuje, że program może być efektywnie wykorzystywany do analizy realnych zagadnień inżynierskich. W programie uwzględniono stosunkowo proste typy elementów skończonych, kierując się ostatecznym celem badań, którym jest analiza drgań nieliniowych, wymagająca dostępu do dużych obszarów pamięci maszyny cyfrowej. Jak stwierdzono na bazie analizy liniowej, nawet tak proste elementy skończone prowadzą przy umiejętnym wykorzystaniu do dostatecznie dokładnych wyników.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method*, Mc Graw Hill, London 1977.
2. K. J. BATHE, E. L. WILSON, *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice-Hall, New Jersey 1976.
3. K. WASHIZU, *Variational methods in elasticity and plasticity*, Pergamon Press, Oxford 1968.
4. K. KLEIBER, SHELAX—*Analiza dużych deformacji cienkich osiowosymetrycznych powłok sprężysto-plastycznych metodą elementów skończonych*, Prace IPPT PAN, 49, 1977.
5. K. J. BATHE, E. L. WILSON, B. PETERSON, SAP-IV—*A structural analysis program for static and dynamic response of linear system*, Univ. California, Berkeley 1974.
6. M. KLEIBER, *Nieliniowa, statyczna i dynamiczna analiza powłok metodą elementów skończonych*, Ref. Prob. II Konf. Konstr. Powł., Gołub 1978.
7. E. A. WITMER, J. J. KOTANCHIK, *Progress report on discrete element elastic and elastic-plastic analyses of shell of revolution subjected to axisymmetric and asymmetric loading*, Proc. 2nd Conf. Matrix Meths Struct. Mech. Wright-Pettersson A. F. Base, 1-116, Ohio 1968.
8. R. L. KOVAL, E. T. CRANCH, *On the free vibrations of thin cylindrical shells subjected to initial torque*, Proc. US Nat. Congr. Appl. Mech., 11-18, 1962.
9. B. L. SMITH, E. E. HAFT, *Natural frequencies of clamped cylindrical shells*, AIAA J., 6, 972-979, 1968.
10. E. L. WILSON, *Structural analysis of axisymmetric solids*, AIAA J., 31, 2669-2274, 1965.
11. M. KLEIBER, T. D. HIEN, DYNAX-L—*Dynamiczna analiza osiowosymetrycznych ciał i powłok sprężystych poddanych dowolnemu obciążeniu metodą elementów skończonych*, Prace IPPT PAN 25, 1980.
12. T. BELYTSCHKO, *Finite elements for axisymmetric solids under arbitrary loadings with nodes on origin*, AIAA J., 11, 1532-1533, 1972.

Резюме

ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ, ПОДВЕРГНУТЫХ ПРОИЗВОЛЬНЫМ НАГРУЗКАМ, МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Представлены основы численного анализа сложных осесимметричных конструкций, подвергнутых произвольным нагрузкам. Анализ проведен при помощи полуаналитического метода конечных элементов в рамках линейной модели ортотропного материала, с учетом четырех типов элементов.

Интегрирование уравнений движения проведено альтернативно методами модальной суперпозиции и непосредственного интегрирования. Все помещенные в работе примеры вычислены, применяя программу ДИНАКС-L, написанную на языке ФОРТРАН-IV.

SUMMARY

LINEAR DYNAMICS OF AXISYMMETRIC STRUCTURES UNDER ARBITRARY LOADS
BY THE FINITE ELEMENT METHOD

The numerical analysis of complex axisymmetric structures subjected to arbitrary loading is presented. The semi-analytical finite element method based on a linear model for the orthotropic elastic material is described. Four types of finite elements are included. The numerical integration of the equations of motion is performed using alternatively two algorithms: direct integration and mode superposition method. The validity of analysis is illustrated by a number of numerical examples calculated by the computer program DYNAX-L written in FORTRAN-IV.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 maja 1981 r.